

539.3(07)

У - 91

МИНОБРНАУКИ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования**

**«МАЙКОПСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

Факультет технологический

Кафедра строительных и общепрофессиональных дисциплин

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»**

**Для студентов технических специальностей и направлений
подготовки очной и заочной форм обучения**

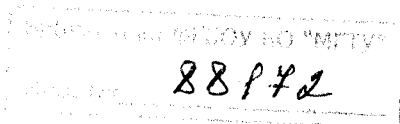
**МАЙКОП
2015**

УДК 539.3 (07)

ББК 30.121

У – 91

90+



Рекомендовано к печати на заседании бюро научно-технического совета ФГБОУ ВПО «МГТУ» протокол № 2 от 29 июня 2015 года.

Рецензенты:

Канд. техн. наук Татаренко А.П., канд. техн. наук Дурдыкулиев А.К.

У 91 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ по дисциплине «Соппротивление материалов» для студентов технических специальностей и направлений подготовки очной и заочной форм обучения / Сост.: Н.Н. Саенко, Н.В. Стерехова. – Майкоп: ИП Магарин О.Г., 2015. – 107 с.



Содержит элементы теории курса «Соппротивления материалов», необходимые для понимания и освоения принципов решения типовых задач. В данном пособии рассмотрены примеры решения задач по темам курса, таким как растяжение (сжатие); сдвиг и кручение; геометрические характеристики поперечных сечений; прямой поперечный изгиб; сложное сопротивление (косой изгиб, внецентренное растяжение и сжатие; расчет по теориям прочности); динамическое действие нагрузки, расчет элементов конструкций по несущей способности и др., а также даны задачи для самостоятельной работы и закрепления знаний студентами по каждой теме.

УДК 539.3 (07)

ББК 30.121

© Сост.: Н.Н. Саенко, Н.В. Стерехова, 2015

Содержание

Предисловие.....	5
Тема 1. Растяжение и сжатие.....	6
1.1. Статически определимые задачи при растяжении и сжатии.....	7
1.2. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии.....	12
Тема 2. Сдвиг и кручение.....	18
2.1. Понятие сдвига. Расчет болтовых и заклепочных соединений.....	18
2.2. Кручение стержня с круглым поперечным сечением.....	23
Тема 3. Геометрические характеристики поперечных сечений.....	31
Тема 4. Прямой поперечный изгиб.....	39
4.1. Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержня при изгибе. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	39
4.2. Определение напряжений, подбор сечений и проверка прочности балки при прямом поперечном изгибе.....	43
Тема 5. Перемещения при изгибе. Определение перемещений методом интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки.....	50
Тема 6. Определение перемещений при помощи интегралов Мора. Способ Верещагина.....	53
Тема 7. Простейшие статически неопределимые системы при изгибе.....	60
Тема 8. Сложное сопротивление.....	67
8.1. Косой изгиб.....	67
8.2. Внецентренное растяжение и сжатие.....	71
8.3. Расчет по III и IV теориям прочности. Совместное действие кручения и изгиба.....	79

Тема 9. Устойчивость сжатых стержней.....	85
Тема 10. Динамические нагрузки. Расчет элементов конструкций, движущихся с ускорением.....	90
Тема 11. Ударное действие нагрузки.....	94
Тема 12. Работа конструкции в упругопластической зоне. Расчет по несущей способности.....	99
Тема 13. Оболочки. Безмоментная теория расчета симметричных оболочек.....	103
Использованная литература.....	107

Предисловие.

Данное учебно-методическое пособие призвано помочь студентам в освоении дисциплины «Сопротивление материалов», представляющей собой одну из базовых дисциплин инженерно-технического образования.

Пособие построено таким образом, что его практическая часть дается в неразрывной связи с теоретическим курсом. Оно содержит элементы теории курса «Сопротивления материалов», необходимые для понимания и освоения принципов решения типовых задач. В данном пособии рассмотрены примеры решения задач по темам курса, таким как растяжение (сжатие); сдвиг и кручение; геометрические характеристики поперечных сечений; прямой поперечный изгиб; сложное сопротивление (косой изгиб, внецентренное растяжение и сжатие; расчет по теориям прочности); динамическое действие нагрузки, расчет элементов конструкций по несущей способности и др., а также даны задачи для самостоятельной работы и закрепления знаний студентами по каждой теме.

Теоретическая часть и задачи снабжены необходимыми схемами и рисунками, облегчающими восприятие материала и решение задач.

Тема 1. Растяжение и сжатие.

Под *растяжением (сжатием)* понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные силы, а все прочие силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающие моменты) равны нулю.

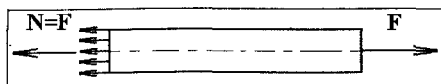


Рис. 1.1.

Нормальное напряжение для всех точек сечения будет одним и тем же:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1.1)$$

где A — площадь поперечного сечения, м^2 .

В пределах малых удлинений справедлив закон Гука, который устанавливает прямо пропорциональную связь между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (1.2)$$

Величина E - коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости первого рода*. Модуль упругости является физической константой материала и определяется экспериментально. Величина E измеряется в тех же единицах, что и σ , т.е. в Па, но его предпочитают измерять в мега и гигапаскалях.

В частном случае стержня постоянной жесткости ($EA = \text{const}$), и если стержень нагружен только по концам, т.е. $N=F$:

$$\Delta l = \frac{NL}{EA} \quad (1.3)$$

Для однородного стержня, нагруженного по концам и равномерно нагретого (охлажденного) получаем, что деформация, очевидно, равна:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \alpha \Delta t \quad (1.4)$$

Тогда абсолютное удлинение стержня на данном участке l

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} + l\alpha\Delta t \quad (1.5)$$

Условие прочности при растяжении и сжатии имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \leq R, \quad (1.6)$$

где R – расчетное сопротивление материала стержня.

Соответственно условие жесткости запишется следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \leq [\varepsilon], \quad (1.7)$$

где $[\varepsilon]$ – допускаемая величина деформации для данной задачи.

1.1. Статически определимые задачи при растяжении и сжатии.

Статически определимыми являются те задачи, в которых число неизвестных усилий не превышает числа уравнений равновесия.

Задача 1.1. Определить напряжения и удлинения в каждом участке стержня (рис. 1.2). Площадь поперечного сечения $A=5 \text{ см}^2$, материал – сталь.

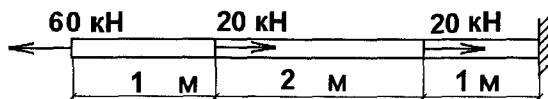


Рис. 1.2.

Решение: Поскольку внешняя сила направлена вдоль оси заданного стержня, очевидно, что внутреннее усилие также направлено вдоль оси стержня.

Для определения величины продольной силы воспользуемся методом сечений, проведя сечения на границе каждого участка. Определяем продольную силу N на каждом участке из условия равновесия (рис. 1.3):

В результате, на первом участке $N_1=60 \text{ кН}$, на втором участке $N_2=40 \text{ кН}$, и на третьем $N_3=20 \text{ кН}$.

Напряжения на каждом участке определяются по формуле: $\sigma = \frac{N}{A}$.

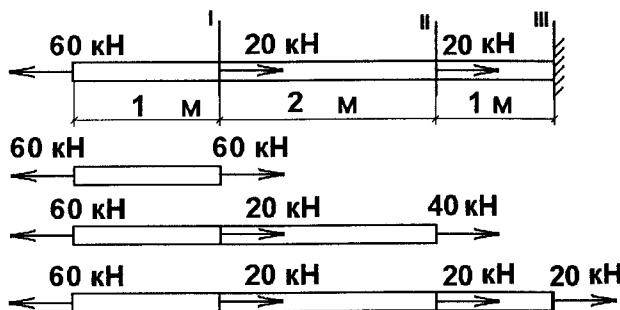


Рис. 1.3.

Тогда напряжения на каждом участке стержня будут следующими:

$$\sigma_1 = \frac{60 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 12 \cdot 10^7 \text{ Па} = 120 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_1 = \frac{40 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 80 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_1 = \frac{20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^7 \text{ Па} = 40 \text{ МПа.}$$

Удлинения на каждом участке стержня определяются по формуле:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}.$$

Удлинения каждого участка стержня будут следующими:

$$\Delta l_1 = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,6 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_1 = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,8 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_1 = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,2 \text{ мм.}$$

В итоге полное удлинение стержня составит

$$\Delta l = 0,6 + 0,8 + 0,2 = 1,6 \text{ мм.}$$

Задача 1.2. Построить эпюры продольной силы и нормального напряжения для ступенчатого стержня, показанного на рисунке 1.4, а.

Решение: Вначале разобьем заданный стержень на участки, характерные изменением параметров сечения или нагрузки (рис.1.4, б). Таким образом,

имеем четыре участка. Уравновешивая на каждом участке приложенную нагрузку, получаем: на первом участке $N_1=F$, на втором $N_2=F-2F=-F$, на третьем $N_3=-F$, на четвертом $N_4=-F+F=0$.

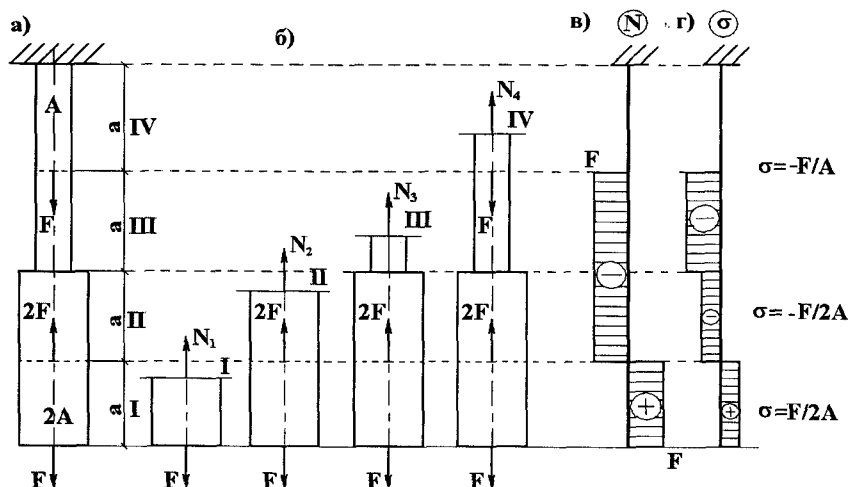


Рис. 1.4.

Строим соответствующую эпюру, т.е. график изменения продольной силы по длине стержня (рис. 1.4, в).

Напряжения на каждом участке определяем по формуле: $\sigma = \frac{N}{A}$. Таким образом, напряжения по участкам равны $\sigma_1 = F/2A$; $\sigma_2 = -F/2A$; $\sigma_3 = -F/A$; $\sigma_4 = 0$.

Строим эпюру изменения напряжений по участкам (рис. 1.4, г).

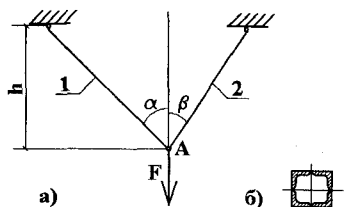


Рис. 1.5.

Задача 1.3. К двум стержням, выполненным из разных материалов, приложена сила $F=500$ кН. Подобрать необходимые параметры сечений стержней 1 и 2, если форма сечения – четыре равнобоких уголка (рис. 1.5, б).

Материал стержней: 1 – сталь с допускаемым напряжением $[\sigma]_1=180$ МПа, 2 – медь с допускаемым напряжением $[\sigma]_2=120$ МПа. Определим также величину и направление перемещения узла приложения силы F (графически). Углы наклона $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$. Модули упругости материалов стали $E_{ст} = 2 \cdot 10^5$ МПа, и меди $E_m = 1 \cdot 10^5$ МПа. Высота $h=0,7$ м.

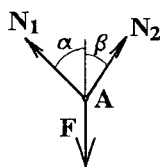


Рис. 1.6.

Решение: Вырежем узел А и рассмотрим его равновесие (рис. 1.6). Для данной системы, сходящаяся система сил, мы можем составить только два уравнения равновесия (в виде суммы сил на оси Х и Y). Таким образом, имеем:

$$1) \quad \sum F_{ix} = 0; \quad -N_1 \cdot \sin\alpha + N_2 \cdot \sin\beta = 0, \text{ откуда} \quad (1)$$

$$N_2 = N_1 \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \quad (2)$$

$$2) \quad \sum F_{iy} = 0; \quad N_1 \cdot \cos\alpha + N_2 \cdot \cos\beta - F. \quad (3)$$

Подставляя зависимость (2) в уравнение (3), имеем

$$N_1 \cdot \cos\alpha + \frac{N_1 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\beta} - F = 0, \text{ и подставляя числовые значения}$$

$$N_1 \cdot 0,866 + \frac{N_1 \cdot 0,5 \cdot 0,7071}{0,7071} - F = 0,$$

$$1,366 \cdot N_1 = F, \text{ откуда } N_1 = \frac{F}{1,366} = \frac{500}{1,366} = 366 \text{ кН, тогда}$$

$$N_2 = \frac{366 \cdot 0,5}{0,7071} = 258,82 \text{ кН.}$$

Теперь, зная усилия в стержнях, можно определить необходимые параметры сечений. Из условия прочности $\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma]$, получим для первого стержня

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma_1]} = \frac{366 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 20,33 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 20,33 \text{ см}^2,$$

поскольку по условию задачи сечение состоит из 4-х одинаковых уголков, то необходимый профиль первого стержня

$$A_{11} = \frac{20,33}{4} = 5,08 \text{ см}^2.$$

Аналогично, из того же условия прочности для второго стержня получаем

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma_2]} = \frac{258,82 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 21,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 21,57 \text{ см}^2,$$

тогда необходимая площадь сечения, т.е. площадь сечения профиля

$$A_{21} = \frac{21,57}{4} = 5,39 \text{ см}^2.$$

По сортаменту, для первого стержня подбираем уголок 45×45×6, имеющий площадь сечения $A_{11} = 5,08 \text{ см}^2$. Для второго стержня выбираем сечение 50×50×6, у которого $A_{21} = 5,69 \text{ см}^2$.

Далее, уже зная параметры сечений стержней, определяем перемещение узла А, приложения внешней силы. Для этого поочередно определяем удлинение каждого стержня по формуле:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (4)$$

$$\Delta l_1 = \frac{366 \cdot 10^3 \cdot 0,7 \cdot \cos 30}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 5,08 \cdot 10^{-4}} = 5,46 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,546 \text{ мм}.$$

$$\Delta l_2 = \frac{258,82 \cdot 10^3 \cdot 0,7 \cdot \cos 45}{1 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 5,69 \cdot 10^{-4}} = 5,63 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,563 \text{ мм}.$$

Перемещение узла А получим графически, откладывая на миллиметровке перемещение каждого стержня (под соответствующим углом). Здесь $|AK| = \Delta l_1$ – удлинение 1-го стержня, $|KA_1| = \Delta l_2$ – удлинение 2-го стержня.



Рис. 1.7.

Окончательно, $|AA_1|$ – перемещение узла А – вектор, соединяющий начальное и конечное положение узла. Для наглядности, построение выполним в масштабе 50:1 (рис. 1.7). В нашем случае перемещение узла составит 8,6 мм.

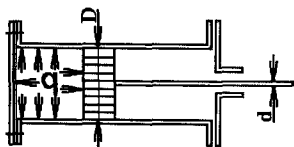


Рис. 1.8.

Задача 1.4. Поршень цилиндра паровой машины имеет диаметр 40 см, а шток поршня – 5,6 см. Давление пара в цилиндре равно 10 ат (1 ат = $9,81 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^2$).

Определить наибольшее напряжение в штоке

цилиндра и соответствующее изменение его длины (рис. 1.8). Длина штока равна 70 см, материал – сталь.

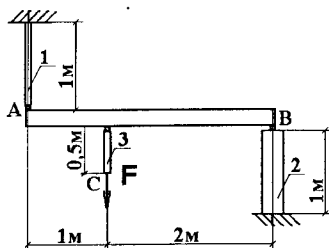


Рис. 1.9.

Задача 1.5. Жесткая балка АВ, деформацией которой пренебрегаем, закреплена и нагружена, как указано на рисунке 1.9. Стержень 1 – стальной сечением 20 см^2 , стойка 2 – деревянная, сечением $10 \times 10 \text{ см}$, стержень 3 – медный, сечением 40 см^2 . Определить опускание точки С.

Задача 1.6. Стальной стержень круглого сечения растягивается усилием 120 кН. Относительное удлинение не должно превышать $1/2000$, а напряжение не должно быть больше 120 МПа. Найти наименьший диаметр стержня, удовлетворяющий этим условиям.

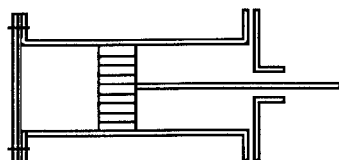
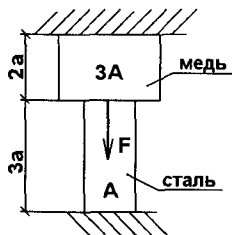


Рис. 1.10.

Задача 1.7. Рабочее давление внутри цилиндра 10 атм; внутренний диаметр цилиндра 400 мм. Какое количество болтов диаметром 16 мм необходимо для крепления крышки цилиндра к стенке, если допустимое напряжение для материала болтов равно 40 МПа?

1.2. Статически неопределимые задачи при растяжении и сжатии.

