

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

«Майкопский государственный технологический университет»

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Майкоп – 2019

УДК 621.3.01(07)

ББК 31.21

М 54

**СОСТАВИТЕЛЬ: Старков Н.Н., кандидат технических наук,
доцент**

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
Преимущества электрической энергии перед другими ее видами	11
Этапы развития электрической и электронной техники	11
Основные понятия и определения	12
Классификация электрических цепей	14
Топологические понятия теории электрических цепей	15
Электрические цепи постоянного тока	16
Основные законы.....	16
Методы расчета электрических цепей	18
Пример расчет электрических цепей постоянного тока	22
Однофазные цепи синусоидального тока	26
Общие сведения.....	26
Получение синусоидальной эдс.....	26
Основные параметры синусоидально изменяющихся величин	27
Представление синусоидального тока в различных формах	28
Активное сопротивление, индуктивность, емкость в цепях.....	31
Синусоидального тока	31
Последовательное включение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений в цепи синусоидального тока. Резонанс напряжений	35
Параллельное соединение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений в цепи синусоидального тока. Резонанс токов.....	38
Мощность цепи синусоидального тока.....	41
Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом ..	42
Пример расчета однофазной цепи синусоидального тока	43
Цепи периодического несинусоидального тока	48
Основные характеристики несинусоидальных периодических токов и напряжений	48

Мощность цепи несинусоидального тока.....	49
Расчет электрической цепи с несинусоидальными ЭДС и токами	50
Пример расчет однофазной цепи периодического несинусоидального тока .	51
Переходные процессы в линейных электрических цепях	56
Законы коммутации.....	56
Независимые и зависимые начальные условия.....	58
Характеристическое уравнение электрической цепи	59
Классический метод расчета переходных процессов.....	60
Переходные процессы в RL-цепях постоянного тока	61
Заряд и разряд конденсатора.....	63
Примеры расчета переходных процессов	65
<i>Расчет переходных процессов в цепях, содержащих активное</i>	
<i>сопротивление и индуктивность</i>	<i>65</i>
<i>Расчет переходных процессов в цепях, содержащих активное</i>	
<i>сопротивление и емкость.....</i>	<i>69</i>
Литература.....	74

ВВЕДЕНИЕ

Модели и моделирование

Изучение свойств реальных систем, прогнозирование, проектирование будущих больших систем энергетики, разработка устройств управления системами и решение разнообразных задач текущей эксплуатации - все это требует широкого проведения экспериментальных исследований. Эти исследования могут являться опытами «в натуре» - в действительной работающей системе, когда инженер хочет «попробовать и посмотреть, а что будет, если»: если, скажем, уменьшится напряжение на подстанции, питающей заводы или какой - то крупный район, если уменьшится частота в системе и т. д. Разумеется, этот вопрос «а что будет, если...» инженер ставит не из любопытства, а из желания знать, как будет вести себя система в ненормальных условиях - условиях, которые могут появиться во время эксплуатации и которые надо иметь в виду при проектировании будущей системы.

В этой постановке задачи исследования сложных систем необходимо иметь в виду два кардинальных обстоятельства:

1. При рассмотрении сложных объектов не всегда представляется возможным непосредственное проведение на них экспериментов. Например, разрабатывая новые системы управления элементами электрических систем, нецелесообразно проводить эксперименты сразу же в самих системах из - за возможных больших аварий, которые могут привести к значительным ущербам. Выходом из таких положений может стать использование моделей, которые находятся в некотором сходстве (необходимом для данного эксперимента) с оригинальным объектом.

2. Не всякие результаты экспериментального исследования дают действительно полезный результат, действительно ведут к цели. Для того, чтобы по результатам экспериментов можно было делать надежные выводы относительно

свойств изучаемых объектов, необходимо уметь их правильно поставить и обработать, т.е. придать им удобную для последующего использования форму, в которой бы исключались влияния ошибок и случайных факторов, могущих исказить полученные результаты и ввести исследователя в заблуждение. Здесь в понятие исследования вкладывается весьма широкий смысл. Это может быть исследование чисто экспериментальное, заключающееся в постановке серии опытов на уже действующем объекте - «на натуре» - или на его модели. Это может быть и чисто аналитическое исследование, при котором экспериментатор меняет параметры изучаемого объекта и для мысленно создаваемых различных условий проводит серии расчетных исследований. Эти расчеты могут проводиться различно, суть дела от этого не меняется. Для того чтобы результаты исследования представляли собой ценность, должна быть продумана и постановка их, и обработка. Сказанное относится и к так называемым проектным исследованиям, когда для какого - либо ответственного сооружения делается не один, а много (4 - 5) проектов, сравниваемых между собой так, чтобы по определенным показателям выбрать наилучший.

Во всех рассматриваемых исследованиях говорят о моделях, вкладывая в это слово очень широкий смысл, который часто понимается настолько широко, что само понятие теряет свое содержание. Смысл же этот можно усвоить из следующего общего определения.

Модель в традиционном понимании - это то, что на определенном этапе познавательной деятельности заменяет изучаемый объект. Процесс создания моделей, или моделирование, состоит в любом воспроизведении объективных закономерностей, свойственных предметам окружающего нас материального мира.

Моделирование может рассматриваться в двух основных аспектах:

- как познавательный процесс, когда поступающая информация об окружающем мире творчески перерабатывается в сознании человека; при этом создаются образы, отражающие объективные свойства материального мира. Эти образы могут иметь любую форму словесных формулировок, математиче-

ских записей, зарисовок любого типа - все это будут *познавательные модели*;

- как процесс создания неких материальных объектов - моделей, находящихся в некотором, необходимом для данной конкретной задачи, соответствии с изучаемым объектом, или, как его называют, с *оригиналом*.

Существует большое разнообразие моделей, среди которых могут быть выделены основные: физические, аналоговые.

Физические модели сохраняют полностью (или в основном, наиболее существенном) природу явления в оригинале. На физических моделях процессы протекают в измененных количественных соотношениях. Например, модель электрического генератора большой мощности может быть выполнена в виде электрического генератора во много раз меньшей мощности, но такого (этого надо добиться специальной конструкцией), в котором интересующие исследователя процессы протекают подобно процессам в натуральном - «настоящем» - генераторе.

Аналоговые модели (иногда их называют математические модели), построены на основе некоторого нефизического сходства - аналогии, обычно в технике - на основе совпадения (формального) математических уравнений, описывающих процессы в оригинале и в моделирующем объекте. В общем случае физическая природа явлений в модели отличается от природы явлений в оригинале; совпадают только уравнения (и то не обязательно для всего явления, может быть, только для некоторых процессов). Примером математической модели может служить электрическая схема, процессы в которой моделируют механические колебания маятника, в силу того, что процессы в электрический и механической системах описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями.

Кибернетическая модель, воспроизводящая функциональную зависимость между параметрами, характеризующими внешние воздействия на систему, и параметрами, определяющими реакцию системы на эти внешние воздействия, также является математической моделью. При построении такой модели явно не учитывается структура системы, физические свойства ее элементов, а

принимается во внимание только зависимость «входных» внешних возмущений от «выходных» реакций системы. В этой зависимости и находят своеобразное отражение различные свойства системы.

Под моделированием мы будем понимать исследование объектов познания на их моделях; построение и изучение моделей реально существующих предметов и явлений для определения, уточнения их характеристик, рационализации способов их построения и т. п.

Моделирование всегда используется вместе с другими общенаучными и специальными методами. Прежде всего, моделирование тесно связано с экспериментом. Изучение какого-либо явления на его модели (при предметном, знаковом моделировании, моделировании на компьютере) можно рассматривать как особый вид эксперимента: «модельный эксперимент», отличающийся от обычного («прямого») эксперимента тем, что в процесс познания включается «промежуточное звено» - модель, являющаяся одновременно и средством, и объектом экспериментального исследования, заменяющим изучаемый объект. Модельный эксперимент позволяет изучать такие объекты, прямой эксперимент над которыми затруднён, экономически невыгоден, либо вообще невозможен в силу тех или иных причин.

Дисциплина «Компьютерное моделирование электронных устройств» пришла на смену дисциплине «Основы электротехники и электроники» естественным путем в связи с развитием новых информационных технологий расчета и проектирования электротехнических и электронных устройств. Известно, что при разработке и исследовании различных электронных и электрических устройств основная трудность возникает на стадии составления математической модели для исследуемой установки, поскольку одна и та же установка может иметь разные математические описания в зависимости от задач исследования. Кроме того, часто необходимо определить поведение устройств в нестандартных и аварийных ситуациях, что при работе с натурными образцами может вызвать их значительную поломку вплоть до разрушения.

Моделирование широко используется при изучении устройств на всех стадиях его разработки в производственных условиях, а также при выполнении научно-исследовательских и лабораторных работ. В данной дисциплине моделирование выполняется на этапах моделирования электрических и электронных устройств и анализа результата. Такой подход позволяет не только познакомить студентов с основами моделирования различных устройств, но и научить их самостоятельно оценивать полученные величины.

Преимущества электрической энергии перед другими ее видами

Все отрасли современного производства и науки, культуры и быта невозможны без применения различных электротехнических устройств и процессов. Широкое использование электрической энергии обусловлено следующим:

- относительная простота производства;
- возможность практически мгновенно передавать большую энергию на большие расстояния при малых потерях;
- универсальность (простота преобразования в другие виды энергии);
- простота управления электротехническими установками;
- высокий коэффициент полезного действия электротехнологических установок.

Электротехника является теоретической базой для ряда других дисциплин: электроники, автоматики, вычислительной техники, технологического оборудования, электросварки и др.

Этапы развития электрической и электронной техники

Предыстория – до 17 в. – обнаружены некоторые электрические и магнитные явления, но природа их неизвестна.

1 этап – 17-18 в.в. – первые исследования электрических и магнитных явлений электрохимии, гальванометр Вольта (Италия), большая гальваническая батарея Петрова (Россия).

2 этап – первая половина 19 в. – раскрытие сущности электромагнитных явлений:

- закон электролиза Фарадея (Англия);
- тепловое действие тока – Джоуль (Англия) и Ленц (Россия);
- закон взаимодействия токов – Ампер (Франция);
- связь между напряжением, током, сопротивлением – Ом (Германия);
- явление электромагнитной индукции – Фарадей;
- 2-й закон Кирхгофа (Германия).

3 этап – вторая половина 19 в. – изобретены трансформаторы, электродвигатели, электроаппараты; определены основы их теории и принцип действия.

4 этап – начало 20 в. и до наших дней – повсеместное внедрение электротехники в промышленность, транспорт, науку и быт.

Основные понятия и определения

Электрическая цепь – совокупность устройств и объектов, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью таких понятий, как электродвижущая сила (ЭДС), ток, напряжение, сопротивление.

Элемент электрической цепи – отдельное устройство, входящее в состав электрической цепи и выполняющее в ней определенную функцию.

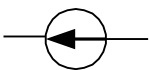

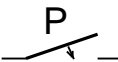
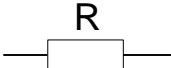
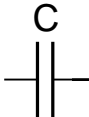

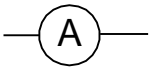
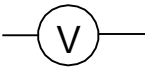
Основные элементы электрической цепи – источники и приемники электроэнергии.

В **источниках** электроэнергии различные виды энергии (химическая – в гальванических элементах; механическая – в генераторах; световая; тепловая) преобразуются в электромагнитную или электрическую.

В **приемниках** электроэнергии электромагнитная энергия преобразуется в другие виды энергии (химическую – гальванические ванны; тепловую – нагревательные приборы; механическую – электрические двигатели).

Вспомогательные элементы электрической цепи – резисторы, емкости, индуктивности, выключатели, предохранители, измерительные приборы.

Условные графические обозначения:

источник напряжения или ЭДС 	гальванический элемент 	выключатель 
резистор 	емкость 	индуктивность 
амперметр 	вольтметр 	

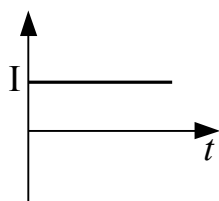
Электрические цепи принято изображать в виде различных схем, на которых показываются основные и вспомогательные элементы и их соединения. Различают монтажные, принципиальные схемы и схемы замещения.

На монтажных схемах изображают рисунок (эскиз) элементов цепи и соединения проводов, на принципиальных - условное графическое изображение элементов и схему их соединения. Схема замещения – расчетная модель электрической цепи. На ней реальные элементы заменяются идеальными и исключаются все элементы, не влияющие на результаты расчета.

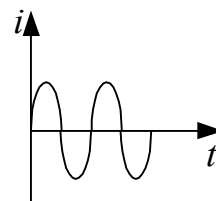
Классификация электрических цепей

1. По виду тока (рис. 1):

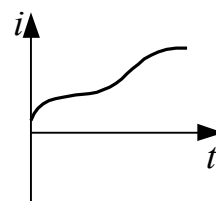
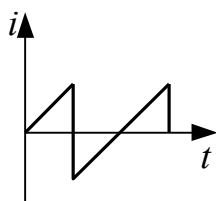
- а) цепи постоянного тока – электрический ток не изменяется во времени;
- б) цепи переменного тока:
 - цепи синусоидального тока;
 - цепи несинусоидального тока.



а) постоянный ток



б) переменный синусоидальный ток



в) переменный несинусоидальный ток

Рис. 1

2. По характеру параметров элементов:

- а) линейные цепи – цепи, у которых сопротивления не зависят от значений и направлений токов;
- б) нелинейные.

3. В зависимости от наличия или отсутствия источника электроэнергии:

- а) активные – содержащие источники электроэнергии;
- б) пассивные.

Топологические понятия теории электрических цепей

Топологические понятия электрических цепей рассмотрим на примере схемы рис. 2.

Ветвь электрической цепи – участок, элементы которого соединены друг за другом, т.е. последовательно. Ток в элементах один и тот же (adc, aeb).

Узел электрической цепи – место соединения ветвей (a,b,c).

Контур – любой замкнутый путь вдоль ветвей электрической цепи (cbadc, dabcd).

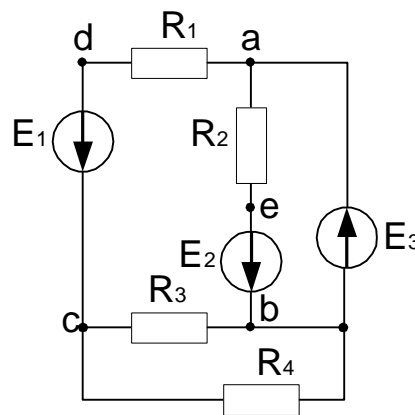


Рис. 2

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Основные законы

Электрические цепи постоянного тока - цепи, в которых протекает электрический ток, не изменяющийся во времени ни по величине, ни по направлению. В электрических цепях действуют следующие основные законы: закон Ома и I и II законы Кирхгофа

1. Закон Ома.