Статически неопределимыми являются задачи, в которых число неизвестных усилий превышает число уравнений равновесия и, следовательно, не могут быть определены методами статики. Система уравнений равновесия дополняется необходимым числом уравнений деформаций элементов системы. После чего задача становится разрешимой.



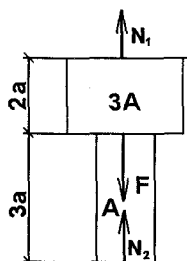
Задача 1.8. Определить внутренние усилия и напряжения в каждом участке ступенчатого стержня, указанного на рисунке 1.11..

$E_{ст}=2 \cdot 10^{11}$ Па, $E_{медь}=1 \cdot 10^{11}$ Па, $a=0,5$ м, $F=200$ кН, $A=10$ см².

Рис. 1.11.

Решение: Вначале используя принцип освобождаемости от опор, отбрасываем опоры, заменяя их реакциями N_1 и N_2 (рис. 1.12). Поскольку все силы располагаются на одной прямой, то мы можем использовать лишь одно уравнение равновесия:

$$N_1 - F + N_2 = 0.$$



Таким образом, имеем статически неопределимую задачу, для которой ССН (степень статической неопределимости) равна 1. Необходимо составить одно дополнительное уравнение – уравнение совместности деформации для данного стержня.

1-й участок стержня подвергается растяжению, а 2-й – сжатию, но поскольку стержень жестко заделан с обоих концов, то суммарная деформация равна нулю..

Рис. 1.12.

Таким образом, $\Delta l_1 - \Delta l_2 = 0$.

Удлинение каждого участка определяем по формуле $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$, тогда

$$\frac{N_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2}, \text{ то есть } \frac{N_1 \cdot 2a}{E_m \cdot 3A} = \frac{N_2 \cdot 3a}{E_{ст} \cdot A}, \text{ но поскольку } E_{ст} = 2E_m, \text{ то}$$

$$\frac{N_1 \cdot 2a}{E_m \cdot 3A} = \frac{N_2 \cdot 3a}{2E_m \cdot A}, \text{ в итоге получаем, что } N_1 = \frac{9N_2}{4}; \text{ подставляем это}$$

выражение в уравнение равновесия: $N_2 + \frac{9N_2}{4} = F$ и далее

$$N_2 = \frac{4}{13}F \text{ и } N_1 = \frac{9}{13}F.$$

Проверяем правильность расчета $\frac{9}{13}F + \frac{4}{13}F - F = 0$. Таким образом, внутренние усилия определены верно. Подставляя значение силы F в полученные выражения, найдем количественное выражение каждого усилия, а напряжения в каждом участке стержня найдем по формуле $\sigma = \frac{N}{A}$:

$$N_1 = \frac{9}{13}F = \frac{9}{13} \cdot 200 = 138,5 \text{ кН}; \quad N_2 = \frac{4}{13}F = \frac{4}{13} \cdot 200 = 61,5 \text{ кН}.$$

$$\sigma_1 = \frac{138,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 46,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 46,2 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_2 = \frac{61,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 61,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 61,5 \text{ МПа}.$$

Задача 1.9. К конструкции, состоящей из трех стержней, приложена сила F , как показано на рисунке 1.13, а. Сечения стержней одинаковые, и состоят из четырех равнобоких уголков $50 \times 50 \times 5$ (рис. 1.13, б), площадь поперечного сечения стержней $A = 4 \times 4,8 = 19,2 \text{ см}^2$. Модули упругости стержней принять равными: $E_1 = E_3 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $E_2 = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Угол $\alpha = 30^\circ$. Материал стержней: 1, 3 – сталь с допускаемым напряжением $[\sigma]_{1,3} = 180 \text{ МПа}$, 3 – медь с допускаемым напряжением $[\sigma]_2 = 120 \text{ МПа}$.

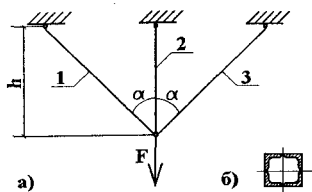


Рис. 1.13.

Высота конструкции $h = 0,7 \text{ м}$. Определить напряжения в стержнях и допускаемую величину силы F при заданных значениях допускаемых напряжений в стержнях.

Решение: Вырежем узел А и рассмотрим его равновесие (рис. 1.14).

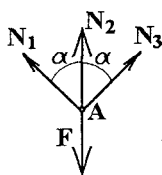


Рис. 1.14.

Для данной системы сил мы можем составить только два уравнения равновесия (в виде суммы сил на оси X и Y).

$$1) \quad \sum F_{ix} = 0; \quad -N_1 \cdot \sin \alpha + N_3 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$-N_1 \cdot \sin 30^\circ + N_3 \cdot \sin 30^\circ = 0, \text{ откуда}$$

$$2) \quad N_1 = N_3. \quad \sum F_{iy} = 0; \quad N_1 \cdot \cos \alpha + N_3 \cdot \cos \alpha + N_2 -$$

$$F = 0,$$

$$N_1 \cdot \cos 30^\circ + N_3 \cos 30^\circ + N_2 - F = 0.$$

Таким образом, имеем три неизвестных усилия при двух уравнениях равновесия. То есть, наша система является один раз статически неопределимой. Для раскрытия статической неопределимости системы, составляем *уравнение совместности деформации*.

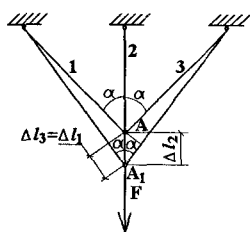


Рис. 1.15.

Рассматривая характер совместного деформирования всех трех стержней (рис. 1.15), составляем условие совместного деформирования системы:

$$\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha},$$

поскольку $N_1 = N_3$, и $\Delta l_1 = \Delta l_3$, то вторая

$$\text{зависимость выглядит аналогично } \Delta l_2 = \frac{\Delta l_3}{\cos \alpha},$$

и можно использовать любую из них, тогда $\Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos 30^\circ}$.

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} = \frac{N_1 \cdot l_1}{\cos 30^\circ \cdot E_1 \cdot A_1}.$$

Кроме того, согласно схеме закрепления (рис. 1.13) $l_1 = l_3 = \frac{l_2}{\cos 30^\circ}$ и по условию задачи $A_1 = A_2 = A_3 = A$, $E_1 = E_3 = 2 \cdot E_2$, т.к. $E_{\text{стали}} = 2 \cdot E_{\text{меди}}$, следовательно

$$\frac{N_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A} = \frac{N_1 \cdot l_2}{\cos^2 30^\circ \cdot 2E_2 \cdot A}, \text{ откуда}$$

$$N_2 = \frac{N_1}{2 \cos^2 30^\circ} = \frac{N_1}{1,5}.$$

Тогда имеем

$$2N_1 \cos 30^\circ + \frac{N_1}{2 \cos^2 30^\circ} = F; \quad 2,4 \cdot N_1 = F, \text{ откуда } N_1 = F/2,4.$$

Соответственно, реакции в остальных стержнях:

$$N_3 = F/2,4.$$

$$N_2 = \frac{F}{1,5 \cdot 2,4} = \frac{F}{3,6}.$$

Далее, определяем реакции в стержнях по формуле $\sigma = \frac{N}{A}$

Соответствующие напряжения:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{F}{2,4 \cdot 19,2 \cdot 10^{-4}} = \frac{F}{4,6 \cdot 10^{-3}} = 217,0 \cdot F \text{ Па.}$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{3,6 \cdot 19,2 \cdot 10^{-4}} = \frac{F}{6,91 \cdot 10^{-3}} = 144,7 \cdot F \text{ Па.}$$

Используя полученные зависимости для напряжений в стержнях и заданные значения допускаемых напряжений, определим допускаемое значение нагрузки F :

$$[F]_1 = \frac{[\sigma]_1}{217,4} = \frac{180 \cdot 10^6}{217,4} = 829493 \text{ Н} \approx 829,5 \text{ кН.}$$

$$[F]_2 = \frac{[\sigma]_2}{144,7} = \frac{120 \cdot 10^6}{144,7} = 829302 \text{ кН} = 829,3 \text{ кН.}$$

Поскольку, допускаемое значение внешнего усилия, полученного из условия прочности второго стержня меньше, чем аналогичное, полученное из условия прочности первого, то окончательно допускаемая величина силы F принимается равной 829,3 кН:

$$[F] = 829,3 \text{ кН}$$

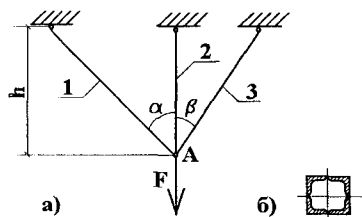


Рис. 1.16

Задача 1.10. Определить допускаемую величину внешнего усилия, действующего на конструкцию, состоящую из трех стержней (рис. 1.16). Стержни 1 и 3 выполнены из стали с модулем упругости $E_{1,3} = 2 \cdot 10^5$ МПа, а стержень 2 – из меди

с модулем упругости $E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа, $[\sigma]_{1,3} = 180$ МПа, $[\sigma]_2 = 120$ МПа. Углы наклона стержней к вертикали $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Сечение стержней одинаковое и представляет собой 4 равнобоких уголка $70 \times 70 \times 8$.

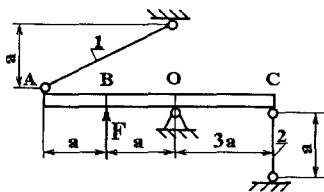


Рис. 1.17.

Задача 1.12. Определить допускаемую величину усилия для конструкции на рисунке 1.17, приняв большее из напряжений в стержнях за допускаемое $[\sigma]=180$ МПа. Стержни 1 и 2 выполнены из стали с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и одинаковым сечением из двутавра № 16.

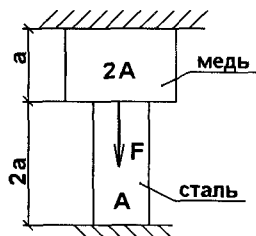


Рис. 1.18.

Задача 1.10. Определить усилия и напряжения в каждом участке ступенчатого стержня, указанного на рисунке 1.18. Модули упругости материалов: стали $E_{ст}=2 \cdot 10^{11}$ Па и меди $E_{меди}=1 \cdot 10^{11}$ Па, $a=0,7$ м, $F=120$ кН, $A=4$ см².

Тема 2. Сдвиг и кручение.

2.1. Понятие сдвига. Расчет болтовых и заклепочных соединений.

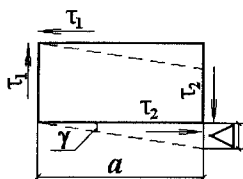


Рис. 2.1.

Сдвигом называют деформацию, представляющую собой искажение первоначально прямоугольного элемента под действием касательных напряжений τ (рис. 2.1). Развитие этой деформации приводит к разрушению, называемому срезом или, применительно к древесине, скалыванием.

Касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении элемента при сдвиге

$$\tau = \frac{Q}{A}, \quad (2.1)$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом сечении, A – площадь поперечного сечения элемента.

Относительный угол сдвига γ или просто угол сдвига

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma = \frac{\Delta}{a}, \quad (2.2)$$

γ – величина безразмерная.

При малых деформациях сдвига, деформирование материала подчиняется действию закона Гука

$$\tau = \gamma G, \quad (2.3)$$

который так и называется, *законом Гука при сдвиге*. Здесь γ – угол сдвига, τ – касательное напряжение, G – коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости второго рода, или модулем сдвига*.

Удельная потенциальная энергия при сдвиге

$$U = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau\gamma}{2}. \quad (2.4)$$

На практике чаще всего теория сдвига применяется при расчете болтовых и заклепочных соединений, сварных соединений и некоторых других.

В зависимости от числа плоскостей среза одного болта (заклепки), их называют односрезными (рис. 2.2), двухсрезными (рис. 2.3) и т.д.

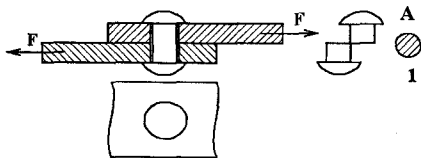


Рис. 2.2.

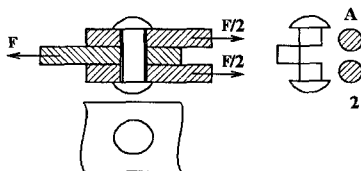


Рис. 2.3.

Они должны, во-первых, удовлетворять условию прочности на срез:

$$\tau = \frac{Q}{An_s n} \leq R_{bs} \cdot \gamma_b. \quad (2.5)$$

где Q – поперечная сила, равная внешней силе F , действующей на соединение; n_s – число плоскостей среза одного болта (заклепки);

n – число болтов (заклепок) в соединении;

A – площадь сечения болта (заклепки): $A = \frac{\pi d^2}{4}$, где d – диаметр заклепки или внутренний диаметр болта;

R_{bs} – расчетное сопротивление на срез материала болта (заклепки);

γ_b – коэффициент условий работы соединения, $0,75 \leq \gamma_b \leq 1,0$.

Если величины F , R_{bs} , γ_b , n_s известны, то задаваясь числом болтов (заклепок) в соединении, можно найти необходимый для обеспечения прочности на срез диаметр:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi n_s n R_{bs} \gamma_b}}. \quad (2.6)$$

А зная d , F , R_{bs} , γ_b , n_s , можно определить потребное число болтов (заклепок):

$$n \geq \frac{4F}{\pi d^2 n_s R_{bs} \gamma_b}. \quad (2.7)$$

Во-вторых, болты (заклепки) должны отвечать условию прочности на смятие.

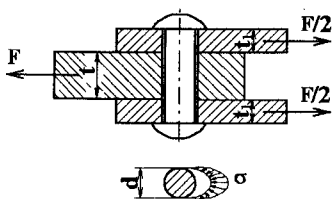


Рис. 2.4.

Под смятием понимают пластическую деформацию, возникающую на поверхности контакта. Возникающие при этом напряжения являются нормальными, закон распределения которого по поверхности контакта достаточно сложен (рис. 2.4).

Упрощая расчет, площадь, подвергающуюся смятию, принимают равной $A_p = d \sum t n$,

где d – диаметр заклепки; $\sum t$ – наименьшая суммарная толщина элементов, сминаемых в одном направлении. Сминающей будет та же сила F , которая производит и срез. Таким образом, условие прочности на смятие:

$$\sigma_{bp} = \frac{F}{d \sum t n} \leq R_{bp} \gamma_b, \quad (2.8)$$

где R_{bp} – расчетное сопротивление на смятие.

Итак, диаметр болта (заклепки) из условия прочности на смятие

$$d \geq \frac{F}{\sum t n R_{bp} \gamma_b}. \quad (2.9)$$

Тогда требуемое количество болтов (заклепок) из условия прочности на смятие

$$n \geq \frac{F}{\sum t d R_{bp} \gamma_b}. \quad (2.10)$$

Из двух значений диаметров (2.6) и (2.9) выбирают большее, округляя его до стандартного целого значения. Точно так же, из двух значений n из (2.7) и (2.10) выбирают большее, округляя его до большего целого.

Задача 2.1. Определить требуемое количество заклепок диаметром $d=4$ мм, для соединения двух листов двумя накладками (рис. 2.5).

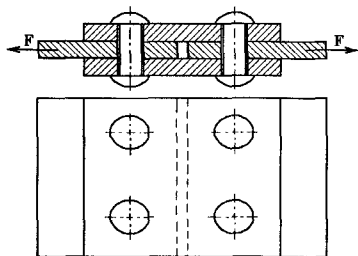


Рис. 2.5.

Толщина листов и накладок $\delta = 2$ мм. На соединение действует сила $F=50$ кН, расчетное сопротивление материала листов и заклепок при срезе $R_{bs} = 110$ МПа, а при смятии $R_{bp} = 300$ МПа, коэффициент условия работы соединения $\gamma_b = 0,75$.

Решение: Согласно формуле (2.7) необходимое количество заклепок из условия прочности при срезе:

$$n \geq \frac{4F}{\pi d^2 n_s R_{bs} \gamma_b}, \text{ где } n_s=2, \text{ тогда}$$

$$n \geq \frac{4 \cdot 50 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (4 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 2 \cdot 110 \cdot 10^6 \cdot 0,75} = 24,1, \text{ то есть 24 заклепки.}$$

Из условия прочности при смятии необходимое количество заклепок согласно формуле (2.10):

$$n \geq \frac{F}{\sum t d R_{bp} \gamma_b},$$

где $\sum t = 2$ мм, тогда

$$n \geq \frac{50 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 10^6 \cdot 0,75} = 27,8, \text{ то есть, округляя, 28 заклепок.}$$

Окончательно принимаем, что для соединения необходимо 28 заклепок.

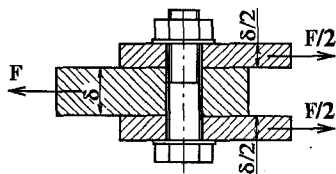


Рис. 2.6.

Задача 2.2. Определить диаметр стального болта, соединяющего три стальных листа (рис. 2.6). Сила $F=50$ кН, толщина среднего листа $\delta = 10$ мм. Расчетные сопротивления материала болта и листов при срезе $R_{bs} = 150$ МПа, при смятии $R_{bp} = 400$ МПа,

коэффициент условий работы соединения $\gamma_b = 0,8$.

Решение: Согласно формуле (2.6) требуемый диаметр болта из условия прочности при срезе:

$$d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi n_s n R_{bs} \gamma_b}},$$

здесь n_s - число плоскостей среза соединительного болта, и в нашем случае $n_s = 2$. Тогда

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 50 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 0,8}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 16 \text{ мм}.$$

Из условия прочности при смятии, необходимый диаметр болта согласно формуле (4.9):

$$d \geq \frac{F}{\sum t n R_{bp} \gamma_b},$$

где $\sum t = 10$ мм, тогда

$$d \geq \frac{50 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 400 \cdot 10^6 \cdot 0,8} = 1,56 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 15,6 \text{ мм}.$$

Таким образом, требуемый диаметр болта принимаем равным 16 мм.

Задача 2.3. Рассчитать, какое количество заклепок понадобится для условий задачи 2.1., если накладка имеется лишь с одной стороны.

Задача 2.4. Определить силу F , которую способно воспринять заклепочное соединение, указанное на рисунке 2.5 (задача 2.1), если диаметр заклепки $d=2$ мм, толщина листов и накладок $\delta = 2$ мм. Расчетное сопротивление материала листов и заклепок при срезе $R_{bs} = 200$ МПа, а при смятии $R_{bp} = 500$ МПа, коэффициент условий работы соединения $\gamma_b = 0,8$.

Задача 2.5. Определить максимальную силу, которую возможно приложить к соединению, состоящему из трех стальных листов (рис. 2.6) $\delta = 10$ мм. диаметр стального болта $d=18$ мм. Расчетные сопротивления материала

болта и листов при срезе $R_{bs} = 120$ МПа, при смятии $R_{bp} = 300$ МПа, коэффициент условия работы соединения $\gamma_b = 0,75$.

2.2. Кручение стержней круглого сечения.

Под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только крутящий момент M_z . Прочие же силовые факторы равны нулю.

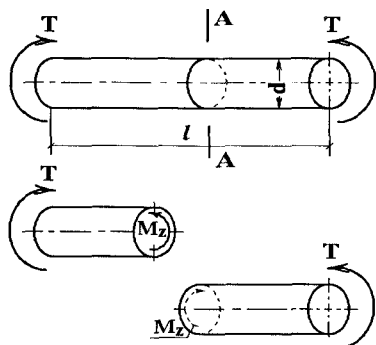


Рис. 2.7.

Для крутящего момента принято следующее правило знаков (рис. 2.7). Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент M_z направленным против часовой стрелки, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается знак минус.

Указанным правилом знаков пользуются при построении эпюр крутящих моментов.

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (2.11)$$

θ - угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними называется относительным углом закручивания.

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p}, \quad (2.12)$$

где GJ_p - называется жесткостью стержня при кручении.

Возвращаясь к формуле (2.11), имеем

$$d\varphi = \frac{M_z dz}{GJ_p}, \quad (2.13)$$

откуда

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_Z dz}{G J_\rho}, \quad (2.14)$$

где l - расстояние между сечениями, для которых определяется угол поворота φ . Если крутящий момент по длине стержня не изменяется и жесткость остается постоянной, то

$$\varphi = \frac{M_Z \cdot l}{G J_\rho}. \quad (2.15)$$

Напряжения в точке, на расстоянии ρ от центра

$$\tau = \frac{M_Z \rho}{J_\rho}, \quad (2.16)$$

тогда

$$\tau_{max} = \frac{M_Z}{W_\rho}, \quad (2.17)$$

где величина

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{max}}, \quad (2.18)$$

называется *полярным моментом сопротивления* и измеряется в см^3 , м^3 , мм^3 .

Формулы (2.15) и (2.16) являются основными расчетными формулами для кручения стержня с круглым поперечным сечением. Они справедливы как для сплошного, так и для трубчатого сечения. В этих формулах полярные моменты инерции определяются по формулам (2.19) и (2.20) для сплошного и трубчатого сечения соответственно, а моменты сопротивления - по формулам (2.21) и (2.22) соответственно.

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (2.19)$$

$$J_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \quad (2.20)$$

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}. \quad (2.21)$$

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \quad (2.22)$$

Условия прочности и жесткости при кручении описываются формулами (2.23) и (2.24) соответственно:

$$\tau_{\max} = \frac{M_Z}{W_\rho} \leq R_S. \quad (2.23)$$

где R_S , - расчетное сопротивление материала балки при сдвиге.

$$\varphi_{\max} = \frac{M_Z \cdot l}{G I_\rho} \leq [\varphi]. \quad (2.24)$$

Задача 2.6. Определить грузоподъемность $[M_Z]$ стального стержня круглого сечения диаметром 20 мм при допускаемом напряжении $[\tau]=100$ МПа. Чему равна величина угла закручивания участка стержня длиной 1м?

Решение: Вал подвергается скручиванию, условие прочности при этом

записывается как $\tau_{\max} = \frac{M_Z}{W_\rho} \leq [\tau]$, тогда $[M_Z] = [\tau] \cdot W_\rho$, где $W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$

полярный момент сопротивления сечения, значит

$$[M_Z] = 100 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^3}{16} = 157 \text{ Н}.$$

Угол закручивания участка вала определяем по формуле

$\varphi = \frac{M_Z \cdot l}{G \cdot I_\rho}$, в этой формуле $I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{132}$ - полярный момент инерции сечения, и

G - постоянная для данного материала, модуль упругости второго рода или модуль сдвига. Для стали $G=8 \cdot 10^{10}$ Па.

$$\varphi = \frac{157 \cdot 1,32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^4} = 0,125 \text{ рад}.$$

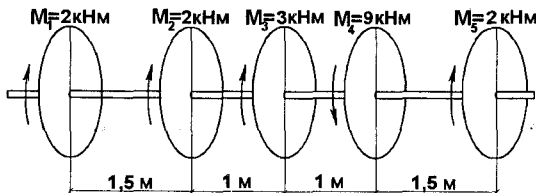


Рис. 2.8.

Задача 2.7. На стальной вал через пять шкивов передаются крутящие моменты, указанные на рисунке (рис. 2.8). Построить эпюру крутящего

момента, подобрать сечение вала при $[\tau]=100$ МПа. Определить величину угла поворота правого торцевого сечения относительно левого.

Решение. Для подбора сечения необходимо знать нагрузку на вал, то есть необходимо построить эпюру крутящего момента. С учетом правила знаков строим эпюру крутящего момента по участкам (рис. 2.9).

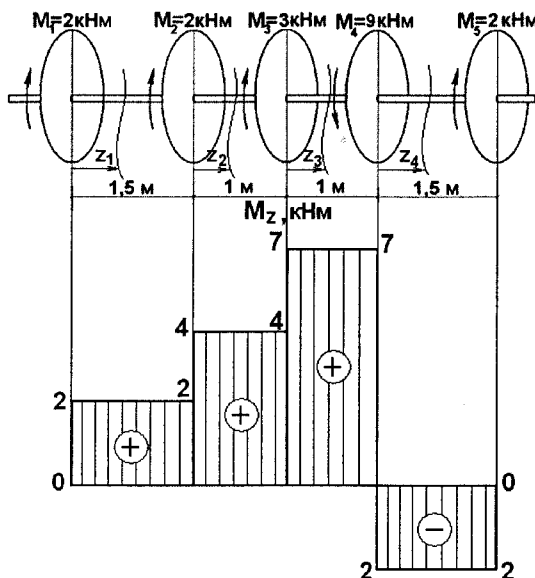


Рис. 2.9.

Максимальный крутящий момент

$$M_{zmax} = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Условие прочности при кручении определяется формулой:

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leq [\tau].$$

Тогда необходимый диаметр вала определяется по формуле:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_z}{\pi \cdot [\tau]}}.$$

$$\text{И, следовательно, } d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 7 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100 \cdot 10^6}} = 7,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 71 \text{ мм}.$$

Угол поворота сечения определяется по формуле: $\varphi = \frac{M_Z \cdot l}{G \cdot I_\rho}$.

Поскольку каждый участок вала имеет свою нагрузку, то угол поворота всего вала определяется как сумма углов поворота на каждом участке:

$$\varphi = \frac{(M_{1Z} \cdot l_1 + M_{2Z} \cdot l_2 + M_{3Z} \cdot l_3 - M_{4Z} \cdot l_4)}{G \cdot I_\rho}.$$

Подставляя в формулу величины крутящих моментов и длины соответствующих участков вала, получим.

$$\varphi = \frac{32 \cdot (2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 4 \cdot 10^3 \cdot 1 + 7 \cdot 10^3 \cdot 1 - 2 \cdot 10^3 \cdot 1,5)}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (7,1 \cdot 10^{-2})^4} = 0,0551 \text{ рад}.$$

Задача 2.8. Сплошной стальной вал диаметром 10 см и длиной 5 м закручен на угол 6° . Чему равно наибольшее касательное напряжение?

Задача 2.9. Определить диаметр сплошного стального вала круглого сечения, передающего крутящий момент 18 кНм, если допускаемое напряжение $[\tau] = 80$ МПа, а допускаемый угол закручивания на 1 м длины $[\varphi] = 0,8$ град.

Задача 2.10. Определить грузоподъемность $[M_Z]$ стального стержня круглого сечения диаметром 24 мм при допускаемом напряжении $[\tau] = 80$ МПа. Чему равна величина угла закручивания участка вала длиной 1 м?

Задача 2.11. На стальной вал через пять шкивов передаются крутящие моменты, указанные на рисунке 2.10. Построить эпюру крутящего момента, подобрать сечение вала при $[\tau] = 80$ МПа. Определить величину угла поворота правого торцевого сечения относительно левого. Модуль сдвига для стали $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па.

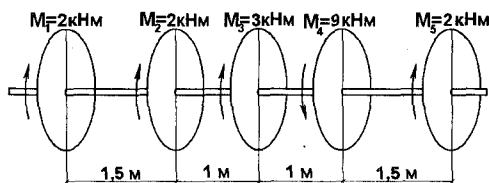


Рис. 2.10.

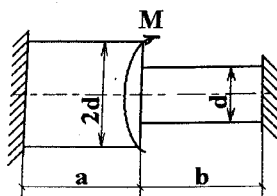


Рис. 2.11.

Задача 2.12. Построить эпюру крутящих моментов для ступенчатого вала, жестко зашечленного обоими торцами и нагруженного скручивающим сосредоточенным моментом M (рис. 2.11), расположенным на расстоянии a от левого торца.

Длина участков $a=2$ м, $b=3$ м, $d=40$ мм, $M=3$ кН·м.

Решение. Поскольку вал зашечлен с двух торцов, то в обоих зашечлениях возникнут реактивные опорные моменты M_A и M_B . Для их определения используем вначале уравнение статики. В данном случае можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum M_A = 0; M_A + M_B + M = 0.$$

Уравнение содержит две неизвестные величины M_A и M_B . Следовательно, данная задача является один раз статически неопределимой, и, следовательно, для ее решения необходимо записать одно дополнительное уравнение.

Рассматриваем картину деформации вала. Поскольку вал жестко зашечлен обоими торцами, то угол взаимного поворота торцевых сечений равен нулю.

Угол поворота правого торца относительно левого может быть представлен в виде суммы углов поворота отдельных участков вала.

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_b = 0.$$

Величина угла поворота для каждого из участков определяется согласно формуле (2.15):

$$\varphi_a = \frac{M_a \cdot a}{G \cdot J_p}, \text{ - для участка длиной } a, \text{ тогда для участка длиной } b$$

$$\varphi_b = \frac{M_b \cdot b}{G \cdot J_p}.$$

В записанных формулах величины M_a и M_b - крутящие моменты, действующие на участках a и b соответственно. Таким образом

$$\varphi = \frac{M_a \cdot a}{G \cdot J_{pa}} + \frac{M_b \cdot b}{G \cdot J_{pb}} = 0.$$

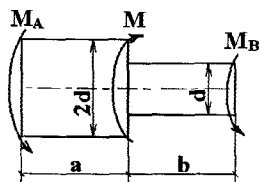


Рис. 2.12.

Это и есть деформационное уравнение рассматриваемой задачи. Выразим крутящие моменты, воспользовавшись методами статики и методом сечений (рис. 2.12).

Примем направление движения слева направо

тогда согласно правилу знаков для крутящих моментов:

$$M_a = -M_A; \quad M_b = -M_A + M.$$

Подставив значения моментов, получим

$$\varphi = -\frac{M_A \cdot a \cdot 32}{G \cdot \pi (2d)^4} + \frac{(-M_A + M) \cdot b \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d^4} = 0, \text{ откуда}$$

$$-\frac{M_A \cdot 2 \cdot a}{G \cdot \pi d^4} - \frac{M_A \cdot b \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d^4} + \frac{M \cdot b \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d^4} = -\frac{M_A \cdot (2a + 32b)}{G \cdot \pi \cdot d^4} + \frac{M \cdot b \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d^4} = 0, \text{ и}$$

$$\frac{M_A \cdot (2a + 32b)}{G \cdot \pi \cdot d^4} = \frac{M \cdot b \cdot 32}{G \cdot \pi \cdot d^4}, \text{ откуда } M_A = \frac{M \cdot b \cdot 32}{(2a + 32b)}$$

$$M_A = \frac{3 \cdot 3 \cdot 32}{(2 \cdot 2 + 32 \cdot 3)} = 2,88 \text{ кНм, тогда соответствующий угол закручивания}$$

$$\varphi_a = -\frac{2,88 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 10^{-2})^4} = -0,179 \text{ рад.}$$

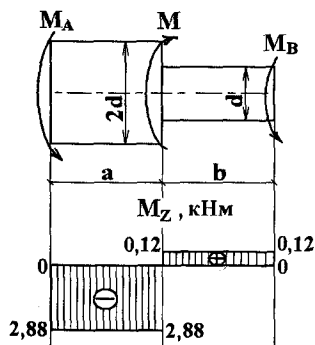


Рис. 2.13.

На втором участке $M_b = -M_A + M$
 $M = -2,88 + 3 = 0,12 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и
 соответствующий угол закручивания

$$\varphi_b = \frac{0,12 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4} = 0,179 \text{ рад, то}$$

есть условие равенства деформаций выполняется. Моменты определены правильно, можно строить эпюру крутящего момента (см. рис. 2.13).

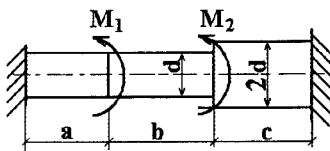


Рис. 2.14.

Задача 2.13. Построить эпюру крутящих моментов для ступенчатого вала, жестко защемленного обоими торцами и нагруженного скручивающими сосредоточенными моментами: $M_1=3$ кНм и $M_2=6$ кНм (рис. 2.14), $d=40$ мм расстояния $a=1,5$ м, $b=2$ м $c=2$ м.

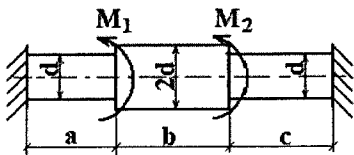


Рис. 2.15.

Задача 2.14. Построить эпюру крутящих моментов для ступенчатого вала, жестко защемленного обоими торцами и нагруженного скручивающими сосредоточенными моментами: $M_1=4$ кНм и $M_2=6$ кНм (рис. 2.15), $d=40$ мм расстояния $a=2$ м, $b=2,5$ м $c=2$ м.

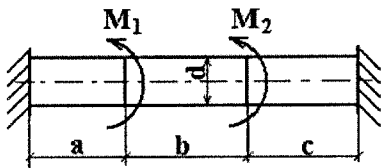


Рис. 2.16.

Задача 2.15. Построить эпюру крутящих моментов для вала, жестко защемленного обоими торцами и нагруженного скручивающими сосредоточенными моментами: $M_1=6$ кНм и $M_2=8$ кНм (рис. 2.16), $d=70$ мм расстояния $a=1$ м, $b=2,5$ м $c=2$ м.

Тема 3. Геометрические характеристики поперечных сечений.

При решении задач, связанных с изгибом, возникает необходимость оперировать некоторыми геометрическими характеристиками поперечных сечений стержня. Эти характеристики имеют применение в основном в пределах задач изгиба и рассматриваются в курсе сопротивления материалов.

3.1. Статические моменты сечения и определение положения центра тяжести.

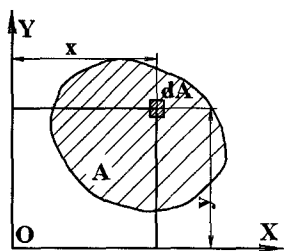


Рис. 3.1.

Для некоторого сечения в системе координат XOY (рис. 3.1) следующие интегралы:

$$S_X = \int_A y dA; S_Y = \int_A x dA, \quad (3.1)$$

называются: 1-й интеграл - статический момент площади сечения относительно оси X, а 2-й интеграл - статический момент относительно оси Y. Измеряются они в м^3 , см^3 и мм^3 .

Здесь A у знака интеграла указывает на то, что интегрирование ведется по всей площади сечения.

При параллельном переносе осей величины статических моментов меняются. Рассмотрим две пары параллельных осей X, Y и X_1 , Y_1 (рис. 3.2)

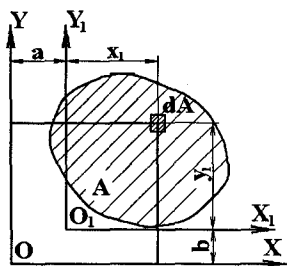


Рис. 3.2.

Пусть расстояние между осями X и X_1 равно b, а расстояние между осями Y и Y_1 равно a. Искомые статические моменты будут равны

$$S_{X1} = S_X - bA, \quad \text{и} \quad S_{Y1} = S_Y - aA,$$

$$\text{Если } S_X = bA \text{ и } S_Y = aA, \text{ то } S_{X1} = 0 \text{ и } S_{Y1} = 0$$

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*.

Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*. Путем поворота осей можно показать, что статический момент относительно любой оси, проходящей через центр тяжести равен нулю.

Таким образом, положение центра тяжести произвольной фигуры:

$$y_{ц.т.} = \frac{S_X}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}. \quad (3.2)$$

$$x_{ц.т.} = \frac{S_Y}{A} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}. \quad (3.3)$$

3.2. Моменты инерции сечения.

Следующие интегралы:

$$J_X = \int_A y^2 dA, \quad J_Y = \int_A x^2 dA, \quad J_{XY} = \int_A xy dA, \quad (3.4)$$

называются: первые два - *осевыми моментами инерции сечения* относительно осей X и Y соответственно, третий - называется *центробежным моментом инерции сечения* относительно осей X и Y. Измеряются моменты инерции в м⁴, см⁴, мм⁴.

Осевые моменты инерции всегда положительны, поскольку положительной считается площадь dA . Центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от положения сечения относительно осей.

При параллельном переносе, с учетом того, что оси X и Y – центральные, получим следующие формулы (рис. 3.2):

$$J_{X_1} = J_X + b^2 A, \quad J_{Y_1} = J_Y + a^2 A, \quad J_{Y_1 X_1} = J_{XY} + abA. \quad (3.4)$$

Т.е. при параллельном переносе осей (если одна ось - центральная), осевые моменты инерции меняются на величину, равную произведению площади сечения на квадрат расстояния между осями.

Необходимо запомнить, что при переходе от центральных осей к

нецентральный, осевые моменты инерции увеличиваются и величины b^2A , и a^2A следует прибавлять, а при переходе от нецентральных осей к центральным - отнимать.

3.3. Главные оси и главные моменты инерции.

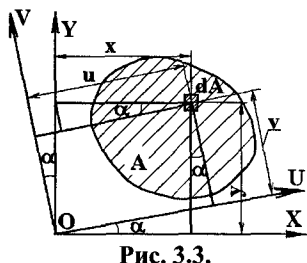


Рис. 3.3.

Рассмотрим, как изменятся моменты инерции при повороте осей координат на угол α . Положим, даны моменты инерции J_X , J_Y , и J_{XY} для некоторого сечения относительно осей X , Y (не обязательно центральных) (рис. 3.3).

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Используя из алгебры формулы преобразования, получаем

$$J_U = J_X \cos^2 \alpha - J_{XY} \sin 2\alpha + J_Y \sin^2 \alpha. \quad (3.5)$$

$$J_V = J_X \sin^2 \alpha + J_{XY} \sin 2\alpha + J_Y \cos^2 \alpha. \quad (3.6)$$

$$J_{UV} = J_{XY} \cos 2\alpha + \frac{J_X - J_Y}{2} \sin 2\alpha. \quad (3.7)$$

Складывая почленно два первых уравнения, получим

$$J_U + J_V = J_X + J_Y = \text{const}, \quad (3.8)$$

т.е. сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не зависит от угла α , и при повороте осей остается постоянной. Следовательно, существует такое α , при котором один из моментов достигает своего максимума, а другой - минимума.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции обращается в нуль, а осевые моменты принимают экстремальные значения, называются главными. Если к тому же они являются центральными, то тогда они называются главными центральными осями. А осевые моменты относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Значения главных моментов инерции определяются формулой

$$I_{\min}^{\max} = \frac{I_X + I_Y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_Y - I_X}{2}\right)^2 + I_{XY}^2}, \quad (3.9)$$

верхний знак относится к максимальному моменту, а нижний – к минимальному.

Задача 3.1. Вычислить моменты инерции прямоугольного сечения относительно осей, совпадающих с его сторонами. Параметры сечения $b=20$ см, $h=30$ см (рис. 3.4).

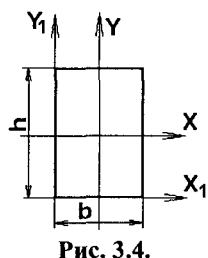


Рис. 3.4.

Решение: Оси, относительно которых необходимо вычислить моменты инерции не являются главными центральными осями прямоугольника, моменты инерции для которых известны и равны соответственно $I_X = \frac{b \cdot h^3}{12}$ и $I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12}$, при этом центробежный момент инерции

$$I_{XY} = 0.$$

Применим формулы перехода к параллельным осям:

$I_{X1} = I_X + a^2 \cdot A$, $I_{Y1} = I_Y + c^2 \cdot A$, и $I_{X1Y1} = I_{XY} + a \cdot c \cdot A$, здесь оси X_1 и Y_1 – оси, параллельные центральным осям сечения, тогда

$$I_{X1} = \frac{b \cdot h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{3} = \frac{20 \cdot 30^3}{3} = 1,8 \cdot 10^5 \text{ см}^4.$$

$$I_{Y1} = \frac{h \cdot b^3}{12} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot b \cdot h = \frac{h \cdot b^3}{3} = \frac{30 \cdot 20^3}{3} = 8 \cdot 10^4 \text{ см}^4.$$

$$I_{X1Y1} = 0 + \frac{h}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot h \cdot b = \frac{h^2 \cdot b^2}{4} = \frac{30^2 \cdot 20^2}{4} = 9 \cdot 10^4 \text{ см}^4.$$

Задача 3.2. Вычислить главные моменты инерции двухканальной трубы прямоугольного очертания, выполненной с двумя круглыми отверстиями диаметром 10 см (рис. 3.5).

Решение: Составляем выражение для моментов инерции, исходя из того, что сечение геометрически образовано прямоугольником, из которого вырезано

два круга. Ось Y является центральной осью как для прямоугольника, так и для кругов. А ось X – только для прямоугольника. Исходя из этого, формулы моментов инерции записываются следующим образом

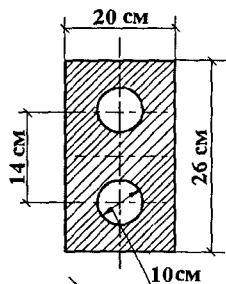


Рис. 3.5.

$$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64} \text{ и}$$

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12} - 2 \left(\frac{\pi \cdot d^4}{64} + 4^2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \right), \text{ то есть}$$

$$I_Y = \frac{26 \cdot 20^3}{12} - 2 \cdot \frac{3,14 \cdot 10^4}{64} = 16352 \text{ см}^4.$$

$$I_X = \frac{20 \cdot 26^3}{12} - 2 \left(\frac{3,14 \cdot 10^4}{64} + 16 \cdot \frac{3,14 \cdot 10^2}{4} \right) = 25798 \text{ см}^4.$$

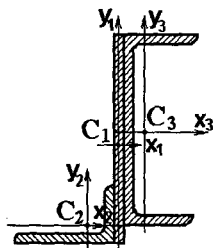


Рис. 3.6.

Задача 3.3. Для неравнополочного уголка 100×63×10, полосы 220×14 и швеллера №18 (рис. 3.6) определить положение главных центральных осей и величину главных моментов инерции.

Решение. Из сортамента выбираем параметры сечения. Показываем центры тяжести сечений C_1 , C_2 и C_3 , проводим центральные оси для каждого сечения.

Данные сводим в таблицу, для удобства:

Таблица 1.

Параметры сечения	Сечения		
	Полоса 220×14 №1	Уголок неравнополочный 100×65×10 №2	Швеллер №18 №3
Площадь A , см ²	30,8	15,67	20,7
моменты инерции J_x , см ⁴	1242	51,68	1090
моменты инерции J_y , см ⁴	5	155,52	86
Расстояние до центра тяжести x_0 , см	На оси симметрии	3,37	1,94
Расстояние до центра тяжести y_0 , см	На оси симметрии	1,64	На оси симметрии
Центробежный момент инерции J_{xy} , см ⁴	0	51,18	0

Моменты инерции полосы:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{1,4 \cdot 22^3}{12} = 1242 \text{ см}^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{22 \cdot 1,4^3}{12} = 5 \text{ см}^4$$

Выбираем в качестве вспомогательных осей центральные оси полосы. Тогда, координаты центров тяжести сечений 1, 2 и 3 относительно выбранных осей:

$C_1(0;0)$; $C_2(-3,37;0,7)$; $-(11-1,64)$; $C_3(1,94;0,7; 11-9)$ то есть

$C_1(0;0)$; $C_2(-4,07)$; $-(9,36)$; $C_3(2,64; 2)$

Определяем координаты центра тяжести сечения в этих осях по формулам:

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}, \quad x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}.$$

$$x_c = \frac{15,67 \cdot (-4,07) + 20,7 \cdot 2,64}{30,8 + 20,7 + 15,67} = -0,14 \text{ см}; \quad y_c = -\frac{15,67 \cdot (-9,36) + 20,7 \cdot 2}{30,8 + 20,7 + 15,67} = -1,57 \text{ см}.$$

Отложив полученные значения от осей x_1 , y_1 , находим положение центра тяжести сечения (рис. 3.7).

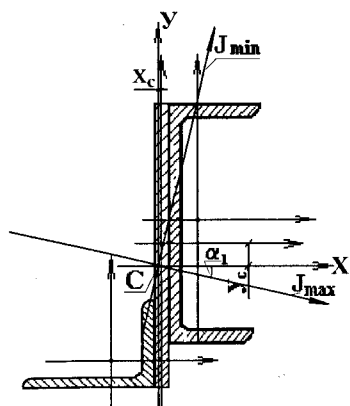


Рис. 3.7.

Проводим центральные оси сечения X , Y . Положение центров тяжести элементов сечения C_1 , C_2 и C_3 относительно этих осей запишутся следующим образом:

$C_1(0,14; 1,57)$, $C_2(-4,07;0,14)$; $-(9,36-1,57)$, $C_3(2,64+0,14; 2+1,57)$, то есть $C_1(0,14; 1,57)$, $C_2(-3,93; -7,79)$, $C_3(2,78; 3,57)$.

Находим осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно центральных осей X , Y по формулам:

$$J_x = \sum J_{x1} + a_i^2 \cdot A_i;$$

$$J_y = \sum J_{y1} + b_i^2 A_i;$$

$$J_{xy} = \sum J_{x_i y_i} + a_i \cdot b_i \cdot A_i \quad \text{причем здесь } a_i = y_i \text{ и } b_i = x_i.$$

$$J_x = 1242 + 1,57^2 \cdot 30,8 + 51,68 + (-7,79)^2 \cdot 15,67 + 1090 + 3,57^2 \cdot 20,7 = 3674 \text{ см}^4$$

$$J_y = 5 + 0,14^2 \cdot 30,8 + 155,52 + (-3,93)^2 \cdot 15,67 + 86 + 2,78^2 \cdot 20,7 = 649 \text{ см}^4$$

$$J_{xy} = 0 + 0,14 \cdot 1,57 \cdot 30,8 + 51,18 + (-3,93) \cdot (-7,79) \cdot 15,67 + 0 + 2,78 \cdot 3,57 \cdot 20,7 = 743 \text{ см}^4$$

Вычисляем значения главных центральных моментов инерции сечения по формулам:

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2}$$

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{3674 + 649}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(3674 - 649)^2 + 4 \cdot 743^2} = 2161,5 \pm 1685,1 \text{ см}^4$$

или окончательно $J_{\max} = 3846,6 \approx 3847 \text{ см}^4$; $J_{\min} = 476,4 \approx 476 \text{ см}^4$.

Определяем положение главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{J_{xy}}{J_{\max} - J_y}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{743}{3847 - 649} = -0,232, \alpha_1 = -13,08^\circ \text{ или } \alpha_1 = -13^\circ 5'$$

Положительные углы откладываются от оси X против хода часовой стрелки, а отрицательные – по ходу часовой стрелки. Напомним, что угол α_1 – это угол между осью X и осью, относительно которой момент инерции равен J_{\max} (рис.).

Выполняем проверку правильности вычислений:

$$J_x + J_y = J_{\max} + J_{\min}$$

$$3674 + 649 = 3847 + 476$$

$$4323 = 4323$$

Правая часть равна левой, следовательно, вычисления выполнены верно.

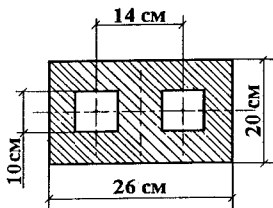


Рис. 3.8.

Задача 3.4. Вычислить главные моменты инерции двухканальной трубы прямоугольного очертания, выполненной с двумя квадратными отверстиями размером $a \times a = 10 \times 10$ см (рис. 3.8). Ширина сечения $b = 26$ см. Высота сечения $h = 20$ см, расстояние между осями отверстий $l = 14$ см.

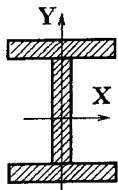


Рис. 3.9.

Задача 3.5. Деревянная балка составлена из трех одинаковых досок, склеенных между собой, как показано на рисунке 3.9. Определить величину главных центральных моментов инерции, если размер каждой из досок 5×24 см.

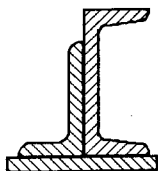


Рис. 3.10.

Задача 3.6. Для составного сечения, состоящего из неравнополочного уголка $160 \times 100 \times 10$, полосы 200×12 и швеллера № 20 (рис. 3.10) определить положение главных центральных осей и величину главных моментов инерции сечения.

Тема 4. Прямой поперечный изгиб.

4.1. Внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержня при изгибе. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Под изгибом понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты. Если изгибающий момент является единственным силовым фактором, а поперечные и продольные силы отсутствуют, изгиб называется чистым. Если же в поперечных сечениях наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы, изгиб называют поперечным.

Стержень, работающий в основном на изгиб, называется балкой.

Знак изгибающего момента устанавливается по знаку кривизны изогнутого стержня и зависит от выбранного направления внешних осей неподвижной системы координат X , Y . Эпюры изгибающего момента строятся на оси стержня, как говорится, на сжатых волокнах: ордината момента откладывается всегда в сторону вогнутости упругой линии (в сторону сжатого волокна).

Для поперечных сил существует следующее правило знаков: если поперечная сила вращает отсеченный элемент стержня по часовой стрелке, то она имеет знак «+», если же - против часовой стрелки, то, соответственно, она имеет знак «-».

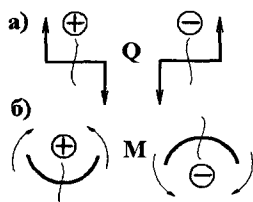


Рис. 4.1.

Приведенное правило знаков хорошо иллюстрируется схемой на рисунке 4.1.

Связь между поперечной силой и изгибающим моментом описывается дифференциальными зависимостями изгиба:

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q \quad (4.1)$$

Т.о. поперечная сила представляет собой производную от изгибающего момента по координате z , направленной по длине стержня. Производная же по z от поперечной силы дает интенсивность внешней распределенной нагрузки q . Эти выражения называют *дифференциальными зависимостями изгиба*.

Рассмотрим на простейших примерах, как используются представленные дифференциальные зависимости изгиба и правила знаков при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

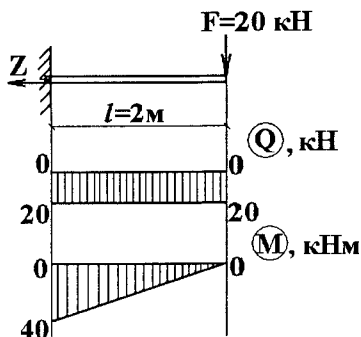


Рис. 4.2.

Задача 4.1. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для указанной на рисунке 4.2 балки.

Решение: При построении эпюр для балок-консоль направление движения всегда выбираем от свободного конца к заделке. В этом случае отпадает необходимость определения опорных реакций.

То есть ось Z направляем вправо (рис. 4.2). Балка нагружена только сосредоточенной силой F , следовательно, имеем только один участок нагружения: $0 \leq z < 2\text{ м}$.

Вначале записываем уравнения для поперечной силы и изгибающего момента в общем виде $Q(z)$ и $M(z)$. Для этого вспоминаем первую дифференциальную зависимость: $\frac{dQ}{dz} = q$. Но в нашем случае $\frac{dQ}{dz} = 0$. Следовательно, $Q(z)=\text{const}$, то есть $Q(z)=F$. Осталось разобраться со знаками. Согласно схеме на рисунке 4.1 поперечная сила на всем участке положительна, то есть $Q(0)=20\text{ кН}$ и $Q(2)=20\text{ кН}$.

Для изгибающего момента $\frac{dM}{dz} = Q$, но $Q(z)=F$, следовательно,

момент представляет собой линейную функцию и, согласно правилу знаков (см. рис. 4.1), изгибающий момент отрицателен, то есть получаем, что $M(z) = -F \cdot z$. Тогда $M(0) = 0$, а $M(2) = -(20 \cdot 2) = -40$ кНм. После выполнения расчета строим эпюры $Q(z)$ и $M(z)$, помня, что $z=0$ – правая точка, свободный конец балки, а $z=2$ м – левая точка, заделка (рис. 4.2).

Задача 4.2. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для указанной на рисунке 4.3 балки.

Решение: При построении эпюр для заданной балки-консоли направление движения также выбираем от свободного конца к заделке.