а) Закон Ома для участка цепи без источника. Сила тока на участке электрической цепи прямо пропорциональна напряжению на концах этого участка и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка (рис. 3):

$$I = \frac{U}{R}$$

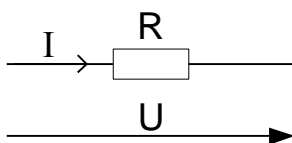
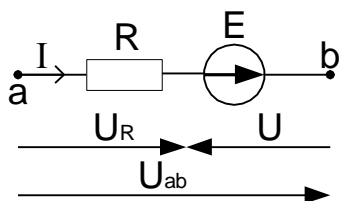
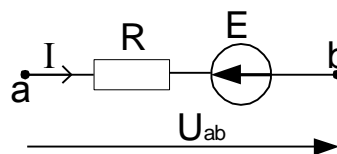


Рис. 3

б) Обобщенный закон Ома (для участка цепи с ЭДС) (рис. 4):



а)



б)

Рис. 4

Если направление тока в ветви совпадает с направлением ЭДС источника (рис. 4а), то

$$U_{ab} = U_R - E; U_R = IR; U_{ab} = IR - E; I = \frac{U_{ab} + E}{R}.$$

Если направление тока в ветви не совпадает с направлением ЭДС источ-

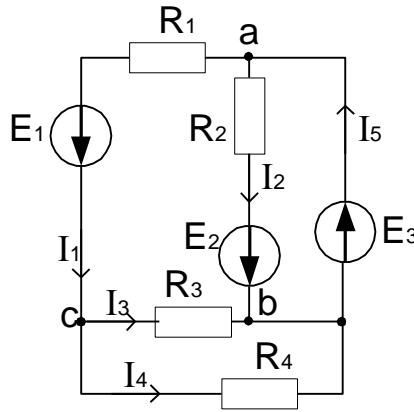


Рис. 5

ника (рис. 4б), то $I = \frac{U_{ab} - E}{R}$.

2. Законы Кирхгофа (рис. 5).

а) I закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю, при этом токи, одинаково направленные относительно узла, записываются с одинаковым знаком.

Для узла а: $I_1 + I_2 - I_5 = 0$.

б) II закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений любого контура равна алгебраической сумме ЭДС этого контура.

Правило знаков: падения напряжения записываются со знаком «+», если направления тока совпадает с направлением обхода контура; ЭДС записываются со знаком «+», если направления ЭДС и обхода контура совпадают.

Рассмотрим схему электрической цепи, приведенную на рис. 5. Направление обхода контура *abca* выберем по часовой стрелке. Тогда уравнение II закона Кирхгофа будет иметь следующий вид:

$$-E_1 + E_2 = I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_1 R_1.$$

3. Баланс мощности.

Мощность характеризует интенсивность преобразования энергии одного вида в другой за единицу времени.

Для цепи постоянного тока мощность источника: $P_{ист} = EI$, а приемника - $P_{пр} = I^2 R$, ($[P] = Bm$). На основании закона сохранения энергии мощность, развиваемая источниками электроэнергии, должна быть равна сумме мощностей всех приемников и потерь в источниках из-за внутренних сопротивлений. При этом: если направление ЭДС и тока совпадают, то EI в сумме записываются со знаком «+». Для схемы рис. 5 при выбранных направлениях токов:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_5 I_5 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4.$$

Методы расчета электрических цепей

Постановка задачи: в известной схеме цепи с заданными параметрами необходимо рассчитать токи, напряжения, мощности на отдельных участках. Для этого можно использовать следующие методы:

- преобразования цепи;
- непосредственного применения законов Кирхгофа;
- контурных токов;
- узловых потенциалов;
- наложения;
- эквивалентного генератора.

Будем рассматривать первых два метода.

1. Метод преобразования цепи. Суть метода: если несколько последовательно или (и) параллельно включенных сопротивлений заменить одним, то распределение токов в электрической цепи не изменится.

а) Последовательное соединение резисторов. Сопротивления включены таким образом, что начало следующего сопротивления подключается к концу предыдущего (рис. 6).

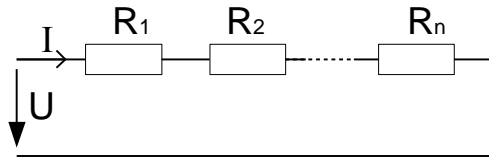


Рис. 6

Ток во всех последовательно соединенных элементах одинаков.

Заменяем все последовательно соединенные резисторы одним эквивалент-

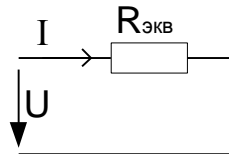


Рис. 7

ным $R_{\text{экв}}$. (рис. 7.).

По II закону Кирхгофа:

$$U = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I = R_{\text{экв}} I ;$$

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = R_{\text{экв}} ;$$

т.е. при последовательном соединении резисторов эквивалентное сопротивление участка цепи равно сумме всех последовательно включенных сопротивлений.

б) Параллельное соединение резисторов. При этом соединении соеди-

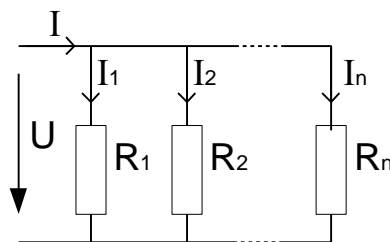


Рис. 8

няются вместе одноименные зажимы резисторов (рис. 8).

Все элементы присоединяются к одной паре узлов. Поэтому ко всем элементам приложено одно и тоже напряжение U .

По I закону Кирхгофа: $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

По закону Ома $I_k = \frac{U_k}{R_k}$. Тогда $I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$.

Для эквивалентной схемы (см рис. 7): $I = \frac{U}{R_{\text{экв.}}}$; $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_{\text{экв.}}}$.

Величина $\frac{1}{R}$, обратная сопротивлению, называется проводимостью G .

$$G = \frac{1}{R}; \quad G_1 + G_2 + \dots + G_n = G_{\text{экв.}} \quad [G] = \text{Сименс (См)}.$$

Частный случай: параллельно соединены два резистора (рис. 9).

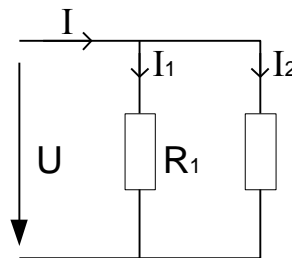


Рис. 9

$$\frac{1}{R_{\text{экв}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2};$$

$$R_{\text{экв.}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

в) Взаимное преобразование звезды (рис.10а) и треугольник сопротивлений (рис. 10б).

- преобразование звезды сопротивлений в треугольник:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c};$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b R_c}{R_a};$$

$$R_{ca} = R_c + R_a + \frac{R_c R_a}{R_b}.$$

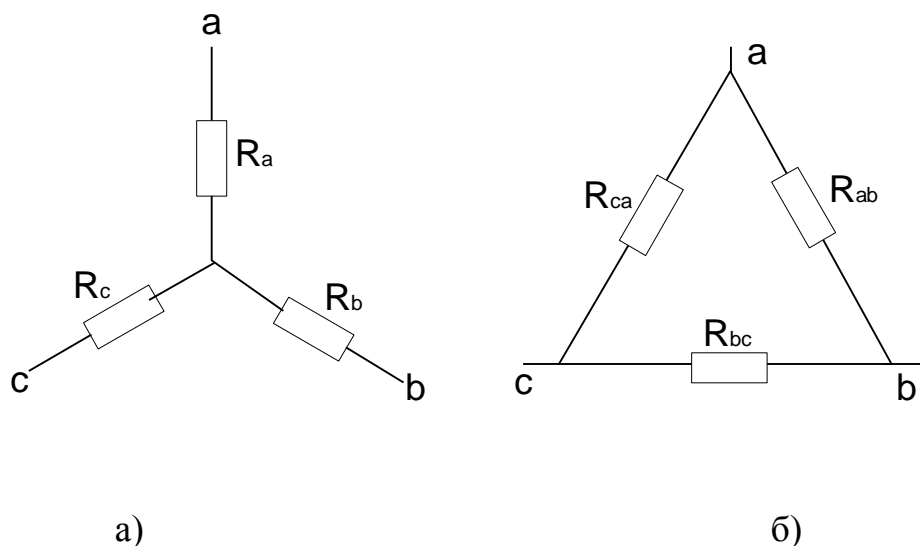


Рис. 10

- преобразование "треугольника" сопротивлений в "звезду":

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}};$$

$$R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}};$$

$$R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

2. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа. Порядок расчета:

- Определить число ветвей (т.е. токов) и узлов в схеме.
- Произвольно выбрать условно-положительные направления токов.

Общее число уравнений должно быть равно числу неизвестных токов.

- Определить, сколько уравнений должно быть составлено по I закону Кирхгофа, а сколько - по II закону Кирхгофа.

- Составить уравнения для $(N_y - 1)$ узлов по I закону Кирхгофа и для $N_b - (N_y - 1)$ независимых контуров (отличающихся друг от друга хотя бы на одну ветвь) - по II закону Кирхгофа.

- Решить система уравнений относительно токов. Если в результате ток получился отрицательным, то его действительное направление противоположно выбранному.

- Проверить правильность решения задачи, составив уравнение баланса мощности и смоделировав электрическую цепь средствами моделирующего пакета Electronics Workbench.

Примечание: если есть возможность, то перед составлением системы уравнений по законам Кирхгофа, следует преобразовать "треугольник" сопротивлений в соответствующую "звезду".

Пример расчет электрических цепей постоянного тока

Расчет будем выполнять с применением законов Кирхгофа, предварительно преобразовав треугольник сопротивлений в звезду.

Пример. Определить токи в цепи рис. 11, если $E_1=160$ В, $E_2=100$ В, $R_3=100$ Ом, $R_4=100$ Ом, $R_5=150$ Ом, $R_6=40$ Ом.

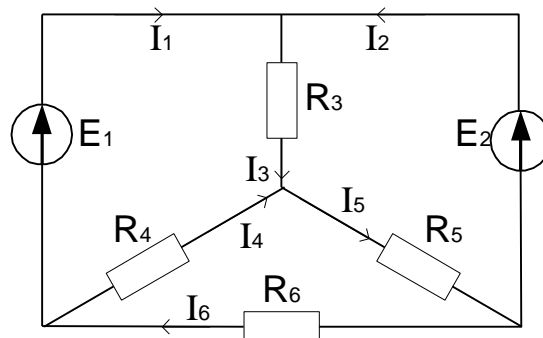


Рис. 11

Преобразуем треугольник сопротивлений R_4 R_5 R_6 в звезду сопротивлений R_{45} R_{56} R_{64} , предварительно указав условные положительные направления токов в цепи (рис. 12).

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{100 \cdot 150}{100 + 150 + 40} = 51,72 \text{ Ом};$$

$$R_{56} = \frac{R_5 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{150 \cdot 40}{100 + 150 + 40} = 20,69 \text{ Ом};$$

$$R_{64} = \frac{R_4 R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = \frac{100 \cdot 40}{100 + 150 + 40} = 13,79 \text{ Ом}.$$

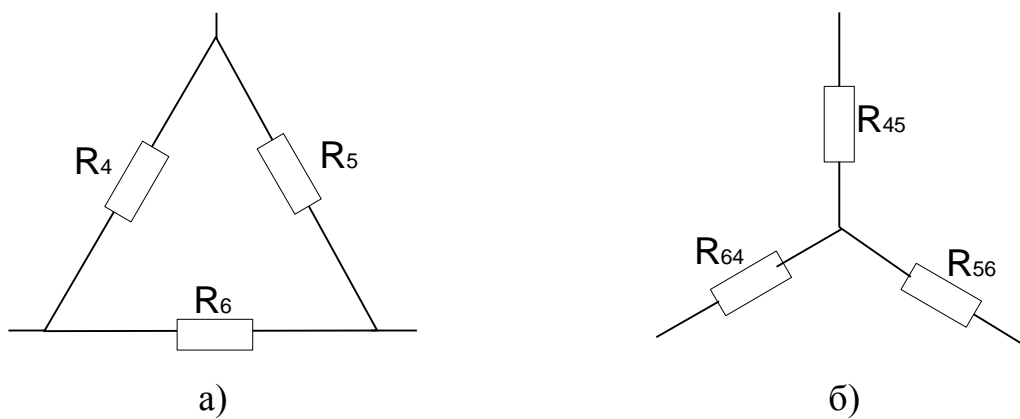


Рис. 12

После преобразования электрическая цепь примет вид рис. 13 (в непреобразованной части электрической цепи направления токов не изменятся).

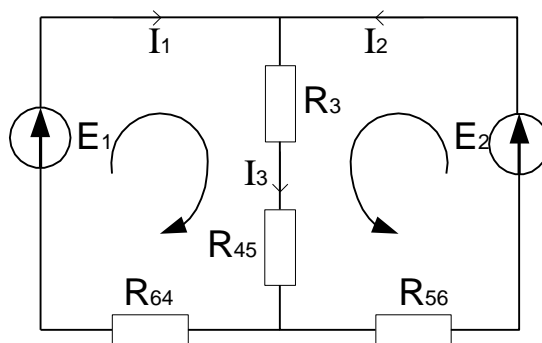


Рис. 13

В полученной электрической цепи 2 узла, 3 ветви, 2 независимых контура, следовательно, в цепи протекает три тока (по количеству ветвей) и необходимо составить систему трех уравнений, из которых по I закону Кирхгофа – одно уравнение (на 1 меньше, чем узлов в схеме электрической цепи) и два уравнения – по II закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ E_1 = I_1 R_{64} + I_3 (R_3 + R_{45}) \\ E_2 = I_2 R_{56} + I_3 (R_3 + R_{45}) \end{cases}$$

Подставим в полученную систему уравнений известные значения ЭДС и сопротивлений:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 160 = I_1 \cdot 13,79 + I_3 \cdot (100 + 51,72) \\ 100 = I_2 \cdot 20,69 + I_3 \cdot (100 + 51,72) \end{cases}$$

Решая систему уравнений любым способом, определяем токи схемы электрической цепи рис. 13:

$$I_1 = 2,29 \text{ A}; I_2 = -1,44 \text{ A}; I_3 = 0,85 \text{ A}.$$

Переходим к исходной схеме (см. рис. 11). По II закону Кирхгофа:

$$E_1 = I_3 R_3 - I_4 R_4;$$

$$I_4 = \frac{I_3 R_3 - E_1}{R_4} = \frac{100 \cdot 0,85 - 160}{100} = -0,75 \text{ A}.$$

По I закону Кирхгофа:

$$I_3 + I_4 - I_5 = 0;$$

$$I_5 = I_3 + I_4 = 0,85 + (-0,75) = 0,1 \text{ A};$$

$$I_1 + I_4 - I_6 = 0;$$

$$I_6 = I_1 + I_4 = 2,29 + (-0,75) = 1,54 \text{ A}.$$

Токи I_2 и I_4 получились отрицательными, следовательно, их действительное направление противоположно выбранному нами (рис. 14).

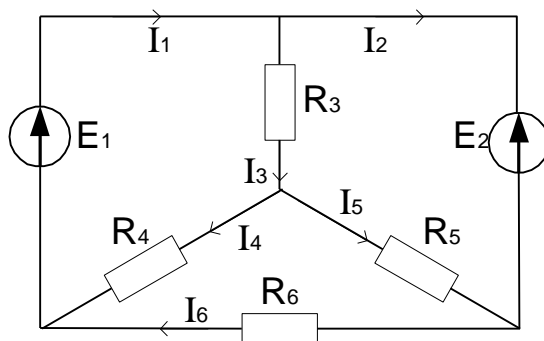


Рис. 14

Правильность решения проверяем, составив уравнение баланса мощности. Мощность источников (учтем, что ЭДС источника E_2 направленно встречно току I_2 , протекающему через него):

$$E_1 I_1 - E_2 I_2 = 160 \cdot 2,29 - 100 \cdot 1,44 = 222,4 \text{ Вт}.$$

Мощность потребителей:

$$\begin{aligned} I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 &= \\ &= 0,85^2 \cdot 100 + 0,75^2 \cdot 100 + 0,1^2 \cdot 150 + 1,54^2 \cdot 40 = 224,86 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Погрешность вычислений в пределах допустимого (меньше 5%).