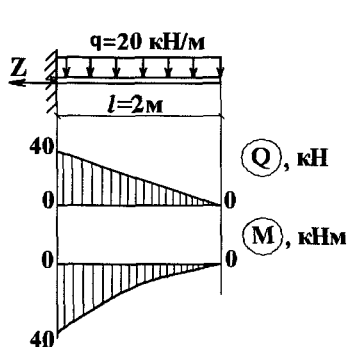


Рис. 4.3.

Балка нагружена только распределенной нагрузкой, следовательно, имеем только один участок нагружения: $0 \leq z < 2$ м.

Вначале записываем уравнения для поперечной силы и изгибающего момента в общем виде $Q(z)$ и $M(z)$. Для этого вспоминаем первую дифференциальную зависимость: $\frac{dQ}{dz} = q$

В нашем случае $\frac{dQ}{dz} = q = \text{const}$.

Следовательно, поперечная сила изменяется по линейному закону, и $Q(z) = q \cdot z$, так как согласно схеме на рисунке 4.1 поперечная сила положительна, то есть $Q(0)=0$, а $Q(2)=40$ кН.

Для изгибающего момента $\frac{dM}{dz} = Q$, но $Q(z) = q \cdot z$, тогда изгибающий момент представляет собой квадратичную функцию и графиком его изменения является парабола, согласно правилу знаков (см. рис. 4.1), изгибающий момент отрицателен, то есть получаем, что

$M(z) = -q \cdot z^2/2$. Тогда $M(0) = 0$, а $M(2) = -20 \cdot 2^2/2 = -40$ кНм. После выполнения расчета строим эпюры $Q(z)$ и $M(z)$, которые представлены на рисунке.4.3.

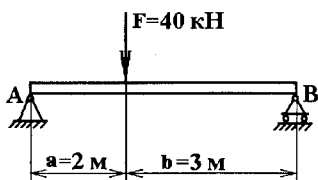


Рис. 4.4.

Задача 4.3. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для указанной на рисунке 4.4 двухопорной балки.

Решение: Для двухопорной балки, в отличие от консоли, необходимо определение опорных реакций, которые служат

дополнительной внешней нагрузкой на систему.

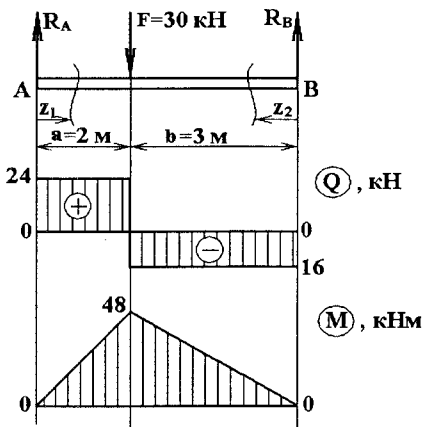


Рис. 4.5.

Реакции опор (рис. 4.5) R_A и R_B определяем из уравнений моментов относительно опорных точек

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad -F \cdot 2 + R_B \cdot 5 = 0, \text{ откуда реакция } R_B = 16 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B(F_i) = 0; \quad F \cdot 3 - R_A \cdot 5 = 0, \text{ тогда реакция } R_A = 24 \text{ кН.}$$

После определения опорных реакций обычно делают проверку правильности их определения.

Проверку выполняют в виде суммы проекций всех сил на ось Y :

$\sum F_{Yi} = R_A - F + R_B = 24 - 40 + 16 = 0$; поскольку сумма всех сил равна нулю, то опорные реакции определены верно.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов строим по участкам, их здесь два. Выберем направление движения (изменения координаты z) для левого участка – слева направо, а для правого участка – справа налево. Тогда сечение под силой F будет для нас проверочным.

Уравнения $Q(z)$ и $M(z)$ составляем по участкам, пользуясь дифференциальными зависимостями изгиба (4.1) и правилом знаков для поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 4.1).

$$0 \leq z_1 < 2 \text{ м}$$

$$Q(z) = R_A$$

$$Q(0) = Q(2) = 24 \text{ кН}$$

$$M(z) = R_A \cdot z_1$$

$$M(0) = 0$$

$$M(2) = 24 \cdot 2 = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$0 \leq z_2 < 3 \text{ м}$$

$$Q(z) = -R_B$$

$$Q(0) = Q(3) = -16 \text{ кН}$$

$$M(z) = R_B \cdot z_2$$

$$M(0) = 0$$

$$M(3) = 16 \cdot 3 = 48 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эпюры приведены на рисунке 4.5.

Задача 4.4. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для указанных на рисунке 4.6 балок. Величина нагрузок: $q=12 \text{ кН/м}$, $F=20 \text{ кН}$, $M=30 \text{ кНм}$. Длины участков $a=2 \text{ м}$, $b=2 \text{ м}$, $c=3 \text{ м}$.

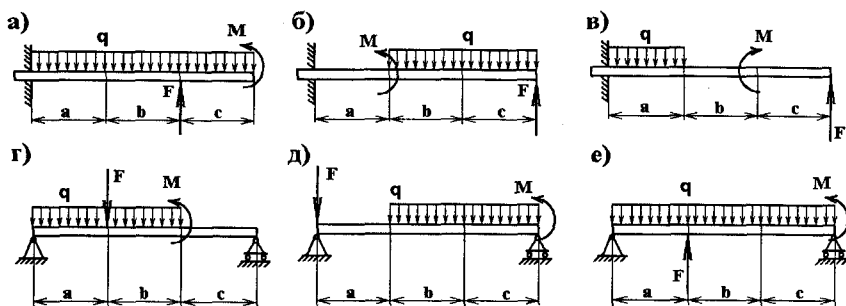


Рис. 4.6.

4.2. Определение напряжений, подбор сечений и проверка прочности балки при прямом поперечном изгибе

При чистом изгибе, согласно (4.1) $M_{\text{изг}} = \text{const}$, т.е. изгибающий момент остается постоянным.

Кривизна изогнутого стержня

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_X}. \quad (4.2)$$

Величина EJ_X , стоящая в знаменателе, называется *жесткостью стержня при изгибе*.

Напряжение в произвольной точке сечения с координатой y :

$$\sigma = \frac{My}{J_X}. \quad (4.3)$$

Максимальные напряжения при изгибе возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (удовлетворяющей условию $\sigma = 0$):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{изг}}{W_X}, \quad (4.4)$$

$$\text{где } W_X = \frac{J_X}{y_{max}} \quad (4.5)$$

называется *моментом сопротивления сечения* при изгибе и обозначается W_X (измеряется в m^3 , cm^3 или mm^3).

Формулы (4.3) и (4.4) являются основными в расчетах на прочность при изгибе. При поперечном изгибе они дают незначительную погрешность порядка h/l , где h - высота поперечного сечения, а l - длина стержня. По определению, размеры поперечного сечения стержня \ll длины. Следовательно, величина h/l относительно мала и, соответственно, малой оказывается указанная погрешность, и не препятствует применению формул (4.3) и (4.4) и в случае поперечного изгиба. В такой же мере применима и формула кривизны стержня $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_X}$.

Проверка прочности балки при изгибе производится по формуле:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{изг}}{W_X} \leq R, \quad (4.6)$$

где R – расчетное сопротивление материала балки при растяжении, взятое по пределу текучести или пределу прочности, в зависимости от механических свойств материала.

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b и h :

$$J_X = \frac{bh^3}{12}; \quad y_{\max} = \frac{h}{2}; \quad W_X = \frac{bh^2}{6}. \quad (4.7)$$

Для стержня круглого сечения:

$$J_X = \frac{\pi D^4}{64}; \quad y_{\max} = \frac{D}{2}; \quad W_X = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1 D^3. \quad (4.8)$$

Касательные напряжения при поперечном изгибе определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q \bar{S}_X}{b J_X}. \quad (4.9)$$

Здесь J_X – момент инерции сечения, а b – ширина сечения в месте определения напряжения.

В случае необходимости, проверка прочности балки по касательным напряжениям производится по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{Q \bar{S}_X}{b J_X} \leq R_S, \quad (4.10)$$

где R_S , – расчетное сопротивление материала балки при сдвиге.

Зависимость τ от y определяется через статический момент \bar{S}_X , площади сечения, лежащей выше рассматриваемой точки. При подходе к верхней кромке сечения, площадь уменьшается до 0. Здесь, следовательно, $\bar{S}_X = 0$ и $\tau = 0$.

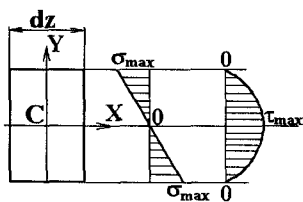


Рис. 4.7.

При подходе к нижней кромке заштрихованная часть охватывает все сечение. Т.к. ось X – центральная, то и здесь $\bar{S}_X = 0$, поэтому $\tau = 0$ в верхних и нижних точках сечения, в отличие от $\sigma = \pm \sigma_{\max}$ в этих точках (рис. 4.7).

Задача 4.5. Определить наибольшие нормальные напряжения в опасном сечении деревянной балки, изображенной на рисунке (рис. 4.8). $F=4$ кН.

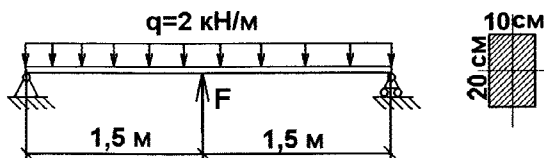


Рис. 4.8.

Решение. Положение опасного сечения определяем, построив эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Вначале определяем реакции опор:

$$\sum M_B(F_i) = 0; -R_A \cdot 3 - F \cdot 1,5 + q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, \text{ откуда}$$

$$R_A = \frac{-F \cdot 1,5 + q \cdot 4,5}{3} = 1 \text{ кН, и далее}$$

$$\sum M_A(F_i) = 0; R_B \cdot 3 + F \cdot 1,5 - q \cdot 3 \cdot 1,5 = 0, \text{ откуда}$$

$$R_B = \frac{-F \cdot 1,5 + q \cdot 4,5}{3} = 1 \text{ кН.}$$

Выполняем проверку правильности определения опорных реакций:

$$\sum F_{Yi} = R_A + R_B + F - q \cdot 3 = 1 + 1 + 4 - 2 \cdot 3 = 0, \quad \text{следовательно,}$$

опорные реакции определены верно.

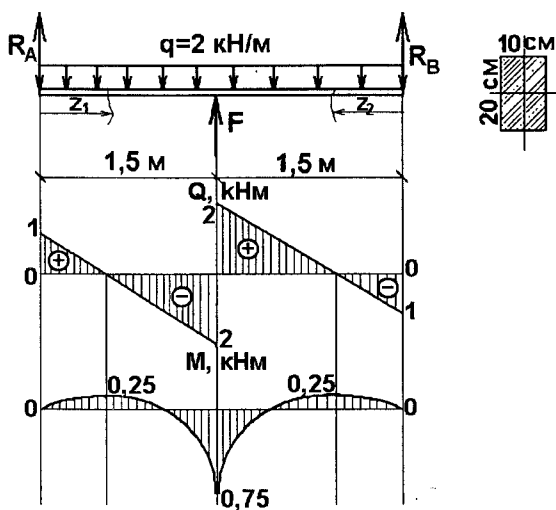


Рис. 4.9.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов строим по участкам (рис. 4.9):

$$0 \leq z_1 < 1,5$$

$$Q(z_1) = R_A - q \cdot z_1$$

$$M(z_1) = R_A \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2}$$

$$Q(0) = R_A = 1 \text{ кН}$$

$$Q(1,5) = 1 - 2 \cdot 1,5 = -2 \text{ кН}$$

$$M(0) = 0$$

$$M(1,5) = 1,5 - 2 \cdot \frac{1,5^2}{2} = -0,75 \text{ кНм}$$

$$M(0,5) = 0,5 - 2 \cdot \frac{0,5^2}{2} = 0,25 \text{ кНм}$$

$$0 \leq z_2 < 1,5$$

$$Q(z_2) = -R_B + q \cdot z_2$$

$$M(z_2) = R_B \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2}$$

$$Q(0) = -R_B = -1 \text{ кН}$$

$$Q(1,5) = -1 + 2 \cdot 1,5 = 2 \text{ кН}$$

$$M(0) = 0$$

$$M(z_1) = 1,5 - 2 \cdot \frac{1,5^2}{2} = -0,75 \text{ кНм}$$

$$M(0,5) = 0,5 - 2 \cdot \frac{0,5^2}{2} = 0,25 \text{ кНм}$$

Положение опасного сечения балки определяется максимальным изгибающим моментом. По эпюре максимальный момент равен $|M_{\max}| = 0,75 \text{ кНм}$.

Максимальное напряжение определяется по формуле $\sigma_{\max} = \frac{M_X}{W_X}$, где W_X - осевой момент сопротивления сечения, в свою очередь определяемый формулой $W_X = \frac{b \cdot h^2}{6}$, тогда

$$W_X = \frac{10 \cdot 20^2}{6} = 666,7 \text{ см}^3 = 6,67 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3, \quad \text{и, следовательно,}$$

максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{750}{6,67 \cdot 10^{-4}} = 1,12 \cdot 10^6 \text{ Па} = 1,12 \text{ МПа.}$$

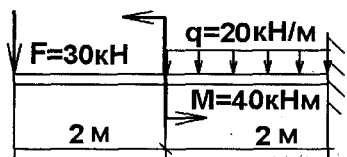


Рис. 4.10.

Задача 4.6. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки на рисунке 4.10. Подобрать прямоугольное сечение балки при $h/b=2$ для заданной внешней нагрузки и допустимом напряжении материала $[\sigma]=160 \text{ МПа}$.

Решение: Заданная балка – консольная, поэтому эпюры поперечных сил и изгибающих моментов строим со свободного конца (рис. 4.11). Оба участка проходим слева направо. Составляем уравнения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам:

$$0 \leq Z_1 < 2 \text{ м}$$

$$Q(Z_1) = -F.$$

$$Q(0) = Q(2) = -30 \text{ кН.}$$

$$M(Z_1) = -F \cdot Z_1.$$

$$M(0) = 0.$$

$$M(2) = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кНм.}$$

$$0 \leq Z_2 < 2 \text{ м}$$

$$Q(Z_2) = -F - q \cdot Z_2.$$

$$Q(0) = -30 \text{ кН.}$$

$$Q(2) = -30 - 20 \cdot 2 = -70 \text{ кН.}$$

$$M(Z_2) = -F \cdot (2 + Z_2) - M - q \frac{Z_2^2}{2}.$$

$$M(0) = -60 - 40 = -100 \text{ кНм.}$$

$$M(2) = -160 - 20 \frac{2^2}{2} = -200 \text{ кНм.}$$

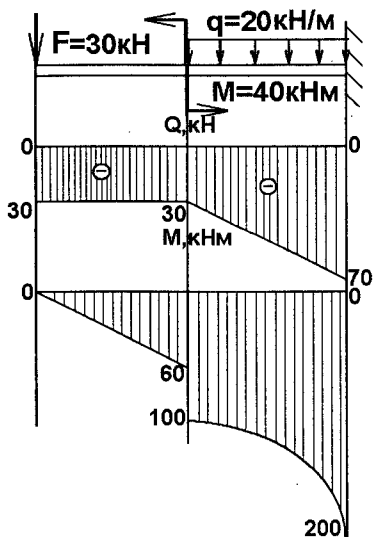


Рис. 4.11.

Таким образом, определяем по

эпюре, что $M_{max} = 200 \text{ кНм}$.

Согласно условию прочности при изгибе

и условию данной задачи $\sigma_{max} = \frac{M_{изг}}{W_X} \leq$

$[\sigma]$, тогда необходимый момент сопротивления сечения

$$W_X = \frac{M_X}{[\sigma]} \text{ и}$$

$$W_X = \frac{200 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1250 \text{ см}^3.$$

$W_X = \frac{bh^2}{6}$ и учитывая, что $h/b=2$ значит

$$h=2b \text{ то } W_X = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3} \text{ тогда } b = \sqrt[3]{\frac{3W_X}{2}} =$$

$$\sqrt[3]{1875} = 12,33 \text{ см, тогда } h=24,66 \text{ см.}$$

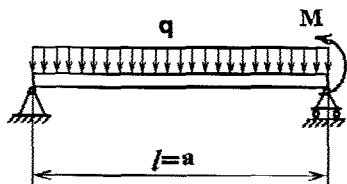


Рис. 4.12.

Задача 4.7. Подобрать двутавровое поперечное сечение для балки, указанной на рисунке 4.12. На указанной схеме $q=14$ кН/м, $M=20$ кНм, длина пролета $l=4$ м. Допускаемое напряжение материала $[\sigma] = 180$ МПа.

Задача 4.8. Подобрать (круглое) и двутавровое сечение для консольной балки, указанной на рисунке 4.10 при расчетном сопротивлении материала $R=180$ МПа, коэффициент условий работы $\gamma=1$.

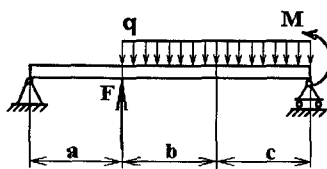


Рис. 4.13.

Задача 4.8. Проверить прочность указанной на рисунке 4.13 балки двутаврового сечения № 20, при $[\sigma]=160$ МПа. Нагрузка: $q=12$ кН/м, $M=20$ кНм, $F=20$ кН. Длина участков $a=1,2$ м, $b=1,6$ м, $c=1,6$ м.

Тема 5. Перемещения при изгибе. Интегрирование дифференциального уравнения упругой линии балки.

Первым характерным перемещением при изгибе являются прогиб v - это перемещение центра тяжести сечения в направлении главной оси сечения, при этом ось балки искривляется по кривой с уравнением $v = f(z)$, которую называют *упругой линией* или *линией прогибов балки*.

Вторым характерным перемещением произвольного поперечного сечения является его угол поворота φ относительно оси X .

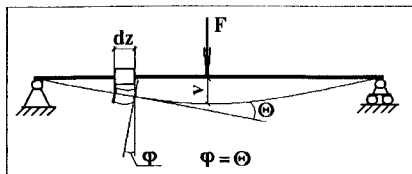


Рис. 5.1.

При малых углах $\operatorname{tg} \theta = \theta$ и, ввиду равенства $\theta = \varphi$ (рис.5.1), имеем простую зависимость между функцией углов поворота сечений и функцией прогибов (деформациями сдвига пренебрегаем):

$$\varphi = \frac{dv}{dz} = v'. \quad (5.1)$$

Выражение, связывающее изгибающий момент M и создаваемый им угол искривления φ , запишем вместе с (5.1) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EJ} \\ \frac{dv}{dz} = \varphi \end{cases} \quad (5.2)$$

Подставив второе уравнение системы в первое, получим

$$\frac{d^2v}{dz^2} = v'' = \frac{M}{EJ}. \quad (5.3)$$

Перенеся EJ в левую часть, путем последовательного дифференцирования обеих частей равенства, и учетом того, что $\frac{dM}{dz} = Q$ и $\frac{dQ}{dz} = q$ получим зависимости, которые выражают различные факторы

изгибаемого стержня через функцию прогибов $v(z)$. Полезно их для наглядности записать в виде последовательности:

$$\varphi = v'; \quad M = EJv''; \quad Q = (EJv'')'; \quad q = (EJv'')''. \quad (5.4)$$

В случае $EJ = \text{const}$ последние два равенства будут

$$Q = EJv'''; \quad q = EJv''''$$

Если одно из равенств (5.4) рассматривается как дифференциальное уравнение для определения функции прогибов $v(z)$, то все предыдущие могут быть использованы для формулировки соответствующих граничных условий.

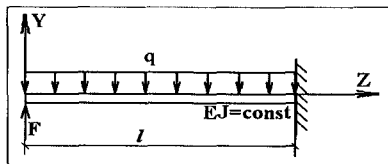


Рис. 5.2.

Задача 5.1. Определить перемещения на свободном конце консольной балки, нагруженной равномерно распределенной по ее длине нагрузкой и сосредоточенной силой F , приложенной на ее свободном конце (рис. 5.2).

Решение: Запишем уравнение (5.3) в виде $EJv'' = M$. Составим выражение для изгибающего момента и подставим его. Для нашей балки изгибающий момент записывается выражением $M(z) = Fz - q \frac{z^2}{2}$, следовательно, получаем $EJv'' = Fz - q \frac{z^2}{2}$.

Интегрируя полученное уравнение, имеем

$$1) \quad EJv' = F \frac{z^2}{2} - q \frac{z^3}{6} + C_1.$$

$$2) \quad EJv = F \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} + C_1 z + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 получаем из граничных условий, которыми являются условия закрепления концов стержня.

Поскольку рассматриваемая балка – жестко защемленная одним концом, то перемещения в такой заделке невозможны. Тогда в заделке

при $z = l, v'(l) = 0$, тогда $0 = F \frac{l^2}{2} - q \frac{l^3}{6} + C_1$ и $C_1 = q \frac{l^3}{6} - F \frac{l^2}{2}$.

при $z = l, v(l) = 0$, тогда $0 = F \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} + \left(q \frac{l^3}{6} - F \frac{l^2}{2} \right) l + C_2$,

$$\text{или } 0 = F \frac{l^3}{6} - q \frac{l^4}{24} + q \frac{l^4}{6} - F \frac{l^3}{2} + C_2,$$

$$\text{в итоге } 0 = q \frac{l^4}{8} - F \frac{l^3}{3} + C_2, \text{ то есть } C_2 = F \frac{l^3}{3} - q \frac{l^4}{8}.$$

В результате интегрирования мы получили уравнения для определения перемещений в любой точке заданной балки:

$$1) v'(z) = \varphi(z) = \frac{1}{EJ} \left(F \frac{z^2}{2} - q \frac{z^3}{6} + q \frac{l^3}{6} - F \frac{l^2}{2} \right).$$

$$2) v(z) = \frac{1}{EJ} \left(F \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} + \left(q \frac{l^3}{6} - F \frac{l^2}{2} \right) z + F \frac{l^3}{3} - q \frac{l^4}{8} \right).$$

По условию задачи определяем перемещения на свободном конце балки, в точке $z = 0$. Получаем, что

$$1) v'(0) = \varphi(0) = \frac{1}{EJ} \left(q \frac{l^3}{6} - F \frac{l^2}{2} \right), \text{ и } 2) v(0) = \frac{1}{EJ} \left(F \frac{l^3}{3} - q \frac{l^4}{8} \right).$$

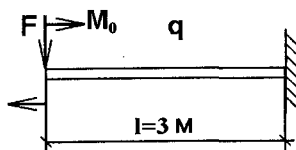


Рис. 5.3

Задача 5.2. Для стальной балки, защемленной одним концом (рис. 5.3), путем интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси определить значения угла поворота и прогиба на свободном конце балки, если $F=20\text{ кН}$, $M_0=30\text{ кНм}$, $l=3\text{ м}$, сечение – двутавр № 20.

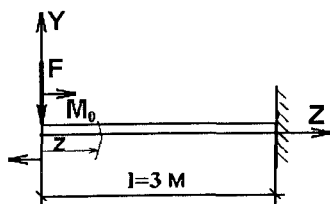


Рис. 5.4.

Решение: Согласно условию нагружения, составляем уравнение упругой линии балки (рис. 5.4): $EI\ddot{y} = M_0 - F \cdot z$. Интегрируем составленное уравнение.

$$EI\dot{y} = M_0 \cdot z - \frac{F \cdot z^2}{2} + C_1.$$

$$EIy = M_0 \frac{z^2}{2} - \frac{F \cdot z^3}{6} + C_1 z + C_2.$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из граничных условий, которыми являются условия закрепления концов стержня.

$$\text{При } z = l, \dot{y} = \varphi(z) = 0 \rightarrow 0 = M_0 \cdot l - \frac{F \cdot l^2}{2} + C_1 \text{ тогда } C_1 = \frac{F \cdot l^2}{2} - M_0 \cdot l.$$

$$\text{При } z = l, y = f(z) = 0 \rightarrow 0 = M_0 \frac{l^2}{2} - \frac{F \cdot l^3}{6} + C_1 l + C_2 \text{ то есть}$$

$$C_2 = \frac{F \cdot l^3}{6} - M_0 \frac{l^2}{2} - \frac{F \cdot l^3}{2} + M_0 \cdot l^2 = M_0 \cdot l^2 - \frac{F \cdot l^3}{3}$$

Таким образом, угловое перемещение на свободном конце при $z = 0$,

$$\varphi_0 = \dot{y} = \frac{C_1}{EI}$$

$$\varphi_0 = \frac{F \cdot l^2}{2EI} - \frac{M_0 \cdot l}{EI} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1,85 \cdot 10^{-5}} - \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,85 \cdot 10^{-5}} = 0.$$

Прогиб, вертикальное перемещение, на свободном конце при $z = 0$,

$$f_0 = \frac{C_2}{EI}$$

$$f_0 = \frac{M_0 \cdot l^2}{EI} - \frac{F \cdot l^3}{3EI} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 9}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,85 \cdot 10^{-5}} - \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 27}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1,85 \cdot 10^{-5}} = 0,024 \text{ м} = 24 \text{ мм}.$$

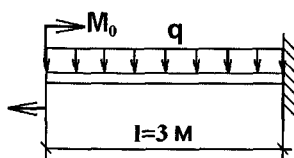


Рис. 5.5.

Задача 5.3. Для балки, защемленной одним концом, путем интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси определить значения угла поворота и прогиба на свободном конце балки (рис. 5.5),

если $q=20$ кН/м, $M_0=30$ кНм, $l=3$ м, сечение – двутавр № 22, для которого $J = 2250 \text{ см}^4$.

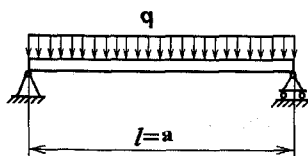


Рис. 5.6.

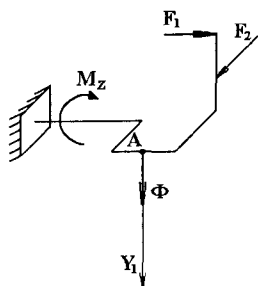
Задача 5.4. Для двухопорной балки, изображенной на рисунке 5.6 определить углы поворота в опорных сечениях, а также максимальный прогиб балки, если $q=20$ кН/м, а длина пролета $a=4$ м.

Материал сталь $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $J = 1840 \text{ см}^4$.

Тема 6. Определение перемещений при помощи интегралов Мора. Способ Верещагина.

6.1. Определение обобщенного перемещения с помощью интегралов Мора.

Для определения перемещений часто используется метод, основанный на принципе возможных перемещений и использующийся при определении обобщенных перемещений в общем случае нагружения.



Согласно ему, если необходимо определить перемещение в точке, где не приложены внешние силы, мы сами прикладываем в этой точке внешнюю силу Φ в интересующем нас направлении (рис. 6.1). Далее, составляется выражение потенциальной энергии системы с учетом силы Φ . Дифференцируя его по Φ , находим перемещение рассматриваемой точки по направлению силы Φ .

Рис. 6.1.

Теперь осталось «вспомнить», что на самом деле $\Phi=0$. Так определяется искомое перемещение.

В общем случае нагружения выражение для потенциальной энергии системы выглядит так:

$$U = \int_0^l \frac{(M_{ZP} + M_{Z1} \cdot \Phi)^2 dz}{2GJ_\rho} + \int_0^l \frac{(M_{XP} + M_{X1} \cdot \Phi)^2 dz}{2EJ_X} + \int_0^l \frac{(M_{YP} + M_{Y1} \cdot \Phi)^2 dz}{2EJ_Y} + \\ + \int_0^l \frac{(N_P + N_1 \cdot \Phi)^2 dz}{2EA} + \int_0^l \frac{k_X (Q_{XP} + Q_{X1} \cdot \Phi)^2 dz}{2GA} + \int_0^l \frac{k_Y (Q_{YP} + Q_{Y1} \cdot \Phi)^2 dz}{2GA}.$$

Дифференцируя это выражение по Φ и, полагая после этого $\Phi=0$, находим перемещение в точке А:

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial \Phi}|_{\Phi=0} = \int_0^l \frac{M_{ZP} \cdot M_{Z1} dz}{GJ_\rho} + \int_0^l \frac{M_{XP} \cdot M_{X1} dz}{EJ_X} + \int_0^l \frac{M_{YP} \cdot M_{Y1} dz}{EJ_Y} + \\ + \int_0^l \frac{N_P \cdot N_1 dz}{EA} + \int_0^l \frac{k_X (Q_{XP} \cdot Q_{X1}) dz}{GA} + \int_0^l \frac{k_Y (Q_{YP} \cdot Q_{Y1}) dz}{GA}. \quad (6.1)$$

Эти интегралы носят название *интегралов Мора*.

6.2. Способ Верещагина.

Основным недостатком определения перемещений с помощью интегралов Мора является необходимость составления аналитического подынтегрального выражения. Однако, если стержень состоит из прямых участков с постоянной жесткостью, операцию интегрирования можно упростить. Это упрощение основано на том, что эпюры от единичных факторов на прямолинейных участках оказываются линейными.

Положим, на участке длиной l нужно взять интеграл от произведения двух функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$

$J = \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz$, при условии, что хотя бы одна из функций – линейная.

Пусть $f_2(z) = b + kz$, тогда

$$J = \int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) dz = b \int_0^l f_1(z) dz + k \int_0^l z f_1(z) dz.$$

Первый интеграл представляет собой площадь, ограниченную кривой $f_1(z)$, то есть площадь эпюры $f_1(z)$ (рис. 6.2) – здесь штриховка площади эпюры $f_1(z)$ применена для наглядности.

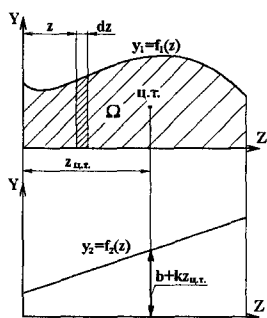


Рис. 6.2.

$$J = \int_0^l f_1(z) \cdot dz = \Omega_1.$$

Второй интеграл представляет собой статический момент этой площади относительно оси ординат, то есть

$$\int_0^l z f_1(z) dz = \Omega_1 \cdot z_{ц.т.},$$

где $z_{ц.т.}$ – координата центра тяжести первой эпюры. Теперь получаем:

$$J = \Omega_1 \cdot (b + kz_{ц.т.}), \text{ но } b + kz_{ц.т.} = f_2(z_{ц.т.}), \text{ следовательно}$$

$$J = \Omega_1 \cdot f_2(z_{ц.т.}). \quad (8.2)$$

Таким образом, по способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади первой (нелинейной) эпюры на ординату второй (линейной) эпюры под центром тяжести первой.

Если обе эпюры линейны, то операция перемножения обладает свойством коммутативности, то есть безразлично, площадь какой эпюры (1-й или 2-й) умножается на ординату эпюры под центром тяжести (2-й или 1-й соответственно).

В каждый из интегралов Мора входит произведение функций внутренних силовых факторов $M_{ZP} \cdot M_{Z1}$, $M_{XP} \cdot M_{X1}$, $N_P \cdot N_1$ и т.д. Способ Верещагина применим к любому из шести интегралов; только результат произведения эпюр делится на соответствующую жесткость стержня, например при кручении GJ_ρ , а при поперечном изгибе – на EJ_x или EA при растяжении и GA при сдвиге.

Задача 6.1. Определить вертикальное перемещение точки B консольной ступенчатой балки, изображенной на рисунке 6.3.

Решение. Строим эпюру изгибающих моментов M_p от действия внешней сосредоточенной силы F :

$$M_B = 0; \quad M_A = -F \cdot 2l \quad (\text{эпюра линейная}).$$

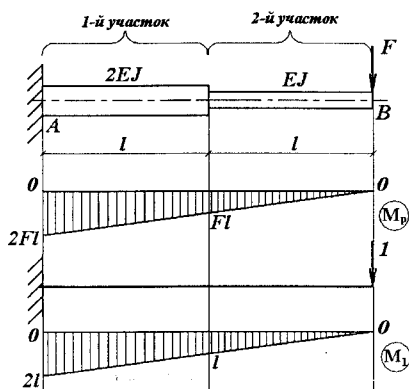


Рис. 6.3.

По условию задачи требуется определить вертикальное перемещение y_B точки B консольной балки, поэтому строим единичную эпюру M_1 , от действия вертикальной единичной силы $F_1 = 1$, приложенной в точке B .

Учитывая, что консольная балка состоит из двух участков с разной жесткостью на изгиб,

эпюры M_1 и M перемножаем с помощью правила Верещагина по участкам отдельно.

Эпюры M_1 и M первого участка перемножаем по следующей формуле для трапециевидных эпюр (рис. 6.4):

$$\frac{1}{6}(2ab + 2cd + ad + bc).$$

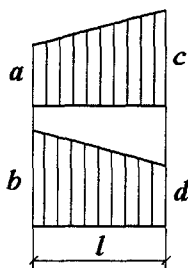


Рис. 6.4.

Эпюры второго участка перемножаются как площадь эпюры M второго участка $\frac{F \cdot l^2}{2}$ на ординату $\frac{2 \cdot l}{3}$ эпюры M_1 второго участка под центром тяжести треугольной эпюры M этого участка.

В этом случае формула определения перемещений с помощью интеграла Мора дает:

$$\Delta = \sum \int_0^l \frac{M_{XP} \cdot M_{X1} dz}{EJ_X},$$

тогда, в итоге, перемещение точки В равно:

$$v_B = \frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{6} (2 \cdot 2Fl \cdot 2l + 2 \cdot Fl \cdot l + 2Fl \cdot 2l + Fl \cdot 2l) + \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} Fl \cdot l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{3Fl^3}{2EJ}.$$

Знак перемещения положителен, так как совпадает по направлению с единичной силой $F_1 = 1$, в противном случае (если знак перемещения отрицателен) - направление перемещения не совпадает с единичной силой.

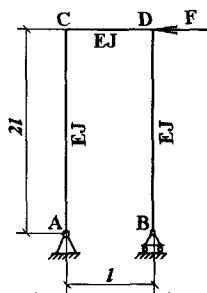


Рис. 6.5.

Задача 6.2. Определить горизонтальное смещение опорной точки В ломаного стержня (рамы), изображенного на рис. 6.5. Жесткость на изгиб всех участков рамы постоянна и равна EJ.