Смоделируем электрическую цепь рис. 11 средствами моделирующего пакета Electronics Workbench (рис. 15):

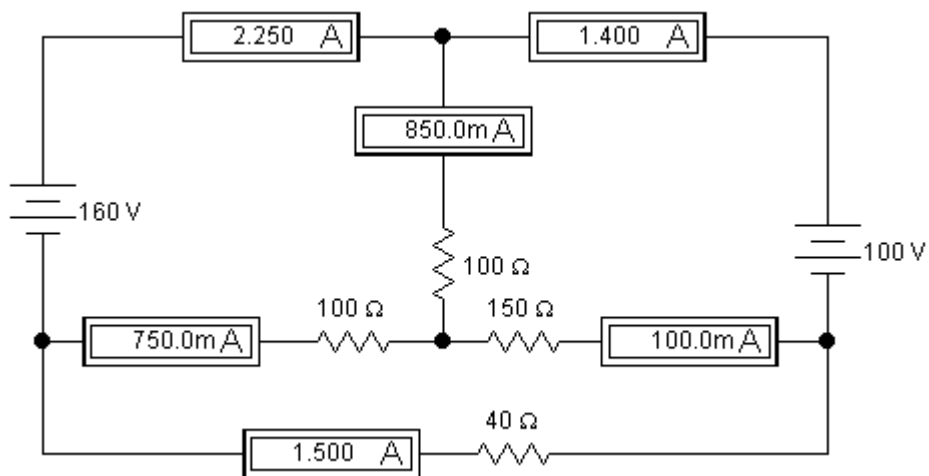


Рис. 15

При сравнении расчетных результатов и результатов моделирования, можно увидеть, что они отличаются (различия не превышают 5%), т.к. измерительные приборы имеют внутренние сопротивления, которые моделирующая система учитывает

ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Общие сведения

Преимущества переменного тока по сравнению с постоянным:

1. Производство, передача и использование электроэнергии наиболее экономичны.
2. Можно относительно просто преобразовывать напряжения при сохранении формы кривой.
3. Наиболее распространенными являются электродвигатели синусоидального тока – асинхронные двигатели.

Получение синусоидальной ЭДС

Пусть рамка вращается с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле (рис. 16).

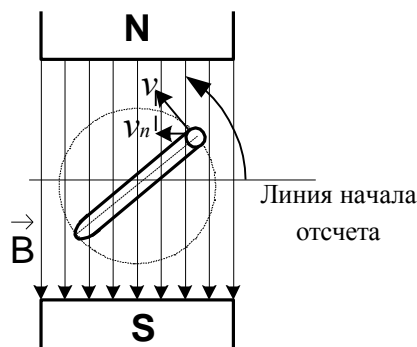


Рис. 16

По закону электромагнитной индукции в каждом проводнике рамки будет наводиться изменяющаяся ЭДС: $e = Blv_n$,

где B – магнитная индукция;

l – длина проводника;

v_n – скорость пересечения проводником магнитных линий.

Если v – линейная скорость проводника, то $v_n = v \cdot \sin(\omega t + \varphi_e)$, где ωt – угол поворота витка за время t . Тогда

$$e = Blv \cdot \sin(\omega t + \varphi_e) = E_m \sin(\omega t + \varphi_e),$$

где E_m – амплитуда ЭДС (рис. 17).

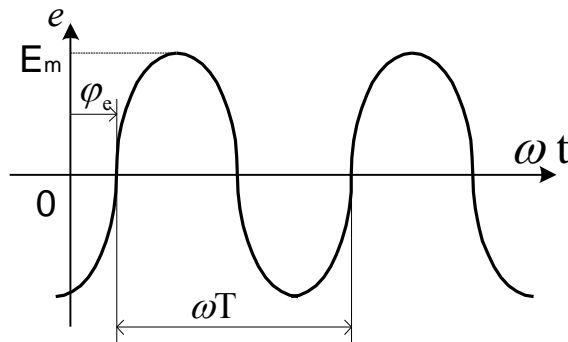


Рис. 17

Основные параметры синусоидально изменяющихся величин

В линейных цепях синусоидального тока напряжение, ЭДС, ток изменяются по синусоидальному закону:

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u);$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e);$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i),$$

где u, e, i – мгновенные значения (значения в данный момент времени);

$\omega t + \varphi_u, \omega t + \varphi_e, \omega t + \varphi_i$ – фаза (фазовый угол).

Фаза отсчитывается от точки перехода синусоидальной функции через ноль к положительному значению (рис. 18).

I_m, U_m, E_m – амплитуда – максимальное значение синусоидальной величины;

ω – угловая частота (c^{-1});

$\varphi_u, \varphi_e, \varphi_i$ – начальная фаза – значение аргумента функции в начальный момент времени;

T – период - наименьший интервал времени, через который мгновенные значения величины повторяются;

f – частота (Гц) – число периодов в секунду ($f = \frac{1}{T}$);

φ – сдвиг фаз между напряжением и током ($\varphi = \varphi_u - \varphi_i$).

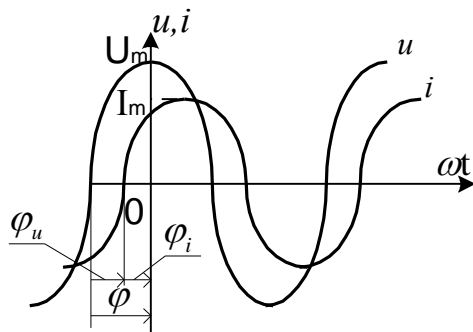


Рис. 18

Если $\varphi > 0, \varphi_u > \varphi_i$ – напряжение опережает ток (ток отстает от напряжения); $\varphi < 0, \varphi_u < \varphi_i$ – ток опережает напряжение (напряжение отстает от тока).

U, I, E – действующее значение (тепловой эквивалент постоянному току):

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}; \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$$

Физический смысл действующего значения однофазного синусоидального тока: это такой постоянный ток, который за то же время, проходя через то же сопротивление, выделяет такое же количество тепла, что и данный синусоидальный ток.

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Представление синусоидального тока в различных формах

Как правило, рассматриваются четыре способа представления синусоидального тока: аналитическое, графическое, при помощи векторов и комплексных чисел. Рассмотрим эти способы на примере сложения двух токов одинако-

вой частоты (из курса математики известно. Что сумма двух синусоид одинаковой частоты - тоже синусоида):

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_{i1});$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \varphi_{i2});$$

$$i_1 + i_2 = i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i);$$

1. Аналитическое представление синусоидального тока - ток записывается как функция времени. Сумма двух синусоидальных токов одинаковой частоты - синусоидальный ток такой же частоты, параметры которого определяются следующим образом:

$$I_m = \sqrt{I_{m1}^2 + I_{m2}^2 - 2I_{m1}I_{m2} \cos(\varphi_{i1} - \varphi_{i2})};$$

$$\varphi_i = \operatorname{tg} \frac{I_{1m} \sin \varphi_{i1} + I_{2m} \sin \varphi_{i2}}{I_{1m} \cos \varphi_{i1} + I_{2m} \cos \varphi_{i2}}.$$

Если необходимо сложить более двух токов (или вычесть из одного тока другие), то формулы получаются очень сложные, поэтому пользоваться этим способом представления синусоидальных токов неудобно.

2. Графическое представление синусоидальных токов - токи представляются в виде графиков, сложение происходит по точкам, следовательно, этот способ является приближенным, что не всегда допустимо.

3. Представление синусоидальных токов при помощи векторов (рис. 19) основано на том, что любую функцию, изменяющуюся во времени по синусоидальному закону, можно представить в виде вращающегося с постоянной частотой вектора.

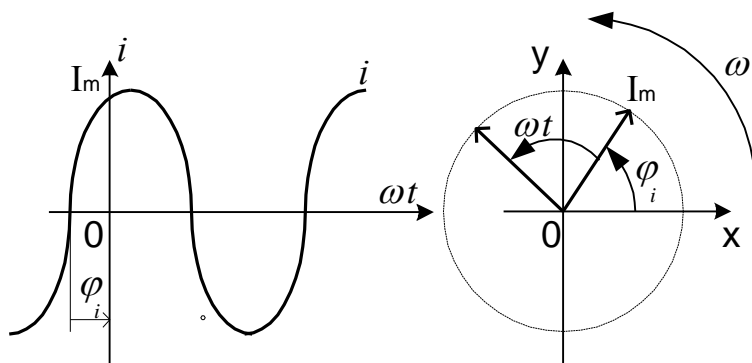


Рис. 19

В прямоугольной системе координат отложим вектор I_m , длина которого равна амплитуде, а угол наклона к оси абсцисс – начальной фазе тока φ_i . Его проекция на ось ординат равна мгновенному значению тока в момент $t = 0$: $i(0) = I_m \sin \varphi_i$.

Будем вращать вектор I_m с постоянной угловой скоростью ω против часовой стрелки, тогда через время t его проекция на ось ординат будет равна мгновенному значению синусоидального тока: $I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = i$.

В электротехнике изображают неподвижные вектора в момент времени $t = 0$, причем их длина должна быть равна не амплитуде, а действующему значению.

4. Представление синусоидального тока с помощью комплексных чисел.

Из курса математики известно, что любую синусоидально изменяющуюся величину можно изобразить в виде радиуса-вектора длиной I , составляющего с осью действительных чисел угол φ_i (рис. 20а). Его проекция на ось действительных чисел $I' = I \cos \varphi_i$, на ось мнимых чисел $I'' = I \sin \varphi_i$. Тогда вектор тока может быть записан: $\dot{I} = I' + jI'' = Ie^{j\varphi_i}$, где I – модуль комплексного числа, его действующее значение; φ_i – фаза; $e^{j\alpha}$ – поворотный множитель, оператор поворота (умножение вектора на этот множитель равносильно его повороту на комплексной плоскости на $\angle \alpha$) (рис. 20б).

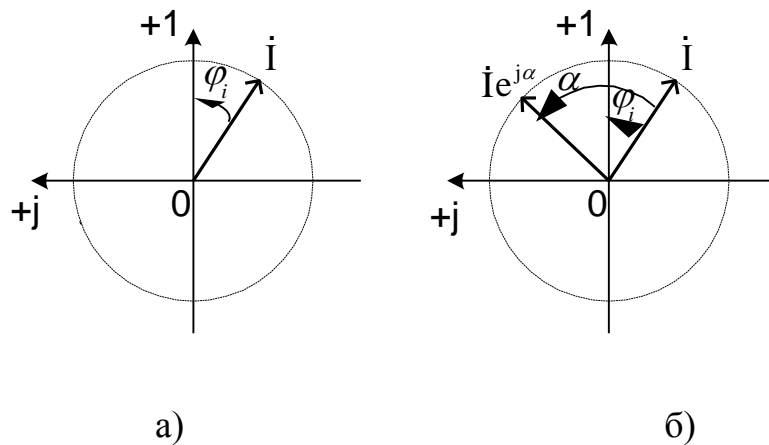


Рис. 20

Для анализа электрических цепей часто используются векторные диаграммы (рис. 21а). Совокупность векторов ЭДС, напряжений, токов, изображенных в общей системе координат, называется векторной диаграммой. Век-

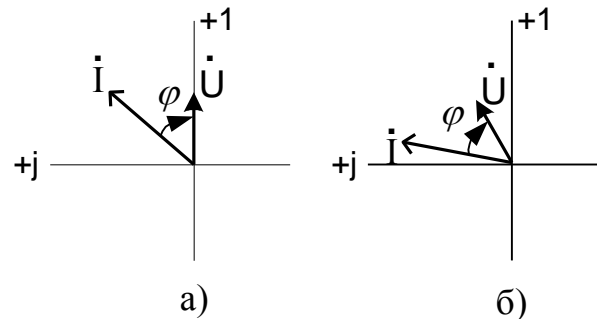


Рис. 21

торная диаграмма дает наглядное представление о действительных значениях, начальных фазах и углах сдвига фаз.

Взаимное расположение векторов зависит не от начальных фаз, а от угла сдвига фаз (рис.21б).

Активное сопротивление, индуктивность, емкость в цепях синусоидального тока

1. Цепь с резистором (рис. 22).

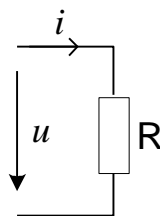


Рис. 22

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Определить закон изменения тока через резистор i .

По закону Ома для участка цепи, содержащего резистор,

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \varphi_u) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i);$$

$$\frac{U_m}{R} = I_m; \quad \varphi_i = \varphi_u; \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0, \text{ следовательно, ток и напряжение на ре-}$$

зисторе совпадают по фазе.

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U; \quad \frac{I_m}{\sqrt{2}} = I;$$

$$I = \frac{U}{R} - \text{закон Ома для действующих значений напряжения и тока на ре-}$$

зисторе.

Перейдем к комплексным выражениям тока и напряжения:

$$\dot{U} = U e^{j\varphi_u}; \quad \dot{I} = I e^{j\varphi_i};$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{\dot{U}}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = \operatorname{Re}^{j0} = R.$$

Закон Ома в комплексной форме для цепи с активным сопротивлением:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R}$$

Векторная диаграмма для участка цепи синусоидального тока, содержащего активное сопротивление, показана на рис.23.

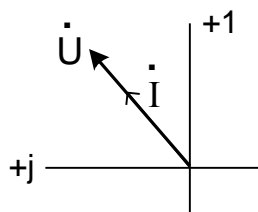


Рис. 23

2. Цепь с индуктивностью (рис. 24).

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону:

$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Определить закон изменения тока через индуктивность i .

По закону электромагнитной индукции:

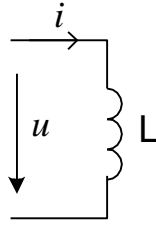


Рис. 24

$$u = L \frac{di}{dt}; u dt = L di; di = \frac{u}{L} dt.$$

$$i = \int \frac{u}{L} dt = \frac{1}{L} \int U_m \sin(\omega t + \varphi_u) dt = \frac{U_m}{\omega L} (-\cos(\omega t + \varphi_u) + A) = \\ = \frac{U_m}{\omega L} \sin(\omega t + \varphi_u - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i).$$

$A=0$ (постоянная интегрирования), т.к. ток должен быть синусоидальным и не должен иметь постоянную составляющую.

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}; \quad \omega L = \frac{U}{I} - \text{индуктивное сопротивление.}$$

$$I = \frac{U}{\omega L}; \quad x_L = \omega L; \quad [\omega L] = \frac{B}{A} = \text{Ом}$$

$$\varphi_i = \varphi_u - 90^\circ; \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i = 90^\circ.$$

Ток на участке цепи синусоидального тока, содержащем индуктивность, отстает от напряжения на угол 90° .

Перейдем к комплексам тока и напряжения.

$$\dot{U} = U e^{j\varphi_u}; \quad \dot{I} = I e^{j\varphi_i}.$$

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\varphi_u}}{I e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = x_L e^{j90^\circ} = jx_L.$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{jx_L} - \text{закон Ома для участка цепи, содержащего индуктивность, в}$$

комплексной форме;

jx_L – индуктивное сопротивление в комплексной форме.

Векторная диаграмма для участка цепи, содержащего индуктивность, показана на рис. 25.

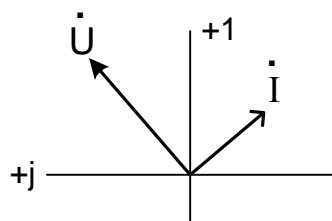


Рис. 25

3. Цепь с емкостью (рис. 26).

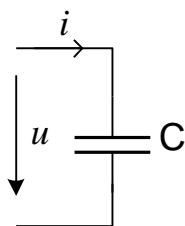


Рис. 26

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону:
 $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Определить закон изменения тока через емкость i .

Т.к. электрический ток, протекающий через конденсатор, есть скорость изменения заряда на его обкладках, то

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d(UC)}{dt} = C \frac{dU}{dt} = C \frac{d}{dt} (U_m \sin(\omega t + \varphi_u)) = C \omega U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = \\ = C \omega U_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi_u + 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i).$$

$$I_m = C \omega U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{x_C};$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} - \text{емкостное сопротивление};$$

$$I = \frac{U}{x_C} - \text{закон Ома для действующих значений тока и напряжения на}$$

участке цепи, содержащем емкость.

Ток на емкости опережает напряжение на угол 90° .

Перейдем к комплексам напряжений и токов:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = x_C e^{-j90^\circ} = -jx_C$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{-jx_C} \text{ - закон Ома в комплексной форме;}$$

$-jx_C$ - емкостное сопротивление в комплексной форме.

Векторная диаграмма для участка цепи, содержащего емкость, приведена на рис. 27.

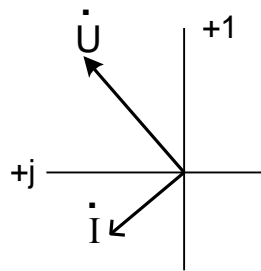


Рис. 27

Последовательное включение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений в цепи синусоидального тока. Резонанс напряжений

Пусть приложенное напряжение изменяется по закону: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$. Участок цепи содержит последовательно включенные резистор сопротивлением R , индуктивность L , емкость C (рис. 28). Определить закон изменения тока на этом участке цепи.

По второму закону Кирхгофа: $u = u_R + u_L + u_C$, или в комплексной форме:

$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$. Подставим в эту формулу выражения для падений напряжения на различных элементах:

$$U_R = \dot{I} R; \dot{U}_L = \dot{I} jx_L; \dot{U}_C = \dot{I}(-jx_C).$$

$$\dot{U} = \dot{I} R + \dot{I} jx_L + \dot{I}(-jx_C) = \dot{I}(R + jx_L - jx_C) = \dot{I} \underline{Z}.$$

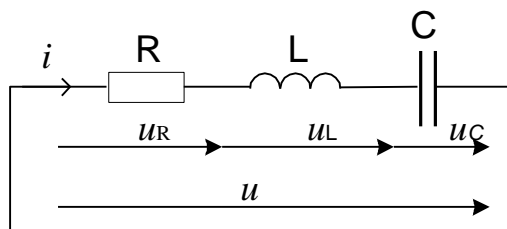


Рис. 28

$\underline{Z} = R + jx_L - jx_C$ - комплексное сопротивление цепи.

$\underline{Z} = R + j(x_L - x_C) = R + jx$, где x - реактивное сопротивление.

Представим комплексное сопротивление в показательной форме:

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{x_L - x_C}{R},$$

где Z - модуль комплексного сопротивления; полное сопротивление цепи.

φ - аргумент (фаза) сопротивления.

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\varphi_u}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}.$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 29.

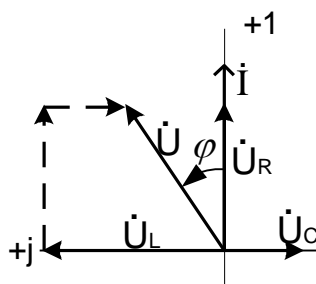


Рис. 29

Выводы:

1. В цепи с последовательным соединением R, L, C справедлив закон

Ома: $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$

2. Угол сдвига фаз между напряжением и током равен аргументу комплексного сопротивления. Знак угла сдвига определяется знаком реактивного сопротивления.

а) $x > 0, x_L > x_C$ - участок имеет активно-индуктивный характер, ток отстает от напряжения на угол, меньше 90° (см. рис. 29).

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_R}.$$

б) $x < 0, x_L < x_C$ - участок имеет активно-емкостный характер, ток опережает напряжение на угол, меньше 90° (рис. 30).

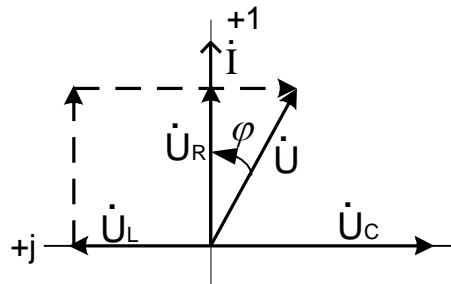


Рис. 30

в) $x = 0; x_L = x_C$ - участок имеет активный характер, ток и напряжение совпадают по фазе (рис. 31). В цепи наблюдается резонанс напряжений.

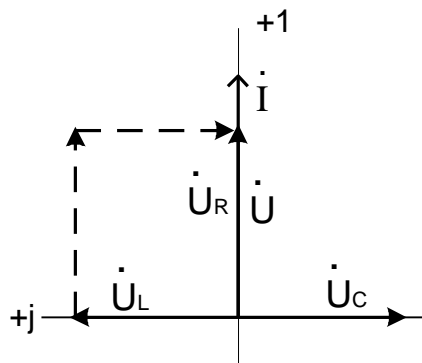


Рис. 31

Резонансом в электрических цепях называется режим участка цепи, содержащий индуктивный и емкостный элементы, при котором угол сдвига фаз между напряжением и током равен 0° .

- резонанс напряжений – при последовательном соединении элементов;
- резонанс токов – при параллельном соединении элементов.

При последовательном соединении элементов (см. рис. 31) во время резонанса напряжений

$$x_L = x_C;$$

$$I \cdot x_L = I \cdot x_C;$$

$$U_L = U_C;$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = U_R;$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = R$$

Таким образом, при резонансе напряжений полное сопротивление цепи минимально в сравнении с нерезонансными режимами, следовательно, ток максимален (по закону Ома), возможен перегрев элементов. В то же время напряжение на реактивных элементах может в несколько раз превышать напряжение питания, если реактивные сопротивления больше активного.

Явление резонанса напряжения используется в радиотехнике, но, в то же время, опасно, т.к. возможен пробой изоляции проводов.

По условию резонанса напряжений $x_L = x_C$. Тогда $\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C};$

$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, где ω_p - частота питающей сети, при которой в цепи может наступить резонанс.

Получение резонанса напряжений возможно изменением индуктивности, емкости и частоты.

Параллельное соединение активного, индуктивного и емкостного сопротивлений в цепи синусоидального тока. Резонанс токов

Рассмотрим электрическую цепь синусоидального тока, содержащую две параллельно включенные ветви: одна содержит активно-индуктивное сопротивление, другая - активно-емкостное (рис. 32).

К цепи подключен источник синусоидального напряжения, изменяющегося по закону: $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$.

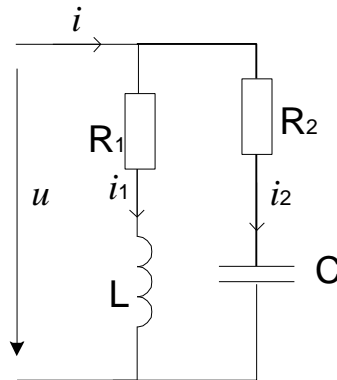


Рис. 32

По I закону Кирхгофа для мгновенных значений токов: $i = i_1 + i_2$, а для комплексов - $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Разделим обе части последнего уравнения на одно и то же напряжение \dot{U} :

$$\frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}} + \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}}; \quad \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}; \quad \underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2,$$

где \underline{Y} - полная проводимость. $\underline{Y} = G - jB$, G - активная проводимость, $B = B_L - B_C$ - реактивная проводимость.

$$[Y] = [G] = [B] = C_m.$$

Если известны параметры цепи, то проводимости:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; \quad B_L = \frac{x_L}{Z_1^2}; \quad B_C = \frac{x_C}{Z_2^2}.$$

Построим векторную диаграмму токов.

Пусть вектор приложенного напряжения совпадает с положительным направлением оси действительных чисел, т.е. $\varphi_u = 0$ (рис. 33). Ток I_1 отстает от \dot{U} на угол φ_1 , ток I_2 опережает \dot{U} на φ_2 .

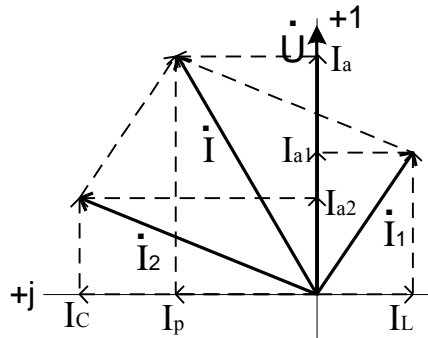


Рис. 33

Угол сдвига фаз между током в неразветвленном участке цепи и напряжением на концах этого участка определяется следующим образом:

$$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G_1 + G_2}.$$

Проекции вектора тока в неразветвленной части цепи на оси действительных и мнимых чисел: $I_a = I_{a1} + I_{a2}$; $I_p = I_L - I_C$. Действующее значение этого тока $I = \sqrt{I_a^2 + (I_L - I_C)^2}$.

Если $B_L > B_C$; $\varphi > 0$, вектор тока отстает от вектора напряжения, цепь носит активно-индуктивный характер.

Если $B_L < B_C$; $\varphi < 0$, вектор тока опережает вектор напряжения, цепь носит активно-емкостный характер.

Если $B_L = B_C$; $\varphi = 0$ - цепь носит активный характер, в цепи наблюдается резонанс токов (рис. 34). При этом $I_L = I_C$, $I_p = 0$, $I = I_a$, $I_a = I_{a1} + I_{a2}$.

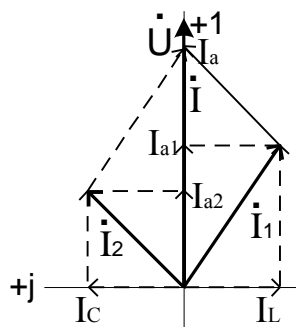


Рис. 34

Выводы:

1. $\varphi = 0; \underline{Y} = G$ - полная проводимость минимальна.

2. Ток в неразветвленной части цепи минимален ($\dot{I} = \dot{U} \underline{Y}$).

3. Если $B_L \gg G_1; B_C \gg G_2$, то $I_L \gg I_{a1}; I_C \gg I_{a2}; I_1 = \sqrt{I_{a1}^2 + I_L^2}; I_2 = \sqrt{I_{a2}^2 + I_C^2}; I = I_{a1} + I_{a2}$. Следовательно, $I_1 \gg I; I_2 \gg I$, то есть токи в ветвях значительно больше, чем ток в неразветвленной части цепи. Применяется в радиотехнике.

Мощность цепи синусоидального тока

Под мгновенной мощностью (мощностью в данный момент времени) понимается произведение мгновенных значений тока и напряжения:

$$p = ui = p_R + p_L + p_C.$$

Если $u > 0; i > 0$ или $u < 0; i < 0$, то $p > 0$, и в рассматриваемый участок цепи поступает энергия.

Если $u > 0; i < 0$ или $u < 0; i > 0$, то $p < 0$ и участок отдает энергию.

Однако среднее значение мощности за период всегда положительное, т. к. на участке всегда есть необратимые преобразования энергии.

Средняя за период мощность называется активной и определяется следующим образом:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi.$$

$$[P] = \text{Вт}.$$

Мощность реактивных элементов $p_p = p_L + p_C$ в среднем за период равна 0, но в течение четверти периода она положительна, что физически означает накопление энергии в магнитном поле катушки или в электрическом поле конденсатора, а в течении следующей четверти – отрицательна, что соответствует расходу энергии.

Таким образом, имеет место процесс колебания энергии, но необратимых преобразований энергии нет.

Мощность колебаний энергии называют реактивной:

$$Q = UI \sin \varphi.$$

$$[Q] = \text{вар} - (\text{вольт-ампер реактивный}).$$

Кроме активной и реактивной мощностей цепь синусоидального тока характеризуется и полной мощностью S . Это максимально возможная мощность при заданных напряжении U и токе I :

$$S = UI.$$

$$[S] = \text{ВА}.$$

Связь между различными мощностями: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$, $\varphi = \arctg \frac{Q}{P}$.

В комплексной форме полная мощность определяется следующим образом: $\underline{S} = \dot{\underline{U}}^* \underline{I}$,

где \underline{I}^* – сопряженный ток; $\dot{\underline{I}} = I e^{j\varphi_i} = I' + jI''$; $\underline{I}^* = I e^{-j\varphi_i} = I' - jI''$.

$$\underline{S} = U e^{j\varphi_u} I e^{-j\varphi_i} = UI e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Расчет однофазных цепей синусоидального тока символическим методом

Суть метода: если в цепи переменного тока токи, напряжения, сопротивления записаны в комплексной форме, то для этих цепей справедливы законы и методы расчета цепей постоянного тока.

Порядок расчета:

1. Записать в комплексной форме сопротивления всех ветвей.
2. Задать направление на комплексной плоскости известного тока или напряжения; представить в комплексной форме этот ток или напряжение.

3. Любым способом определить комплексы остальных токов и напряжений.

4. Правильность решения проверить, составив уравнения баланса активной и реактивной мощностей.

5. Смоделировать данную электрическую цепь средствами моделирующего пакета Electronics Workbench, определить показания приборов, сравнить полученные результаты с расчетными, сделать выводы.

Пример расчета однофазной цепи синусоидального тока

Для электрической цепи рис. 35 известны: действующее значение приложенного напряжения $U = 230 В$, частота питающей сети $f = 50 Гц$, резисторы $R_1 = 3 Ом$, $R_2 = 2 Ом$, индуктивности $L_1 = 3,185 мГн$, $L_2 = 12,75 мГн$, емкость $C = 254,8 мкФ$.

Определить токи, напряжения, мощности на всех участках и во всей цепи.

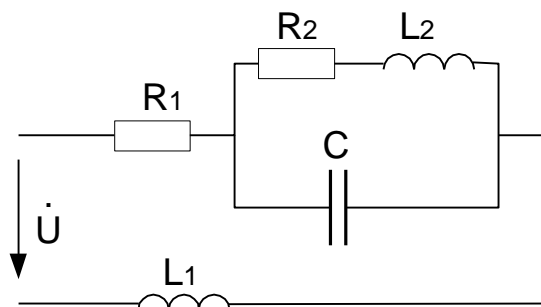


Рис. 35

1. Определяем индуктивные и емкостное сопротивления цепи:

$$X_1 = 2\pi f L_1 = 2\pi \cdot 50 \cdot 3,185 \cdot 10^{-3} = 1 Ом;$$

$$X_2 = 2\pi f L_2 = 2\pi \cdot 50 \cdot 12,75 \cdot 10^{-3} = 4 Ом;$$

$$X_3 = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 254,8 \cdot 10^{-6}} = 12,5 Ом.$$

2. Запишем комплексы сопротивлений участков цепи:

$$\underline{Z}_1 = R_1 = 3 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 2 + j4 = 4,47e^{j63,4^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = -jX_3 = -j12,5 = 12,5e^{-j90^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_4 = jX_4 = j1 \text{ Ом}.$$

3. Эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{4,47e^{j63,4^\circ} \cdot 12,5e^{-j90^\circ}}{2 + j4 - 12,5} = 6,4e^{j50,2^\circ} = 4,1 + j4,92 \text{ Ом};$$

4. Эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_4 = 3 + j1 + 4,10 + j4,92 = 7,10 + j5,92 = 9,24e^{j39,8^\circ} \text{ Ом}.$$

5. Ток в неразветвленной части цепи определим по закону Ома. Для этого зададим направление приложенного напряжения и представим это напряжение в комплексной форме.