Решение. Строим эпюру изгибающего момента от действия внешней силы F. Для этого предварительно определяем опорные реакции (см. рис. 6.6, а):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad H - F = 0, \text{ откуда } H = F.$$

$$\sum M_A(F_i) = 0; \quad F \cdot 2l - R_B \cdot l = 0, \text{ откуда } R_B = 2F.$$

$$\sum M_B(F_i) = 0; F \cdot 2l - R_B \cdot l = 0, \text{ откуда } R_A = 2F.$$

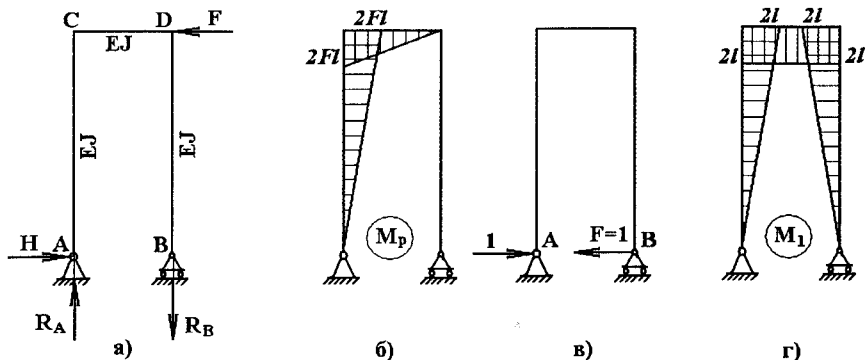


Рис. 6.6.

На эпюре изгибающего момента от внешней нагрузки (рис. 6.6, б):

$$M_A = -H \cdot 0 = 0; M_C = -H \cdot 2l = -2Fl; M_D = M_B = 0.$$

По условию требуется определить горизонтальное смещение опорной точки В. Поэтому, прикладываем в точке В единичную горизонтальную силу $F = 1$ (рис. 6.6, в). Строим эпюру изгибающих моментов M_1 от единичной нагрузки (рис. 6.6, г). Горизонтальное смещение опорной точки В определяем перемножением эпюр M_p и M_1 на соответствующих участках.

$$\Delta_B = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} 2Fl \cdot 2l \cdot \frac{2}{3} 2l + \frac{1}{2} 2Fl \cdot l \cdot 2l \right] = \frac{14Fl^3}{3EJ}.$$

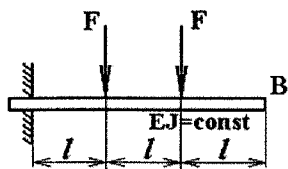


Рис. 6.7.

Задача 6.3. Определить вертикальное перемещение точки В консольной балки, изображенной на рисунке 6.7. Жесткость на изгиб балки постоянна и равна EJ.

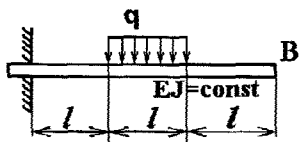


Рис. 6.8.

Задача 6.4. Определить вертикальное перемещение точки B консольной балки, изображенной на рисунке 6.8. Жесткость на изгиб балки постоянна и равна EJ .

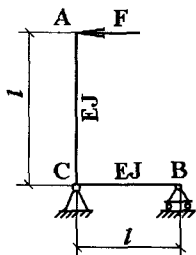


Рис. 6.9

Задача 6.5. Определить горизонтальное смещение опорной точки A ломаного стержня (рамы), изображенного на рисунке 6.9. Жесткость на изгиб всех участков рамы постоянна и равна EJ .

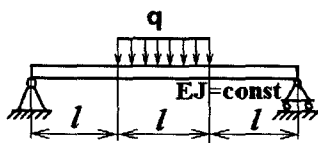


Рис. 6.10.

Задача 6.6. Определить максимальное вертикальное перемещение (центрального сечения) указанной на рисунке 6.10 двухопорной балки. Балка имеет постоянную по длине жесткость на изгиб EJ .

Тема 7. Простейшие статически неопределимые системы при изгибе.

Вспомним, что *статически неопределимыми* называются системы, в которых число неизвестных усилий превосходит число уравнений равновесия, записываемых для этой системы. *Степень статической неопределимости системы* (число дополнительных, лишних связей) определяется разностью числа уравнений равновесия и количеством неизвестных усилий.

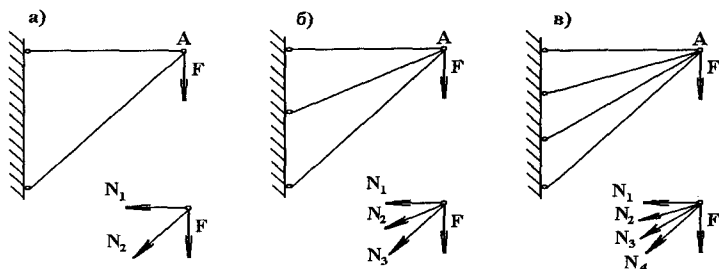


Рис. 7.1.

На рисунке 7.1, а показан кронштейн, состоящий из двух стержней. Усилия в стержнях легко определяются из условий равновесия узла А. Если конструкцию кронштейна усложнить (рис. 7.1, б), то усилия в стержнях прежним способом уже определены быть не могут: для узла А могут быть по-прежнему составлены только два уравнения равновесия, а число неизвестных сил равно трем. Система, показанная на рисунке 7.1, б, один раз статически неопределима. Усложняя конструкцию дальше и вводя новые стержни, можно получить два раза статически неопределимую систему (рис. 7.1, в).

Простейшими статически неопределимыми называются системы, для которых степень статической неопределимости равна единице, то есть необходимо составить одно дополнительное уравнение для решения системы.

Наиболее широко распространенным методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является *метод сил*, согласно которому заданная система освобождается от дополнительных связей, а их действие заменяется силами и моментами.

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой, и она называется *основной системой*.

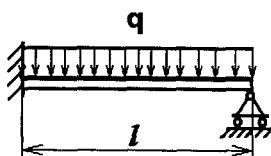
После выбора основной системы нужно составить уравнения совместности деформаций. Это уравнение имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0, \quad (7.1)$$

где X_1 – одна из неизвестных опорных реакций; δ_{11} – перемещение от единичной силы в направлении отброшенной опорной реакции X_1 ; Δ_{1F} – перемещение в направлении отброшенной опорной реакции X_1 от внешней нагрузки.

Уравнение (7.1) выражает условие равенства нулю смещения поперечного сечения заданной балки в направлении искомой опорной реакции и называется *каноническим уравнением метода сил*.

Задача 7.1. Для приведенной на рисунке 7.2 однопролетной балки,



нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q определить реакции опор, построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента. Подобрать стандартное сечение двутавра.

Рис. 7.2.

Решение: Определим опорные реакции для заданной балки. Для определения опорных реакций H , R_A , R_B , M_A составим уравнения равновесия (рис. 7.3):

$\sum X = H_A = 0$, откуда $H_A = 0$, далее

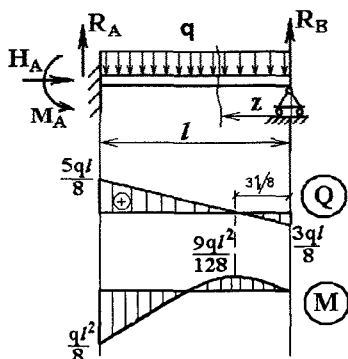


Рис. 7.3.

Следовательно, наша балка является один раз статически неопределимой.

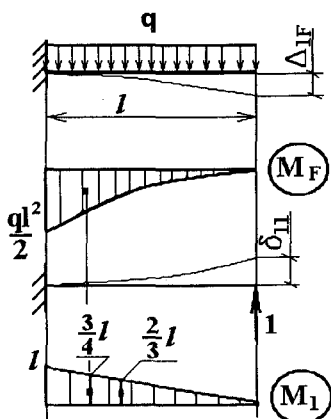


Рис. 7.4.

$\sum M_A = R_B l - ql^2/2 + M_A = 0$, тогда $M_A = ql^2/2 - R_B l$;

$\sum M_B = M_A - ql^2/2 - R_A l = 0$, тогда $R_A = M_A/l + ql/2 = ql - R_B$.

Для определения трех опорных реакций M_A , R_B , R_A (рис. 7.3) имеем систему двух уравнений. Таким образом, задача является статически неопределимой. Для ее решения необходимо привлечь одно дополнительное уравнение.

Итак, отбросим одну лишнюю опорную реакцию $R_B = X_1$. В результате получим консольную балку, показанную на рисунке 7.4. Для этой полученной консольной балки строим эпюру изгибающих моментов M_F от внешней нагрузки.

Для определения вертикального смещения Δ_{IF} точки B, построим эпюру изгибающих моментов M_1 от единичной силы, приложенной в направлении отброшенной опорной реакции R_B . Затем, используя правило Верещагина, находим перемещение Δ_{IF} , перемножая эпюру от внешней нагрузки M_F на единичную M_1 :

$$\Delta_{1F} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l \cdot \frac{3}{4} l \right) = -\frac{ql^4}{8EI}$$

Для определения перемещения δ_{11} необходимо умножить по правилу Верещагина эпюру M_1 саму на себя:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l \right] = \frac{l^3}{3EI}$$

Подставим полученные результаты в формулу (7.1), получим:

$$\frac{l^3}{3EI} X_1 - \frac{ql^4}{8EI} = 0, \text{ откуда } X_1 = R_B = \frac{3ql}{8}.$$

Из полученных ранее выражений определяем остальные опорные реакции:

$$M_A = \frac{ql^2}{2} - R_B l = \frac{ql^2}{2} - \frac{3}{8} ql^2 = \frac{ql^2}{8}; \quad R_A = ql - R_B = ql - \frac{3}{8} ql = \frac{5}{8} ql.$$

Положительные значения опорных реакций показывают, что предварительно выбранные нами их направления правильны. Отрицательные значения опорных реакций показывают, что выбранные направления необходимо заменить на противоположные.

Теперь можно построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки (рис. 7.3).

Строим эпюру поперечных сил:

$$Q(z) = R_B + qz$$

$$Q(0) = -R_B = -\frac{3}{8} ql \quad Q(l) = -R_B + ql = \frac{5}{8} ql$$

В пролете эпюры Q меняет знак, следовательно, на эпюре момента в точке $Q(z)=0$ будет экстремум. Положение этого сечения определяем так

$$\frac{dM}{dz} = Q = 0, \text{ следовательно, } Q = \frac{3}{8} ql - qz = 0, \text{ и тогда } z = \frac{3}{8} l.$$

Для изгибающего момента уравнение записывается как

$$M(z) = R_B z - \frac{qz^2}{2}.$$

$$M(0) = 0 \qquad M(l) = R_B l - \frac{ql^2}{2} = \frac{3}{8}ql^2 - \frac{ql^2}{2} = -\frac{ql^2}{8}$$

Экстремальное значение изгибающего момента в пролете будет в сечении, где поперечная сила равна нулю, т.е. на расстоянии $z = \frac{3}{8}l$ от правой опоры:

$$M_{\max} = \frac{3}{8}ql \cdot \frac{3l}{8} - \frac{q}{2} \cdot \frac{9l^2}{64} = \frac{9ql^2}{128}.$$

Подставив заданные значения нагрузки и длины пролета балки, получим величины опорных реакций и, соответственно, узловые значения для $Q(z)$ и $M(z)$.

$$Q(0) = -\frac{3}{8} \cdot 4 \cdot 2 = -3 \text{ кН};$$

$$Q(2) = \frac{5}{8} \cdot 4 \cdot 2 = 5 \text{ кН}$$

$$M(0) = 0;$$

$$M(2) = -\frac{1}{8} \cdot 4 \cdot 2^2 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{\max} = \frac{9}{128} \cdot 4 \cdot 2^2 = 1,125 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подберем для заданной балки сечение двутавра:

$$W_x = \frac{2 \cdot 10^3}{120 \cdot 10^6} = 16,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 16,7 \text{ см}^3.$$

Таким образом, подходящим является двутавр № 10 с $W_x = 39,6 \text{ см}^3$ (это наименьшее сечение двутавра).

Задача 7.2. Определить изгибающие моменты в стержнях рамы, показанной на рис. 7.5, *а* и нагруженной силой F . Стержни рамы имеют одинаковое сечение. Рама является один раз статически неопределимой.

Решение: В качестве основной выбираем систему, показанную на рис. 7.5, *б*, превратив закрепленный шарнир в свободный шарнир (каток). Отбросив горизонтальную связь, заменяем ее действие неизвестным усилием X_1 .

Величину усилия X_1 находим из условия равенства нулю горизонтального смещения в катке.

Обозначим перемещение от действия внешней нагрузки через Δ_{1F} .

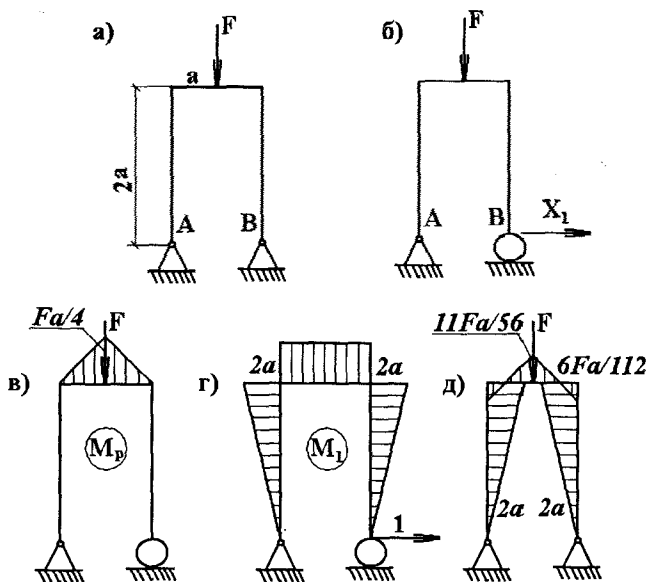


Рис. 7.5.

Условимся говорить, что величину Δ_{1F} , находят «умножением» эпюры « M_1 » (рис. 7.5, г) на эпюру « M_p » (рис. 7.5, в).

По правилу Верещагина получаем:

$$\Delta_{1F} = \left(\frac{2}{EJ}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{Fa}{4}\right) \left(\frac{2a^2}{2}\right) = Fa^2/(4EJ).$$

Найдем теперь горизонтальное перемещение δ_{11} от единичной силы, действующей в направлении силы X_1 . Перемещение от неизвестной силы X_1 , будет равно $X_1 \delta_{11}$.

Для вычисления δ_{11} достаточно умножить эпюру « M_1 » «саму на себя»:

$$\delta_{11} = 28a^3/(3EJ).$$

Так как горизонтальное смещение в катке должно отсутствовать, то

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0,$$

где δ_{11} — перемещение в направлении усилия X_1 от единичной силы;

Δ_{1F} — перемещение в направлении X_1 от внешних сил.

Получаем

$$X_1 = \frac{-\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{3F}{112}.$$

Знак «минус» означает, что сила X_1 , действует противоположно ранее выбранному направлению. Эпюра изгибающих моментов в раме показана на рис. 7.5, д.

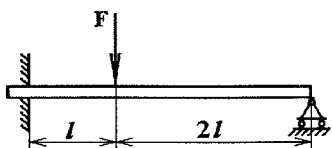


Рис. 7.6.

Задача 7.3. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для указанной на рисунке 7.6 однопролетной балки. Жесткость на изгиб равна $EI = \text{const}$.

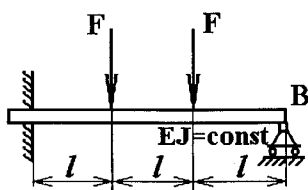


Рис. 7.7.

Задача 7.4. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для указанной на рисунке 7.7 однопролетной балки. Жесткость на изгиб равна $EI = \text{const}$.

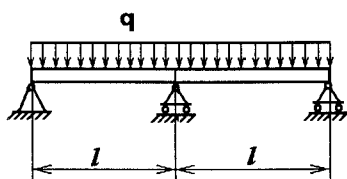


Рис. 7.8.

Задача 7.4. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для указанной на рисунке 7.8 двухпролетной балки. Жесткость балки на изгиб постоянна и равна EJ .

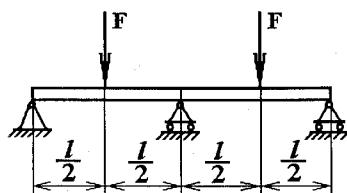


Рис. 7.9.

Задача 7.4. Построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента для указанной на рисунке 7.9 двухпролетной балки. Жесткость балки на изгиб постоянна и равна EJ .

Тема 8. Сложное сопротивление.

При сложном сопротивлении элементы конструкций или машин подвергаются действию сил, вызывающих одновременно не одну, а две и более деформаций.

При расчете на сложное сопротивление обычно используют принцип независимости действия сил, т.е. предполагают, что влиянием деформаций, вызванных одной из приложенных к упругой системе нагрузок, на расположение, а, следовательно, и на результаты действия остальных нагрузок, можно пренебречь. Деформации от различного вида нагрузок складываются алгебраически или геометрически.

8.1. Косой изгиб.

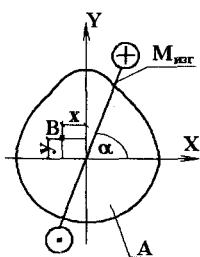


Рис. 8.1.1.