Пусть вектор приложенного напряжения совпадает с положительным направлением оси действительных чисел (рис. 36). Тогда $\dot{U} = Ue^{j0^\circ} = U = 230 \text{ В}$.

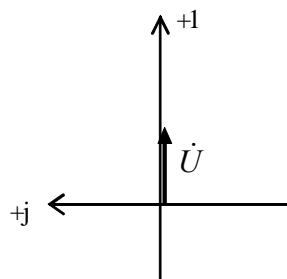


Рис. 36

$$\underline{\dot{I}}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{230}{9,24e^{j39,8^\circ}} = 24,89e^{-j39,8^\circ} = 19,12 - j15,93 \text{ А}.$$

6. Падение напряжения на резисторе R_1 :

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = 24,89e^{-j39,8^\circ} \cdot 3 = 74,67e^{-j39,8^\circ} = 57,36 - j47,79 \text{ В}.$$

7. Падение напряжения на индуктивности L_1 :

$$\dot{U}_4 = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_4 = 24,89e^{-j39,8^\circ} \cdot e^{j90^\circ} = 24,89e^{j50,2^\circ} = 15,93 + j19,12 \text{ В}.$$

8. Напряжение на параллельном участке определяются по второму закону

Кирхгофа. Так как $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_{23} + \dot{U}_4$, то

$$\begin{aligned}\dot{U}_{23} &= \dot{U} - \dot{U}_1 - \dot{U}_4 = 230 - (57,36 - j47,79) - (15,93 + j19,12) = \\ &= 156,71 + j28,67 = 159,31e^{j10,4^\circ} \text{ В.}\end{aligned}$$

Токи в параллельных ветвях находятся по закону Ома:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_2} = \frac{159,31e^{j10,4^\circ}}{4,47e^{j63,4^\circ}} = 35,54e^{-j53^\circ} = 21,45 - j28,46 \text{ А};$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{23}}{\underline{Z}_3} = \frac{159,31e^{j10,4^\circ}}{12,5e^{-j90^\circ}} = 12,74e^{j100,4^\circ} = -2,30 + j12,53 \text{ А}.$$

9. Векторная диаграмма токов и напряжений приведена на рис. 37.

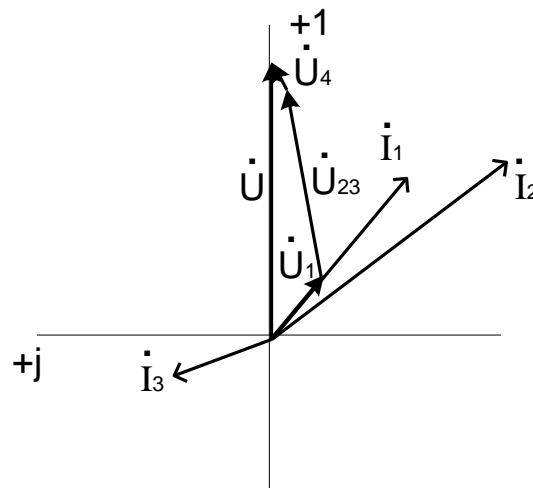


Рис.37

10. Расчет мощностей:

а) мощность, вырабатываемая источником питания:

$$\underline{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}_1^* = 230 \cdot (19,12 + j5,93) = 4397,6 + j3663,9 \text{ ВА};$$

$$P = 4397,6 \text{ Вт}; Q = 3663,9 \text{ Вар}.$$

б) мощности, потребляемые нагрузкой:

- мощность сопротивления R_1 :

$$\underline{S}_1 = \dot{U}_1 \cdot \dot{I}_1^* = 74,67e^{-j39,8^\circ} \cdot 24,89e^{j39,8^\circ} = 1858,5e^{j0^\circ} = 1858,8 \text{ ВА};$$

$$P_1 = 1858,5 \text{ Вт}; Q_1 = 0$$

(нагрузка этого участка цепи носит активный характер);

- мощность участка цепи, содержащего активное сопротивление R_2 и индуктивность L_2 :

$$\underline{S}_2 = \dot{U}_{23} \cdot I_2^* = 159,31e^{j10,4^\circ} \cdot 35,64e^{j53^\circ} = 5677,8e^{j63,4^\circ} = 2542,3 + j5076,8VA;$$

$$P_2 = 2542,3W; Q_2 = 5076,8Var;$$

- мощность участка цепи, содержащего емкость C :

$$\underline{S}_3 = \dot{U}_{23} \cdot I_3^* = 153,31e^{j10,4^\circ} \cdot 12,74e^{-j100,4^\circ} = -j2029,6VA;$$

$$P_3 = 0; Q_3 = -2029,6Var$$

(нагрузка участка цепи емкостная);

- мощность участка цепи, содержащего индуктивность L_1 :

$$\underline{S}_4 = \dot{U}_4 \cdot I_1^* = 24,89e^{j50,2^\circ} \cdot 24,89e^{j39,8^\circ} = 619,5e^{j90^\circ} = j619,5VA;$$

$$P_4 = 0; Q_4 = 615,9Var$$

(нагрузка участка цепи индуктивная);

в) уравнение баланса мощностей:

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4;$$

$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{S}_4 = 1858,5 + 2542,3 + j5076,8 - j2029,6 + j619,5 =$$

$$= 4400,8 + j3666,7VA;$$

$$\underline{S} = 4397,6 + j3663,9VA.$$

Погрешность в расчетах не превышает 5%, следовательно, задача решена верно.

11. Модель заданной электрической цепи (рис. 38).

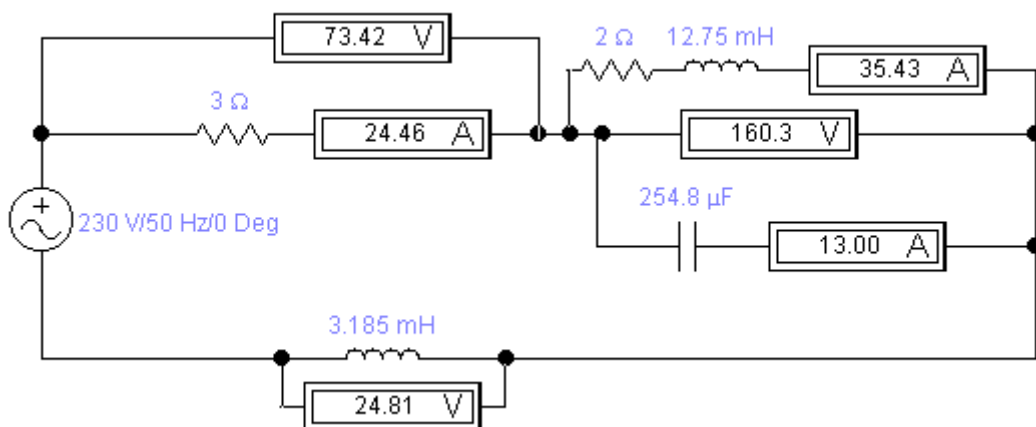


Рис. 38

Полученные при моделировании показания приборов немного отличаются от расчетных, так как измерительные приборы имеют внутренние сопротивления, которые моделирующая система учитывает.

ЦЕПИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Основные характеристики несинусоидальных периодических токов и напряжений

Большинство периодических функций, с которыми имеют дело в электротехнике и электронике, удовлетворяют условиям Дирихле, поэтому их можно представить в виде ряда Фурье:

$$e = E_0 + E_{m1} \sin(\omega_1 t + \Psi_{e1}) + E_{m2} \sin(2\omega_1 t + \Psi_{e2}) + \dots$$

$$u = U_0 + U_{m1} \sin(\omega_1 t + \Psi_{u1}) + U_{m2} \sin(2\omega_1 t + \Psi_{u2}) + \dots$$

$$i = I_0 + I_{m1} \sin(\omega_1 t + \Psi_{i1}) + I_{m2} \sin(2\omega_1 t + \Psi_{i2}) + \dots$$

где E_0 , U_0 , I_0 - постоянные составляющие несинусоидальных ЭДС, напряжения, тока;

E_{m1} , U_{m1} , I_{m1} - амплитуды гармоник ЭДС, напряжения, тока основной частоты;

E_{m2} , U_{m2} , I_{m2} - амплитуды гармоник ЭДС, напряжения, тока двойной и других кратных частот;

ω_1 - циклическая частота гармоник основной частоты;

Ψ_{u1} , Ψ_{u2} , Ψ_{e1} , Ψ_{e2} , Ψ_{i1} , Ψ_{i2} - начальные фазы гармоник основной и кратных частот напряжения, ЭДС, тока.

Действующее значение любой периодической функции – среднеквадра-

тичное значение: $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$, т.е.

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots + I_{km}^2}{2}} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2};$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + \dots + U_{km}^2}{2}} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2};$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + \frac{E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + \dots + E_{km}^2}{2}} = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_k^2}.$$

Таким образом, действующее значение периодического несинусоидального тока (напряжения, ЭДС) равно корню квадратному из суммы квадратов постоянной составляющей $I_0(U_0, E_0)$ и квадратов действующих значений всех гармонических составляющих $I_k(U_k, E_k)$.

Действующее значение несинусоидальных периодических величин не зависит от начальных фаз гармоник, а зависит только от их действующих значений (амплитуд).

Среднее значение периодической несинусоидальной величины (i, u, e) за период: $I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt; U_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt; E_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T e dt.$

Оно равно постоянной составляющей, так как суммарная площадь, ограниченная кривой за период любой гармонической составляющей, равна нулю.

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \Psi_2) + I_{3m} \sin(3\omega t + \Psi_3).$$

Сравнивать несинусоидальные периодические величины можно при помощи трех коэффициентов: формы k_ϕ , амплитуды k_a , искажения k_u .

$$k_\phi = \frac{I}{I_{cp}}; k_a = \frac{I_m}{I}; k_u = \frac{I_1}{I}.$$

где I_m, I_{cp}, I - амплитудное, среднее, действующее значения величины;

I_1 - действующее значение основной гармоники.

Мощность цепи несинусоидального тока

В линейных электрических цепях периодического несинусоидального тока рассматривают четыре вида мощностей: активную, реактивную, полную и

мощность искажений. Активная мощность – среднее значение мгновенной мощности ($p = ui$) за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k;$$

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots$$

Таким образом, активная мощность при несинусоидальном токе равна сумме активных мощностей отдельных гармоник и постоянной составляющей.

Реактивная мощность цепи несинусоидального тока равна сумме реактивных мощностей всех гармоник.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$

Полная мощность цепи несинусоидального тока равна произведению действующих значений несинусоидальных напряжения и тока: $S = UI$.

В цепях периодического несинусоидального тока $S^2 \neq P^2 + Q^2$. Поэтому вводится еще одна мощность - мощность искажений, которая определяется следующим образом: $T^2 = S^2 - (P^2 + Q^2)$.

Расчет электрической цепи с несинусоидальными ЭДС и токами

Расчет проводят методом наложения, при котором считается, что линейная электрическая цепь для каждой гармонической составляющей ЭДС независима. Состоит из трех этапов:

1. Разложение действующей в цепи ЭДС на гармонические составляющие.
2. Расчет токов и напряжений в цепи для каждой из гармонических составляющих ЭДС.
3. Суммирование решений, полученных для каждой составляющей.

Если $e = E_0 + E_{(1)m} \sin(\omega t + \Psi_{(1)}) + E_{(2)m} \sin(2\omega t + \Psi_{(2)}) = E_0 + e_{(1)} + e_{(2)}$, тогда $i = I_0 + i_{(1)} + i_{(2)}$.

При расчете электрической цепи следует учитывать, что емкостное сопротивление с увеличением порядка гармоники уменьшается в k - раз, а индуктивное сопротивление в k - раз увеличивается.

$$x_{C(k)} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{x_{C(1)}}{k}; \quad x_{L(k)} = k\omega L = kx_{L(1)}.$$

Активное сопротивление с ростом частоты за счет поверхностного эффекта возрастает, но при невысоких частотах можно считать его практически неизменным, равным сопротивлению постоянному току.

Пример расчет однофазной цепи периодического несинусоидального тока

Пример. На рис. 39 изображена схема цепи, параметры которой при основной частоте имеют $\omega_1 L = 12 \text{ Ом}$ и $\frac{1}{\omega_1 C} = 30 \text{ Ом}$, а активные сопротивления $R_1 = 6 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$. Приложенное к цепи напряжение изменяется по закону: $u = U_{(0)} + U_{m(1)} \cdot \sin \omega_1 t + U_{m(3)} \cdot \sin(3\omega_1 t + \psi_{(3)})$, где $U_{(0)} = 30 \text{ В}$, $U_{m(1)} = 100 \text{ В}$, $U_{m(3)} = 40 \text{ В}$, $\psi_{(3)} = 20^\circ$. Записать уравнение мгновенного значения

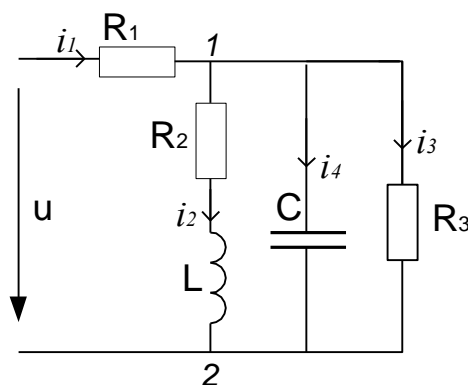


Рис. 39

тока в неразветвленном участке цепи. Определить действующее значение каждого тока.

1. Расчет постоянной составляющей. Так как при протекании постоянного тока индуктивность ведет себя как идеальный провод, а емкость - как разрыв, то эквивалентное сопротивление цепи и величины постоянного тока в неразветвленной части цепи и в ветвях с сопротивлениями R_2 и R_3 :

$$R_{(0)} = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 6 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 10 \text{ Ом};$$

$$I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_{(0)}} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А};$$

$$I_{2(0)} = I_{1(0)} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3 \cdot \frac{20}{5 + 20} = 2,4 \text{ А};$$

$$I_{3(0)} = I_{1(0)} - I_{2(0)} = 3 - 2,4 = 0,6 \text{ А}; \quad I_{4(0)} = 0.$$

2. Расчет для первой гармоники. Определим комплексные сопротивления трех параллельных ветвей:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{12(1)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{2(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{3(1)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{4(1)}} = \frac{1}{5 + j12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{-j30} = (79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3} \text{ См},$$

$$\text{отсюда } \underline{Z}_{12(1)} = \frac{1}{(79,6 - j37,7) \cdot 10^{-3}} = 11,4e^{j25,33^\circ} = 10,25 + j4,83 \text{ Ом}.$$

Комплексное сопротивление всей цепи:

$$\underline{Z}_{(1)} = R_1 + \underline{Z}_{12(1)} = 6 + 10,25 + j4,83 = 16,25 + j4,83 = 17e^{j16,5^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексные максимальные токи в неразветвленной части цепи, напряжения на параллельных ветвях и токи в них:

$$\dot{I}_{1m(1)} = \frac{\dot{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{100}{17e^{j16,5^\circ}} = 5,88e^{-j16,5^\circ} \text{ Ом};$$

$$\dot{U}_{12m(1)} = \dot{I}_{1m(1)} \cdot \underline{Z}_{12(1)} = 5,88e^{-j16,5^\circ} \cdot 11,4e^{j25,33^\circ} = 67e^{j8,83^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{I}_{2m(1)} = \frac{\dot{U}_{12m(1)}}{\underline{Z}_{2(1)}} = \frac{67e^{j8,83^\circ}}{5 + j12} = \frac{67e^{j8,83^\circ}}{13e^{j67,38^\circ}} = 5,15e^{j58,55^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{3m(1)} = \frac{U_{12m(1)}}{\underline{Z}_{3(1)}} = \frac{67e^{j8,83^\circ}}{20} = 5e^{j8,83^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{4m(1)} = \frac{U_{12m(1)}}{\underline{Z}_{4(1)}} = \frac{67e^{j8,83^\circ}}{-j30} = \frac{67e^{j8,83^\circ}}{30e^{-j90^\circ}} = 2,23e^{j98,83^\circ} \text{ A}.$$

3. Расчет для третьей гармоники производится аналогично расчету для первой (основной) гармоники.

$$\underline{Z}_{1(3)} = 6 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{2(3)} = j3\omega L = 3 + j36 = 36,5e^{j82,09^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = 20 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{4(3)} = -j\frac{1}{3\omega C} = -j\frac{30}{3} = -j10 \text{ Ом};$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{12(3)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{2(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{3(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{4(3)}} = \frac{1}{5 + j36} + \frac{1}{20} + \frac{1}{-j10} = (53,77 + j72,8) \cdot 10^{-3} \text{ См};$$

$$\underline{Z}_{12(3)} = \frac{1}{(53,77 + j72,8) \cdot 10^{-3}} = 11,05e^{-j53,58^\circ} = 6,56 - j8,9 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(3)} = R_1 + \underline{Z}_{12(3)} = 6 + 6,56 - j8,9 = 12,56 - j8,9 = 15,35e^{-j35,08^\circ} \text{ Ом};$$

$$\dot{I}_{1m(3)} = \frac{U_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{40e^{j20^\circ}}{15,35e^{-j35,08^\circ}} = 2,6e^{j55,08^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{U}_{12m(3)} = \dot{I}_{1m(3)} \cdot \underline{Z}_{12(3)} = 2,6e^{j55,08^\circ} \cdot 11,05e^{-j53,58^\circ} = 28,7e^{j1,5^\circ} \text{ В};$$

$$\dot{I}_{2m(3)} = \frac{U_{12m(3)}}{\underline{Z}_{2(3)}} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{5 + j36} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{36,5e^{j82,08^\circ}} = 0,79e^{-j80,58^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{3m(3)} = \frac{U_{12m(3)}}{\underline{Z}_{3(3)}} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{20} = 1,44e^{j1,5^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_{4m(3)} = \frac{U_{12m(3)}}{\underline{Z}_{4(3)}} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{-j10} = \frac{28,7e^{j1,5^\circ}}{10e^{-j90^\circ}} = 2,87e^{j91,5^\circ} \text{ A}.$$

4. Уравнение тока в неразветвленной части цепи:

$$i_1 = 3 + 5,88 \cdot \sin(\omega t - 16,5^\circ) + 2,6 \cdot \sin(3\omega t + 55,08^\circ) \text{ A}.$$

5. Действующее значение каждого тока:

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + \frac{I_{1m(1)}^2 + I_{1m(3)}^2}{2}} = \sqrt{3^2 + \frac{5,88^2 + 2,6^2}{2}} = 5,45 \text{ A};$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + \frac{I_{2m(1)}^2 + I_{2m(3)}^2}{2}} = \sqrt{2,4^2 + \frac{5,15^2 + 0,79^2}{2}} = 4,4 \text{ A};$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + \frac{I_{3m(1)}^2 + I_{3m(3)}^2}{2}} = \sqrt{0,6^2 + \frac{3,35^2 + 1,44^2}{2}} = 2,64 \text{ A};$$

$$I_4 = \sqrt{I_{4(0)}^2 + \frac{I_{4m(1)}^2 + I_{4m(3)}^2}{2}} = \sqrt{0 + \frac{2,23^2 + 2,87^2}{2}} = 2,57 \text{ A}.$$

6. Средствами моделирующего пакета Electronics Workbench собирается схема рис. 40 снимается осциллограмма тока в неразветвленной части цепи (рис. 41).

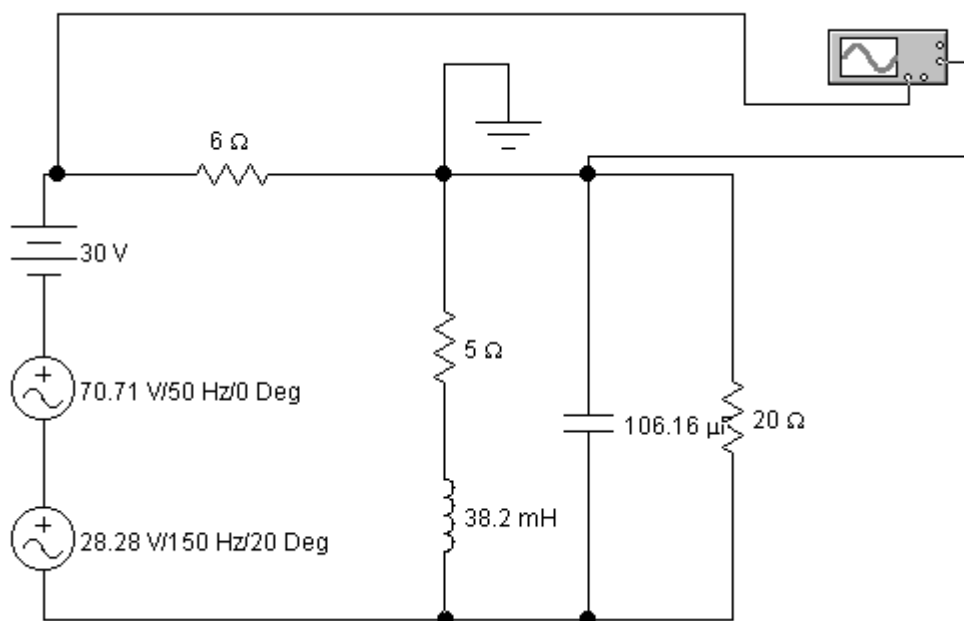


Рис. 40

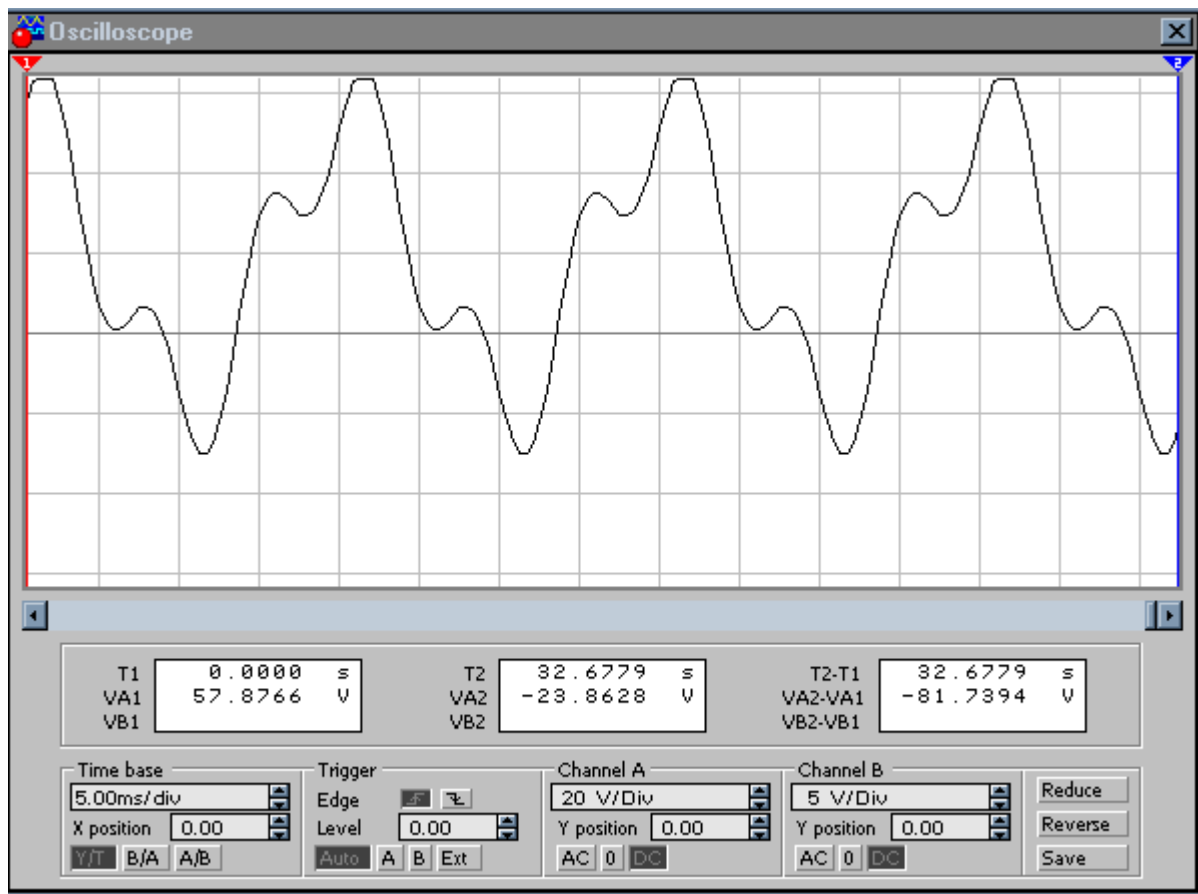


Рис. 41

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Переходный процесс – процесс перехода от одного устойчивого режима работы электрической цепи к другому, чем-либо отличающемуся от предыдущего. Возникает вследствие включения или отключения пассивных или активных ветвей, коротких замыканий отдельных участков, различного рода переключений, внезапного изменения параметров и т.д., которые называются коммутациями.

Переходные процессы заканчиваются спустя некоторое время после коммутации.

Начало отсчета времени переходного процесса $t=0$ начинается с момента коммутации (рис. 42). Момент времени непосредственно перед коммутацией – $t=0-$, сразу после коммутации – $t=0+$.

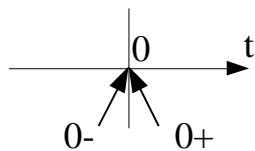


Рис. 42

Цель расчета переходного процесса – в определении законов изменения токов и напряжений во время коммутации.

Законы коммутации

Расчет переходного процесса производится на основании двух законов коммутации:

1. Ток через индуктивность непосредственно до коммутации равен току через ту же индуктивность непосредственно после коммутации, или ток на индуктивности не может изменяться скачком. $i_L(0-) = i_L(0+)$.

Рассмотрим электрическую схему, приведенную на рис. 43.

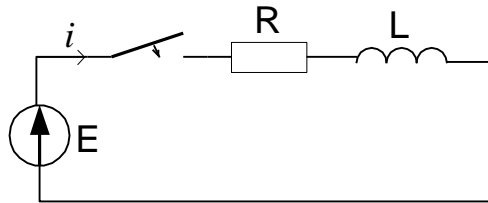


Рис. 43

По II закону Кирхгофа $E = u_R + u_L$.

$$u_R = R \cdot i; \quad u_L = L \frac{di}{dt};$$

$$E = R \cdot i + L \frac{di}{dt}.$$

Пусть ток во время переходного процесса изменится скачком, т.е. за время $\Delta t \rightarrow 0$ ток изменится на конечную величину Δi ($i(0+) - i(0-) = \Delta i$). Величина

на $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ бесконечно большая, а т.к. $\frac{di}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta t}$, то $L \frac{di}{dt} = \infty$.

По II закону Кирхгофа $E = R \cdot i + \infty$, а E — конечная величина, следовательно, не соблюдается II закон Кирхгофа, и предположение о том, что ток, протекающий через индуктивность, может измениться скачком, неверно. Первый закон коммутации (ток, протекающий через индуктивность, скачком измениться не может) доказан.

2. Напряжение на емкости непосредственно до коммутации равно напряжению на той же емкости непосредственно после коммутации, или напряжение на емкости не может измениться скачком. $U_C(0-) = U_C(0+)$.

Рассмотрим электрическую цепь рис. 44.

По II закону Кирхгофа $E = u_R + u_C$.

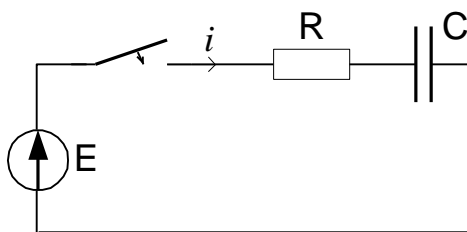


Рис. 44

$$i = C \frac{du_c}{dt}; E = RC \frac{du_c}{dt} + u_c.$$

Пусть во время переходного процесса падение напряжения на конденсаторе изменится скачком, т.е. за время $\Delta t \rightarrow 0$ оно изменится на конечную величину Δu_c ($u_c(0+) - u_c(0-) = \Delta u_c$). Тогда $\frac{\Delta u_c}{\Delta t}$ - величина бесконечно большая,

$$\frac{du_c}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u_c}{\Delta t} = \infty.$$

По II закону Кирхгофа $E = R \cdot C \cdot \infty + u_c$. Т.к. E - конечная величина, то II закон Кирхгофа не соблюдается. Предположение неверно. Второй закон коммутации доказан.

Независимые и зависимые начальные условия

Для любой схемы электрической цепи после коммутации в ней можно записать уравнения по законам Кирхгофа, из них определить значения токов во всех ветвях и напряжения на любых участках цепи в первый момент после коммутации ($t=0+$). Эти значения токов и напряжений являются начальными условиями.

Начальные условия делятся на независимые и зависимые. Значения тока, протекающего через индуктивность $i_L(0+)$, и напряжения на емкости $u_C(0+)$ - независимые начальные условия. Они определяются из законов коммутации:

$i_L(0-) = i_L(0) = i_L(0+)$ и $u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+)$. Значения остальных токов и напряжений в первый момент после коммутации - зависимые начальные условия. Они определяются из законов Кирхгофа и известных независимых начальных условий.

Характеристическое уравнение электрической цепи

Характеристическое уравнение электрической цепи составляется для послекоммутационного режима и определяется конфигурацией схемы.

По схеме электрической цепи можно сразу определить степень характеристического уравнения – она равна числу независимых начальных условий (токов, протекающих через индуктивность, и напряжений на емкости) в послекоммутационной схеме и не зависит от вида источников ЭДС в цепи.

Мы будем рассматривать переходные процессы, возникающие в цепях постоянного тока, содержащих либо одну индуктивность, либо одну емкость.

Способов составления характеристического уравнения несколько, наиболее распространенный из которых основан на записи входного сопротивления цепи переменному току:

Записывается входное сопротивление переменному току электрической цепи после коммутации $\underline{Z}(j\omega)$;

Заменяется в нем $j\omega$ на p и полученное выражение приравнивается к нулю. Получается характеристическое уравнение $\underline{Z}(p) = 0$;

Находятся корни этого характеристического уравнения p . $[p] = c^{-1}$.

В качестве примера составим характеристическое уравнение и найдем его корни для электрической цепи рис. 44.

$$\underline{Z}(j\omega) = R - j\frac{1}{\omega C} = R + \frac{1}{j\omega C};$$

$$\underline{Z}(p) = R + \frac{1}{pC} = 0; \quad pCR + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{RC}.$$

Классический метод расчета переходных процессов

Классическим называют метод расчета переходных процессов, в котором решение дифференциального уравнения представляет собой сумму принужденной и свободной составляющей.

Порядок решения задач классическим методом:

Для цепи после коммутации составить систему дифференциальных уравнений по I и II законам Кирхгофа.

Определить независимые начальные условия (u_C и i_L) из расчета режима цепи до коммутации с применением законов коммутации.

Записать искомые величины в виде суммы принужденных и свободных составляющих.

Найти принужденные составляющие, рассчитав установившийся режим цепи после коммутации.

Составить характеристическое уравнение и вычислить его корни.

В зависимости от вида корней характеристического уравнения записать свободные составляющие и искомые решения в общем виде.

Для определения постоянных интегрирования записать искомые величины, их производные и систему дифференциальных уравнений для момента $t=0$.

Подставить вычисленные постоянные интегрирования в искомые решения.

Построить графики изменения токов и напряжений во время переходного процесса.

Переходные процессы в RL-цепях постоянного тока

Пусть катушка индуктивности включается на постоянное напряжение (рис. 45). Определить законы изменения тока и падений напряжений на индуктивности и резисторе во время переходного процесса.

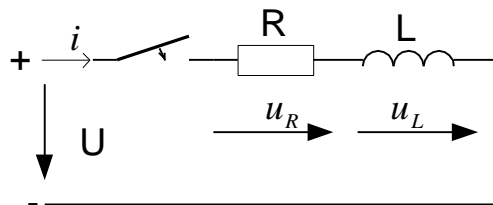


Рис. 45

По II закону Кирхгофа для послекоммутационной схемы: $U = u_R + u_L$.

$$u_R = R \cdot i; u_L = L \frac{di}{dt}; U = R \cdot i + L \frac{di}{dt}.$$

Ток переходного процесса будем искать в виде суммы принужденной и свободной составляющих. Для нахождения принужденной составляющей тока необходимо рассчитать установившийся режим после коммутации. $i_{np} = \frac{U}{R}$, т.к. в установившемся режиме при протекании постоянного тока индуктивность ведет себя как идеальный провод, падения напряжения на ней не происходит.

Характеристическое уравнение: $Lp + R = 0$; его корень $p = -\frac{R}{L}$.

Свободную составляющую тока будем искать в виде: $i_{ce} = Ae^{pt}$, где A – постоянный коэффициент, определяющийся из начальных условий.

$$i = \frac{U}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

По первому закону коммутации: $i(0+) = i(0-) = 0$, т.к. до коммутации цепь была отключена от источника ЭДС. Отсюда $i(0+) = \frac{U}{R} + A = 0$; $A = -\frac{U}{R}$.

Тогда ток через индуктивность во время переходного процесса будет изменяться по закону: $i = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$ (рис. 46).

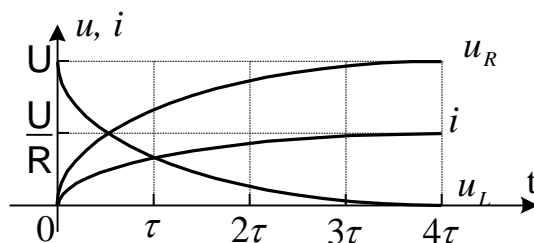


Рис. 46

Обозначим $-\frac{1}{p} = \tau$ - постоянная времени, которая определяет скорость изменения тока или напряжения во время переходного процесса. Для данной электрической цепи $\tau = \frac{L}{R}$. Единицы измерения постоянной времени:

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{Гн}}{\text{Ом}} = \frac{\text{Ом} \cdot \text{с}}{\text{Ом}} = \text{с}.$$

Доказано, что за время $(4 \dots 5)\tau$ переходный процесс полностью затухает, в цепи наступает установившийся режим.

Падение напряжения на резисторе: $u_R = i \cdot R = U - Ue^{-\frac{R}{L}t}$ (см. рис. 46).

Падение напряжения на индуктивности:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L \left(-\frac{R}{L}\right) \left(-\frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}\right) = U e^{-\frac{R}{L}t} \text{ (см. рис. 46).}$$

Примечание. При построении графиков функций вида $y = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ следует иметь ввиду следующие соотношения:

t	0	τ	2τ	3τ	4τ	5τ
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0,367	0,135	0,050	0,018	0,007

Заряд и разряд конденсатора

Рассмотрим электрическую цепь рис. 47, в которой ключ может замыкаться в два положения.

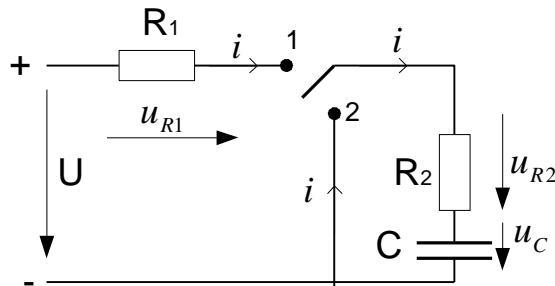


Рис. 47

1. Ключ замыкается в положение 1. До коммутации напряжения на конденсаторе не было: $u_C(0-) = 0$.

По II закону Кирхгофа:

$$u_{R1} + u_{R2} + u_C = U.$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_{R1} = iR_1; \quad u_{R2} = iR_2.$$

$$(R_1 + R_2)C \frac{du_C}{dt} + u_C = U.$$

Напряжение на конденсаторе во время переходного процесса ищем как сумму принужденной и свободной составляющих: $u_C = u_{Cnp} + u_{Cсв}$.

Принужденная составляющая: $u_{Cnp} = U$.

Свободная составляющая $u_{Cсв} = Ae^{pt}$, где A – постоянный коэффициент, определяется из начальных условий, p – корень характеристического уравнения:

$$R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp} = 0; \quad (R_1 + R_2)Cp + 1 = 0; \quad p = -\frac{1}{(R_1 + R_2)C}. \quad \text{Тогда}$$

$$u_C = U + Ae^{-\frac{1}{(R_1 + R_2)C}t}.$$

Для определения постоянного коэффициента воспользуемся II законом коммутации: $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$. $u_C(0+) = U + A = 0$; $A = -U$.

Тогда падение напряжения на конденсаторе во время переходного процесса изменяется по закону: $u_C = U - Ue^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$ (рис. 48).

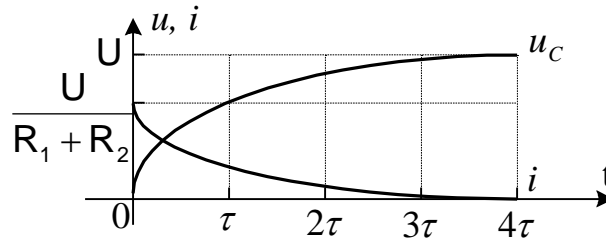


Рис. 48

Ток через конденсатор:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = C \left(-\frac{1}{(R_1 + R_2)C} \right) (-U) e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}}$$

2. Конденсатор заряжен до напряжения, равного приложенному ($U_C = U$). Ключ замыкается в положение 2 (см. рис. 47).

По II закону Кирхгофа для послекоммутационной схемы: $u_{R_2} + u_C = 0$.

$$i = C \frac{du_C}{dt}; R_2 C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0.$$

Напряжение на конденсаторе во время переходного процесса будем искать как сумму свободной и принужденной составляющих: $u_C = u_{Cсв} + u_{Cпр}$.

Принужденная составляющая напряжения будет равна нулю ($u_{Cпр} = 0$), т.к. переходный процесс будет протекать до тех пор, пока конденсатор полностью не разрядится.

Свободная составляющая напряжения на конденсаторе: $u_{Cсв} = Ae^{pt}$.

Характеристическое уравнение для послекоммутационной схемы и его корень:

$$R_2 + \frac{1}{pC} = 0; R_2 Cp + 1 = 0; p = -\frac{1}{R_2 C}.$$

Тогда свободная составляющая напряжения на конденсаторе будет иметь вид: $u_C = Ae^{-\frac{t}{R_2C}}$, где A – постоянный коэффициент, определяется из начальных условий.

Для определения начальных условий воспользуемся II законом коммутации: $u_C(0+) = u_C(0-) = U$. Отсюда $u_C(0+) = A = U$ и напряжение на конденсаторе во время переходного процесса будет изменяться по закону (рис. 49):

$$u_C = Ue^{-\frac{t}{R_2C}}.$$

Ток, протекающий через конденсатор во время переходного процесса (ток разрядки конденсатора):

$$i = C(-\frac{1}{R_2C})Ue^{-\frac{t}{R_2C}} = -\frac{U}{R_2}e^{-\frac{t}{R_2C}}.$$

Ток разрядки конденсатора отрицательный, т.к. он направлен противоположно току зарядки конденсатора.

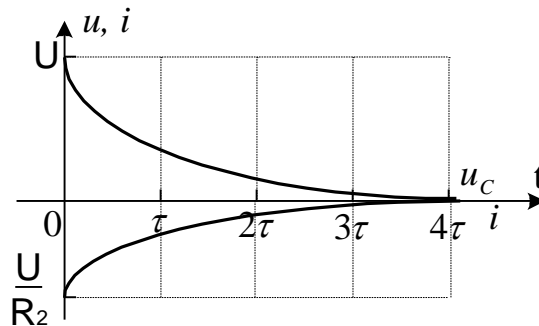


Рис. 49

Примеры расчета переходных процессов

Расчет переходных процессов в цепях, содержащих активное сопротивление и индуктивность

Пример. Для цепи рис. 50. известно: напряжение $U = 30\text{В}$, сопротивления $R = 10\text{Ом}$, $R_1 = 5\text{Ом}$, $R_2 = 30\text{Ом}$, индуктивность $L = 2\text{Гн}$. Найти законы изменения во времени всех токов и напряжений (до коммутации в цепи был устано-

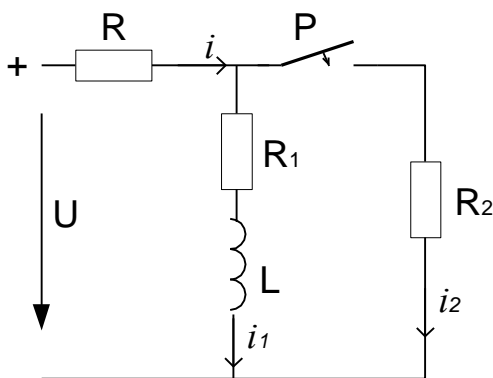


Рис. 50

вившийся режим). Построить кривые измерения этих величин.

Решение.

1. Расчет цепи в установившемся режиме до коммутации (определение независимых начальных условий).

$$i_1(0-) = i(0-) = \frac{U}{R + R_1} = \frac{30}{10 + 5} = 2\text{А}$$

(до коммутации ключ Р разомкнут, ток через сопротивление R_2 не протекает).

2. Токи в ветвях, определяются как суммы свободных и принужденных составляющих:

$$i = i_{св} + i_{np}; \quad i_1 = i_{1св} + i_{1np}; \quad i_2 = i_{2св} + i_{2np}.$$

3. Для определения принужденных составляющих необходимо рассчитать электрическую цепь в установившемся режиме после коммутации.

$$i_{np} = \frac{U}{R + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{30}{10 + \frac{5 \cdot 30}{5 + 30}} = 2,1\text{А};$$

$$u_{12np} = U - i_{np} \cdot R = 30 - 2,1 \cdot 10 = 9\text{В};$$

$$i_{1np} = \frac{u_{12np}}{R_1} = \frac{9}{5} = 1,8\text{А};$$

$$i_{2np} = \frac{u_{12np}}{R_2} = \frac{9}{30} = 0,3 \text{ А.}$$

4. Свободные составляющие токов находятся в виде:

$i_{ce} = Ae^{pt}$; $i_{1ce} = A_1e^{pt}$; $i_{2ce} = A_2e^{pt}$, где p - корень характеристического уравнения.

5. Характеристическое уравнение цепи:

$$Z(p) = R + \frac{(R_1 + pL) \cdot R_2}{R_1 + pL + R_2} = 10 + \frac{(5 + p \cdot 2) \cdot 30}{5 + p \cdot 2 + 30} = 10 + \frac{150 + 60p}{35 + 2p} = 0.$$

Определение корня характеристического уравнения:

$$10 + \frac{150 + 60p}{35 + 2p} = 0;$$

$$350 + 20p + 150 + 60p = 0;$$

$$500 + 80p = 0;$$

$$p = -6,25 \text{ с}^{-1}.$$

6. Для определения постоянного коэффициента A_1 воспользуемся первым законом коммутации: ток через индуктивность в первый момент после коммутации равен току через эту же индуктивность в последний момент перед коммутацией (ток на индуктивности скачком измениться не может).

$$i_1(0-) = i_1(0) = i_1(0+).$$

$$i_1 = i_{1ce} + i_{1np} = A_1e^{pt} + i_{1np};$$

$$i_1(0) = i_{1ce}(0) + i_{1np} = A_1 + 1,8 = 2 \text{ А};$$

$$A_1 = 2 - 1,8 = 0,2 \text{ А.}$$

7. Ток, протекающий через индуктивность, во время переходного процесса изменяется по закону:

$$i_1 = 0,2e^{-6,25t} + 1,8 \text{ А.}$$

8. Падение напряжения на индуктивности определяется по закону электромагнитной индукции:

$$u_L = L \frac{di_1}{dt} = 2 \cdot \frac{d(0,2e^{-6,25t} + 1,8)}{dt} = 2 \cdot 0,2 \cdot (-6,25)e^{-6,25t} = -2,5e^{-6,25t} \text{ В.}$$

9. Остальные токи и падения напряжений определяются по законам Ома и Кирхгофа.

$$u_{R_1} = i_1 \cdot R_1 = (0,2e^{-6,25t} + 1,8) \cdot 5 = 1e^{-6,25t} + 9 \text{ В;}$$

$$u_{12} = u_L + u_{R_1} = -2,5e^{-6,25t} + 1e^{-6,25t} + 9 = -1,5e^{-6,25t} + 9 \text{ В;}$$

$$i_2 = \frac{u_{12}}{R_2} = \frac{-1,5e^{-6,25t} + 9}{30} = -0,05e^{-6,25t} + 0,3 \text{ А;}$$

$$i = i_1 + i_2 = 0,2e^{-6,25t} + 1,8 - 0,05e^{-6,25t} + 0,3 = 0,15e^{-6,25t} + 2,1 \text{ А.}$$

10. Для определения зависимостей токов и напряжений от времени (временных диаграмм токов и напряжений) средствами пакета Electronics Workbench собирается схема, приведенная на рис. 51. Осциллограф – прибор, измеряющий напряжение, поэтому он подключается параллельно резисторам, ток через который определяется. Кривая тока, протекающего через резистор, совпадает по форме с кривой падения напряжения на этом резисторе, изменяется только масштаб.

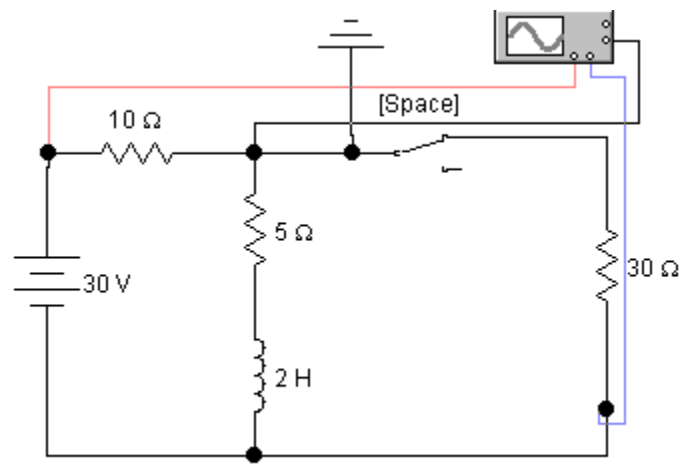
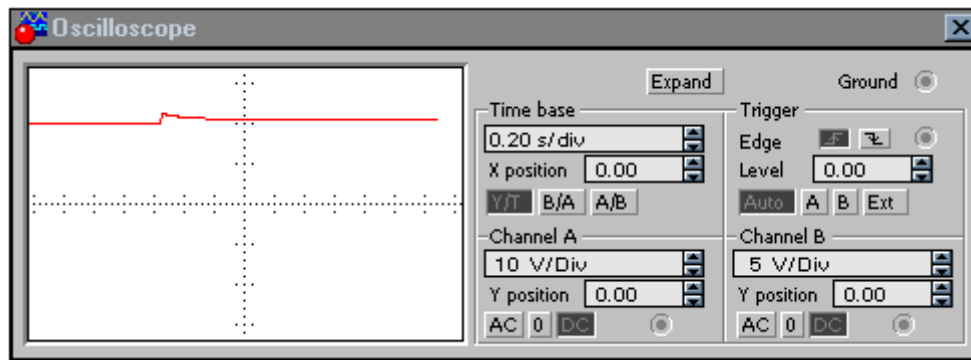
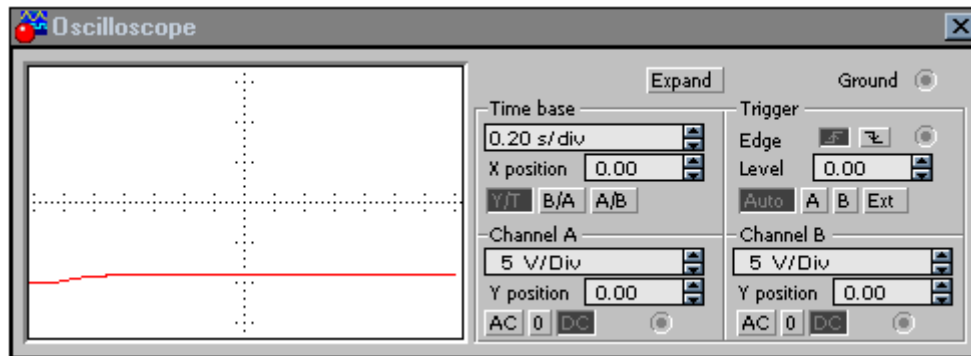


Рис. 51

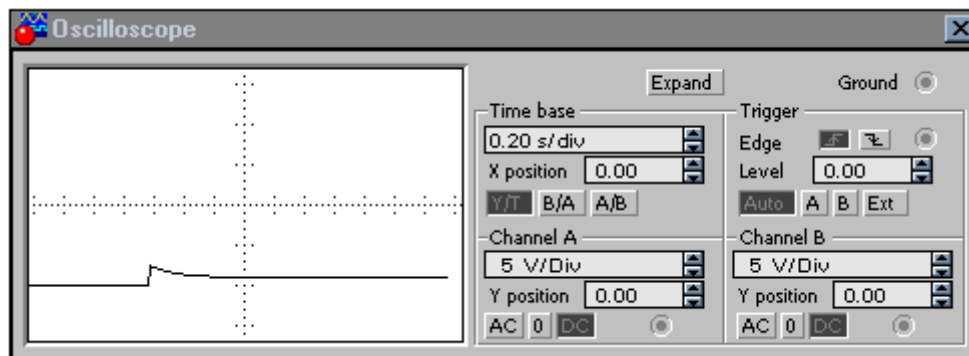
Осциллограммы тока в неразветвленной части цепи i приведена на рис. 52а (масштаб по оси ординат для тока – 1 А/дел), для тока i_1 – на рис. 52б (масштаб для тока - 1 А/дел), для тока i_2 – на рис. 52в (масштаб для тока - 0,166 А/дел).



а)



б)



в)

Рис. 52

Расчет переходных процессов в цепях, содержащих активное сопротивление и емкость

Пример. Для цепи рис. 53 известно: ЭДС источника $E = 120$ В, сопротивления $R_1 = R_2 = 250$ Ом, $R_3 = 500$ Ом, емкость конденсатора $C = 10$ мкФ. Найти законы изменения во времени всех токов и напряжений (до коммутации в цепи был установившийся режим). Построить кривые измерения этих величин.

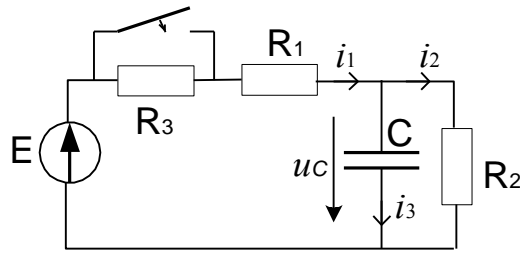


Рис. 53

Решение.

1. Расчет токов и напряжений в установившемся режиме до коммутации ($t=0-$):

$$i_3(0-) = 0;$$

$$i_1(0-) = i_2(0-) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{120}{250 + 250 + 500} = 0,12 \text{ A};$$

$$u_C(0-) = R_2 i_2(0-) = 250 \cdot 0,12 = 30 \text{ В}.$$

2. Токи и напряжения определяются как суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i_1(t) = i_{1np} + i_{1св};$$

$$i_2(t) = i_{2np} + i_{2св};$$

$$i_3(t) = i_{3np} + i_{3св};$$

$$u_C(t) = u_{Cnp} + u_{Cсв}.$$

3. Принужденные составляющие токов и напряжений определяются из расчета установившегося режима после коммутации:

$$i_{3np} = 0;$$

$$i_{1np} = i_{2np} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{250 + 250} = 0,24 \text{ A};$$

$$u_{Cnp} = i_{2np} R_2 = 0,24 \cdot 250 = 60 \text{ В}.$$

4. Характеристическое уравнение для послекоммуникационного режима:

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_1 R_2 + \frac{1}{pC} \cdot R_1 + R_2 \cdot \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{CpR_1 R_2 + R_1 + R_2}{R_2 Cp} = 0;$$

$$CpR_1 R_2 + R_1 + R_2 = 0;$$

$$p = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} = -\frac{250 + 250}{10^{-5} \cdot 250 \cdot 250} = -800 \text{ с}^{-1}.$$

$$5. \text{ Свободные составляющие: } i_{1_{св}} = D_1 e^{pt}; \quad i_{2_{св}} = D_2 e^{pt}; \quad i_{3_{св}} = D_3 e^{pt};$$

$u_{C_{св}} = D_C e^{pt}$, где D_1, D_2, D_3, D_C - постоянные коэффициенты. Тогда искомые токи и напряжение будут иметь вид:

$$i_1(t) = 0,24 + D_1 e^{pt};$$

$$i_2(t) = 0,24 + D_2 e^{pt};$$

$$i_3(t) = D_3 e^{pt};$$

$$u_C(t) = 60 + D_C e^{pt}.$$

6. Для определения постоянных коэффициентов необходимо рассмотреть токи и напряжения в момент переходного процесса, т.е. в момент $t = 0$.

$$i_1(0) = 0,24 + D_1;$$

$$i_2(0) = 0,24 + D_2;$$

$$i_3(0) = D_3;$$

$$u_C(0) = 60 + D_C.$$

а) по II закону коммутации напряжение на емкости не может измениться скачком, т.е. $u_C(0-) = u_C(0+) = u_C(0) = 30 \text{ В}$.

$$u_C(0) = 30 = 60 + D_C; \quad D_C = -30 \text{ В};$$

$$u_C(t) = 60 - 30e^{-800t} \text{ В}.$$

б) по закону Ома $i_2(0)R_2 = u_C(0)$ (резистор R_2 включен параллельно емкости C):

$$i_2(0) = \frac{u_C(0)}{R_2} = \frac{30}{250} = 0,12 \text{ А};$$

$$i_2(0) = 0,24 + D_2 = 0,12; \quad D_2 = -0,12 \text{ A};$$

$$i_2(t) = 0,24 - 0,12e^{-800t} \text{ A}.$$

в) по II закону Кирхгофа для послекоммутационной схемы:

$$i_1(0)R_1 + u_C(0) = E.$$

$$i_1(0) = \frac{E - u_C(0)}{R_1} = \frac{120 - 30}{250} = 0,36 \text{ A};$$

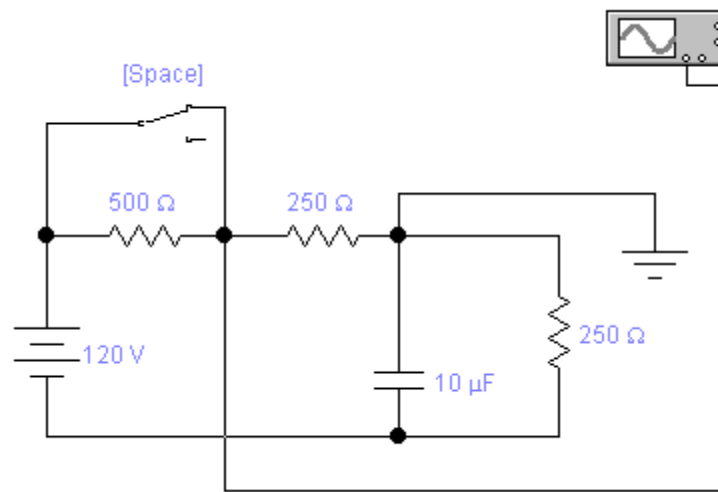
$$i_1(0) = 0,24 + D_1 = 0,36 \text{ A}; \quad D_1 = 0,12 \text{ A};$$

$$i_1(t) = 0,24 + 0,12e^{-800t} \text{ A}.$$

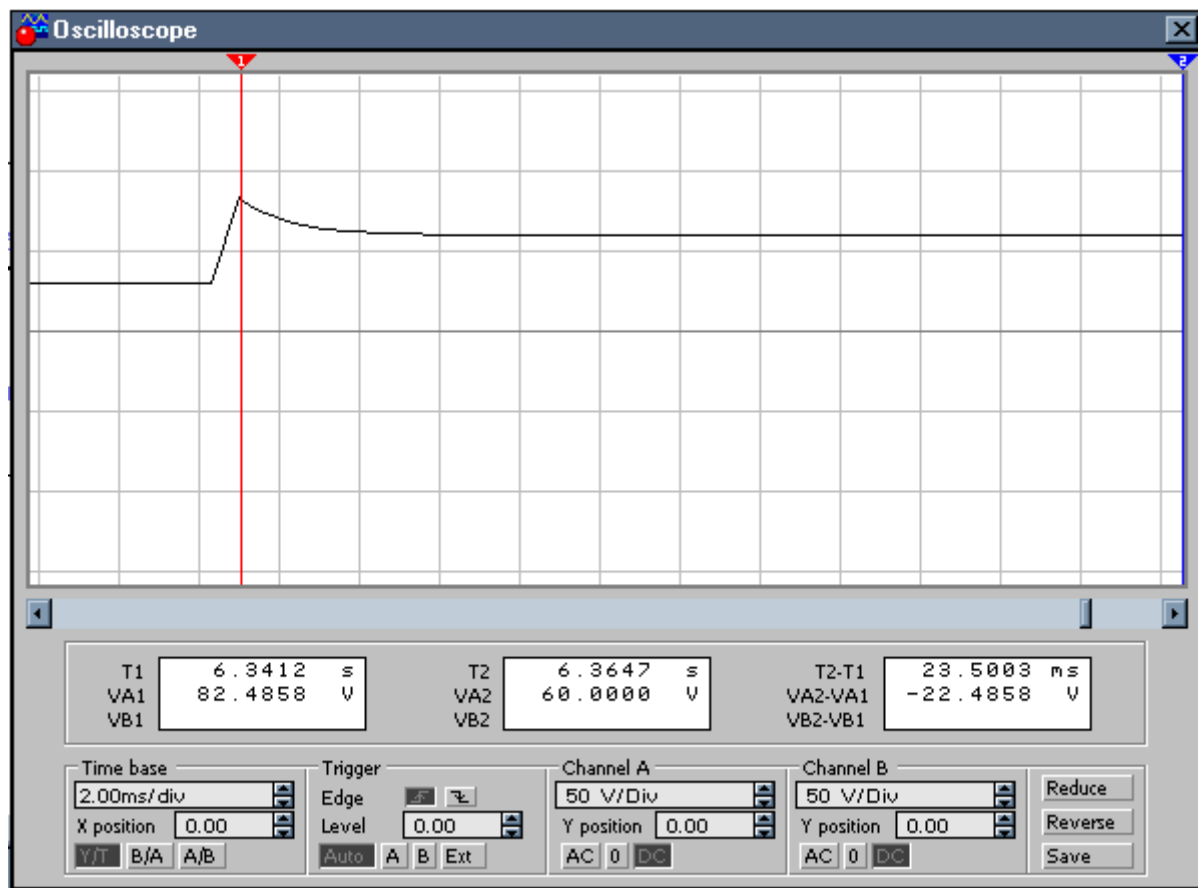
г) ток, протекающий через емкость:

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-5} \frac{d}{dt} (60 - 30e^{-800t}) = 10^{-5} \cdot (-30) \cdot (-800)e^{-800t} = 0,24e^{-800t} \text{ A}.$$

На рис. 54 показаны схема для исследования переходного процесса в данной цепи и осциллограмма тока i_1 (масштаб тока $50/250=0,2 \text{ A/дел}$).



а)



б)

Рис. 54

ЛИТЕРАТУРА

Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учеб. Для электротехн., энерг., приборостр. спец. вузов - 9 изд., перераб. и доп. - М.: Высш. шк., 1996. - 638 с.

Карлащук В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение. – М.: Солон-Р, 2000. – 503 с.

Контрольные задания по курсу «Компьютерное моделирование электронных устройств» / Сост. А.О. Прокубовская, Д.Б. Ченчик. - Екатеринбург, 2001. – 23 с.

Панфилов Д.И., Иванов В.С., Чепурин И.Н. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях: Практикум на Electronics Workbench: в 2 т. / Под общей ред. Д.И. Панфилова – Т. 1: Электротехника. – М.: ДОДЭКА, 1999. – 304 с.

Панфилов Д.И., Иванов В.С., Чепурин И.Н. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях: Практикум на Electronics Workbench: в 2 т. / Под общей ред. Д.И. Панфилова – Т. 2: Электроника. – М.: ДОДЭКА, 1999. – 288 с.