Под косым изгибом понимается такой случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает с главной осью сечения (рис. 8.1.1). Косой изгиб удобнее всего рассматривать как одновременный изгиб в двух главных плоскостях ZY и ZX. Для этого изгибающий момент $M_{изг}$ раскладывается на составляющие моменты относительно осей X и Y (оси X и Y - главные центральные оси сечения):

$$M_X = M_{изг} \cdot \sin \alpha,$$

$$M_Y = M_{изг} \cdot \cos \alpha.$$

Нормальное напряжение в точке B, имеющей координаты x и y определяется суммой напряжений, обусловленных моментами M_X и M_Y :

$$\sigma = \sigma_B = \frac{M_X \cdot y}{J_X} + \frac{M_Y \cdot x}{J_Y}, \quad (8.1)$$

$$\sigma = M_{изг} \cdot \left(\frac{\sin \alpha \cdot y}{J_X} + \frac{\cos \alpha \cdot x}{J_Y} \right). \quad (8.2)$$

Уравнение нейтральной линии в сечении найдем из условия ($\sigma = 0$):

$$y = -x \cdot \frac{I_X}{I_Y} \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \quad (8.3)$$

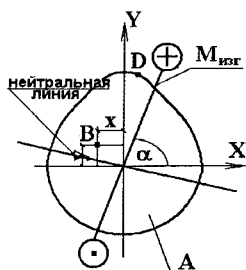


Рис. 8.1.2.

Так как эпюра нормальных напряжений в сечении линейна, то максимальное напряжение возникает в точке, наиболее удаленной от нейтральной линии (например, точка D на рисунке 8.1.2). Пусть координаты этой точки будут x_1 , y_1 . Тогда из выражения (8.2) получаем:

$$\sigma_{\max} = \sigma_D = \frac{M_X \cdot y_1}{I_X} + \frac{M_Y \cdot x_1}{I_Y}. \quad (8.4)$$

Условие прочности при косом изгибе записывается в виде:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_X \cdot y_1}{I_X} + \frac{M_Y \cdot x_1}{I_Y} \leq R, \quad (8.5)$$

где R – расчетное сопротивление материала стержня.

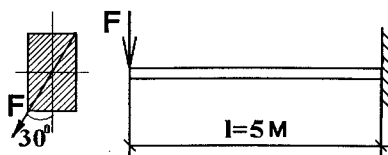


Рис. 8.1.3.

Задача 8.1. Подобрать прямоугольное ($h/b=2$) сечение стержня, подвергающегося действию силы $F=2$ кН, линия действия которой составляет с вертикалью угол 30° , $l=5$ м, $[\sigma]=10$ МПа (рис. 8.1.3).

Решение: поскольку линия действия нагрузки не совпадает с главными осями сечения, имеем дело с косым изгибом, для которого условие прочности записывается в виде:

$$\sigma_{\max} = M_{\text{изг}} \cdot \left(\frac{\sin \alpha \cdot y}{I_X} + \frac{\cos \alpha \cdot x}{I_Y} \right) \leq [\sigma].$$

Максимальный изгибающий момент действует в заделке

$$M_{\text{изг}} = Fl = 2 \cdot 5 = 10 \text{ кНм.}$$

Моменты инерции записываем, исходя из условия $h/b=2$, т.е. $h=2b$, тогда

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{b \cdot (2b)^3}{12} = \frac{8 \cdot b^4}{12} = \frac{2}{3} b^4; \quad I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{2b \cdot b^3}{12} = \frac{1}{6} b^4.$$

Плоскость действия момента составляет с осью X угол $\alpha=90-30=60^\circ$. Точками, наиболее удаленными от нейтральной линии будут точки с координатами $(-b/2; -b)$. Возьмем точку $(b/2; b)$ и, окончательно, формула расчета будет иметь вид:

$$10 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{0,866 \cdot b \cdot 3}{2 \cdot b^4} + \frac{0,5 \cdot b \cdot 6}{2 \cdot b^4} \right) \leq [\sigma].$$

После сокращения переменных получаем формулу в виде

$$10 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1,299}{b^3} + \frac{1,5}{b^3} \right) \leq 10 \cdot 10^6,$$

откуда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2,799}{1 \cdot 10^3}} = 0,141 \text{ м} = 14,1 \text{ см. Откуда } h=2b=28,2 \text{ см}$$

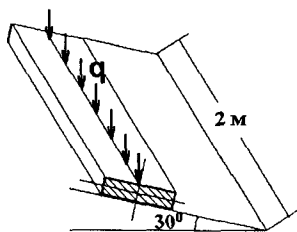


Рис. 8.1.4.

Задача 8.2. Дощатые обрешетины кровли, шарнирно опертые на стропила, подвергаются действию вертикально направленной равномерно распределенной нагрузки q (рис. 8.1.4). Определить наибольшую допускаемую величину этой нагрузки при $[\sigma]=10$ МПа. Размер доски 20×5 см.

Решение: Поскольку плоскость действия нагрузки составляет угол α с главной центральной осью X, имеем случай косого изгиба (рис. 8.1.5). Условие прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{\max} = M_{\text{изг}} \cdot \left(\frac{\sin \alpha \cdot y}{I_X} + \frac{\cos \alpha \cdot x}{I_Y} \right) \leq [\sigma],$$

здесь максимальные напряжения – напряжения, возникающие в наиболее удаленных от нейтральной линии точках опасного сечения.

Рассчитаем параметры, входящие в формулу:

$$I_X = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{20 \cdot 5^3}{12} = 208,3 \text{ см}^4 = 2,08 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$I_Y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{5 \cdot 20^3}{12} = 3333,3 \text{ см}^4 = 3,33 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

$$\sin \alpha = \sin(90 + 30) = \cos 30 = 0,866;$$

$$\cos \alpha = \cos(90 + 30) = -\sin 30 = -0,5.$$

Нейтральная линия в сечении определяется по формуле:

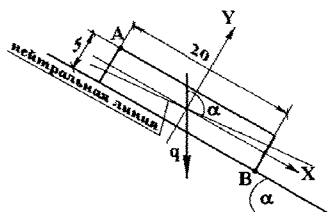


Рис. 8.1.5.

$$y = -\frac{I_x}{I_y} \cdot x \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \text{ то есть}$$

$$y = \frac{2,08 \cdot 10^{-6}}{3,33 \cdot 10^{-5}} \cdot x \cdot \frac{0,5}{0,866} = 0,04 \cdot x.$$

Точками, наиболее удаленными от нейтральной линии, являются вершины сечения во второй и четвертой четверти.

Примем т. А с координатами $x_A = -10$ см, $y_A = 2,5$ см.

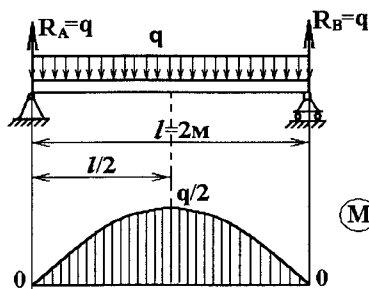


Рис. 8.1.6.

Изгибающий момент определяем из условия нагружения балки: балка длиной 2м нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности q (рис. 8.1.6), тогда $M_{\text{изг}} = 0,5q$ и, следовательно, получаем:

$$0,5q \cdot \left(\frac{0,866 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{2,08 \cdot 10^{-6}} + \frac{-0,5 \cdot (-10 \cdot 10^{-2})}{3,33 \cdot 10^{-6}} \right) \leq$$

$10 \cdot 10^6$, откуда

$$q \leq 10 \cdot 10^6 \div \left[\left(\frac{0,866 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}}{2,08 \cdot 10^{-6}} + \frac{-0,5 \cdot (-10 \cdot 10^{-2})}{3,33 \cdot 10^{-6}} \right) \cdot 0,5 \right] = 787 \text{ Н/м.}$$

Задача 8.3. Балка двутаврового сечения № 20 свободно опирается на прогоны, наклоненные под углом 30° к горизонтали. Расстояние между осями прогонов 4 м. Балка нагружена посередине пролета сосредоточенной силой $F=8$ кН. Пренебрегая собственным весом балки, определить напряжения в вершинах опасного сечения и угол наклона нейтральной оси сечения к главной оси X .

Задача 8.4. При установке на опоры двутавра № 60, предназначенного для работы на изгиб в вертикальной плоскости, совпадающей со стенкой двутавра, была допущена ошибка, и стенка двутавра отклонилась от

вертикали на угол $\varphi=2^\circ$. Определить связанное с этим увеличение наибольших нормальных напряжений двутавра.

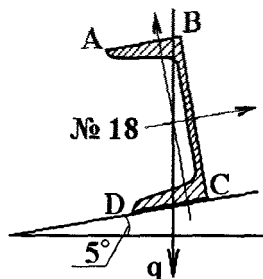


Рис. 8.1.7.

Задача 8.5. Шарнирно опертая по концам балка длиной 4 м несет равномерно распределенную вертикально направленную нагрузку интенсивностью $q=5$ кН/м. Поперечное сечение балки - швеллер № 18. Стенка швеллера наклонена в плоскости действия нагрузки под углом 5° (рис. 8.1.7). Определить нормальные напряжения в вершинах сечения A, B, C, и D опасного сечения балки и построить эпюры этих напряжений по линиям AB, BC и CD.

Тема 8.2. Внецентренное растяжение и сжатие.

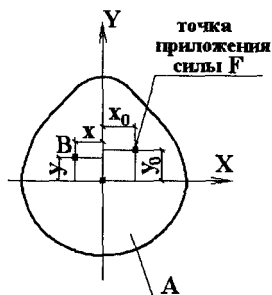


Рис. 8.2.1.

При *внецентренном растяжении и сжатии* равнодействующая внешних сил не совпадает с осью стержня, как при обычном растяжении, а смещена относительно оси Z и остается ей параллельной (рис. 8.2.1).

Пусть точка A — точка приложения равнодействующей внешних сил F с координатами y_0, x_0 . Тогда относительно главных осей сила F дает моменты $M_x = Fy_0$ и $M_y = Fx_0$.

В произвольной точке B с координатами B ($x; y$) нормальные напряжения σ определяются следующим выражением:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y \cdot y_0}{J_x} + \frac{F \cdot x \cdot x_0}{J_y}. \quad (8.6)$$

Максимальные напряжения в сечении возникают в точке, наиболее удаленной от нейтральной линии сечения, которая определяется из условия ($\sigma=0$):

$$\frac{1}{A} + \frac{y \cdot y_0}{J_X} + \frac{x \cdot x_0}{J_Y} = 0. \quad (8.7)$$

Пусть точка D с координатами x_1 и y_1 (рис. 8.2.2) – точка, в которой возникают наибольшие напряжения:

$$\sigma_{max} = F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{y_1 \cdot y_0}{J_X} + \frac{x_1 \cdot x_0}{J_Y} \right). \quad (8.8)$$

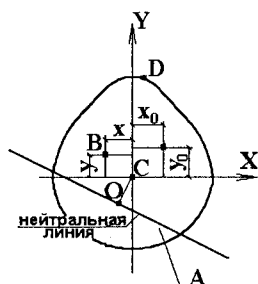


Рис. 8.2.2.

При внецентренном растяжении и сжатии нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. При положительных y_0 , x_0 по крайней мере одна из величин y или x , входящих в уравнение (8.7) должна быть отрицательной. Следовательно, в общем случае, если точка приложения внешней силы F находится в первом квадранте, то нейтральная линия проходит с противоположной стороны центра тяжести через 2-й, 3-й и 4-й квадранты (рис. 8.2.2).

Отсюда следует, что по мере приближения точки приложения внешней силы к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.

При внецентренном растяжении и сжатии нейтральная линия может как пересекать сечение, так и находиться за его пределами. В первом случае в сечении возникают напряжения обоих знаков (как растягивающие, так и сжимающие). Во втором случае во всех точках сечения напряжения имеют один знак.

В окрестности центра тяжести существует область, называемая *ядром сечения*. Если след приложения внешней силы F находится внутри ядра сечения, напряжения во всех точках сечения будут одного знака. Если же сила приложена за пределами ядра сечения, то нейтральная линия пересекает

сечение, и напряжения в сечении будут как растягивающими, так и сжимающими. Когда точка приложения силы находится на границе ядра сечения, нейтральная линия касается контура сечения.

Условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии) записывается в следующем виде:

$$\sigma_{max} = F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{y_1 \cdot y_0}{J_X} + \frac{x_1 \cdot x_0}{J_Y} \right) \leq R, \quad (8.9)$$

где R - расчетное сопротивление материала.

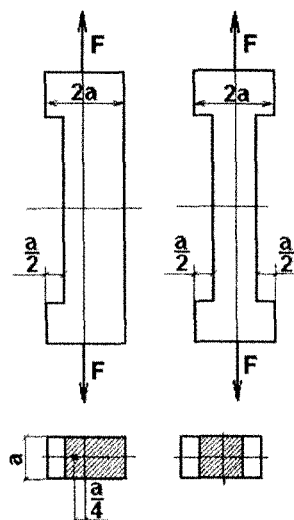


Рис. 8.2.3.

Задача 8.6. Установить, который из стержней (рис. 8.2.3) способен выдержать большую нагрузку без признаков пластических деформаций.

Решение: Для первого стержня: сила F для ослабленного сечения является внецентренной. Её плечо относительно оси Y равно $a/4$, т.е. $x_0 = a/4$. Следовательно, наибольшие растягивающие напряжения для этого сечения равны:

$$\sigma = \frac{F}{a \cdot a^3/2} + \frac{F \cdot (-a/4) \cdot (-3a/4)}{9a^4/32} = \frac{4F}{3a^2}.$$

Для второго стержня сила F является центральной и

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{a^2}.$$

Таким образом, в стержне, имеющем вырезы с двух сторон, напряжения будут меньше.

Задача 8.7. От какого вида напряжений (растяжение или сжатие) произойдет разрушение бетонной колонны прямоугольного сечения, если сжимающая сила приложена: а) в точке А; б) в точке В (рис. 8.2.4). Предел

прочности бетона на сжатие в шесть раз больше, чем предел прочности на растяжение.

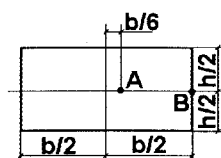


Рис. 8.2.4.

Решение: Данная задача решается в общем виде при рассмотрении каждого варианта нагружения колонны отдельно. Условие прочности при внецентренном растяжении и сжатии определяется по формуле (8.9):

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_0 \cdot y}{I_x} + \frac{F \cdot x_0 \cdot x}{I_y} \leq [\sigma].$$

Координаты точки А приложения силы $x_0 = b/6$ см; $y_0 = 0$. Вследствие равенства нулю y_0 в нуль обращается второе слагаемое в формуле. Тогда:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot x_0 \cdot x}{I_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле координата x – это координата точки наиболее удаленной от нейтральной оси – в этой точке возникают наибольшие напряжения. Уравнение нейтральной оси в сечении, поскольку $\sigma = 0$:

$$\left(\frac{1}{A} + \frac{x_0 \cdot x}{I_y} \right) = 0, \text{ откуда } x = -\frac{hb^3 6}{12bh^3} = -\frac{b}{2}.$$

То есть нейтральная линия проходит через левую границу сечения и в сечении возникают только напряжения одного знака.

$$\sigma_{max} = F \left(\frac{1}{bh} + \frac{b \cdot b 12}{6 \cdot 2hb^3} \right) = \frac{2F}{bh} \leq [\sigma].$$

Так как знак напряжения совпадает со знаком силы, то разрушение в этом случае происходит от сжатия.

Координаты точки В приложения силы $x_0 = b/2$ см; $y_0 = 0$. Вследствие равенства нулю y_0 в нуль обращается второе слагаемое в формуле напряжения. Тогда опять

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot x_0 \cdot x}{I_y} \leq [\sigma].$$

В этой формуле координата x – это координата точки наиболее удаленной от нейтральной оси – в этой точке возникают наибольшие напряжения. Нейтральная линия в сечении в этом случае определяется как

$$\frac{1}{bh} + \frac{b \cdot x \cdot 12}{2hb^3} = 0, \text{ откуда } x = -\frac{b}{6}.$$

Таким образом, нейтральная линия проходит через точку, симметричную точке А, поэтому наиболее удаленных точек от нейтральной линии две: с координатами $x=b/2$ в зоне сжатия и с координатами $x=-b/2$ в зоне растяжения. Тогда максимальные напряжения в соответствующих точках

$$\sigma_{max} = F \left(\frac{1}{bh} + \frac{b \cdot b \cdot 12}{2 \cdot 2hb^3} \right) = \frac{4F}{bh} \leq [\sigma_{сж}] \text{ (сжатие);}$$

$\sigma_{max} = F \left(\frac{1}{bh} - \frac{b \cdot b \cdot 12}{2 \cdot 2hb^3} \right) = -\frac{2F}{bh} \leq [\sigma_p]$ (растяжение, поскольку знак – противоположен знаку действующей силы).

Напряжения сжатия вдвое больше напряжений растяжения, но поскольку предел прочности бетона на сжатие в шесть раз больше, чем его предел прочности на растяжение, следовательно, разрушение колонны в этом случае происходит от растяжения.

Задача 8.8. На рис. 8.2.5 изображено поперечное сечение бруса и показаны центры тяжести четырех простых элементов, составляющих это поперечное сечение.

Требуется построить ядро сечения для заданного поперечного сечения.

Решение. Найдём положение центра тяжести всего поперечного сечения. Главная ось Y совпадает с осью симметрии сечения. Вычислим площади четырех простых элементов:

$$A_1 = 0,6 \cdot \frac{1,4}{2} = 0,42 \text{ м}^2; \quad A_2 = 0,5 \cdot 1,4 = 0,7 \text{ м}^2.$$

$$A_3 = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48 \text{ м}^2; \quad A_4 = \pi \cdot \frac{0,3^2}{2} = 0,1413 \text{ м}^2.$$

Площадь всего поперечного сечения будет

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1,74 \text{ м}^2.$$

Положение главной оси X относительно случайной оси X_1 находим по формуле (3.2.): $y_{ц.т.} = \frac{S_X}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}.$

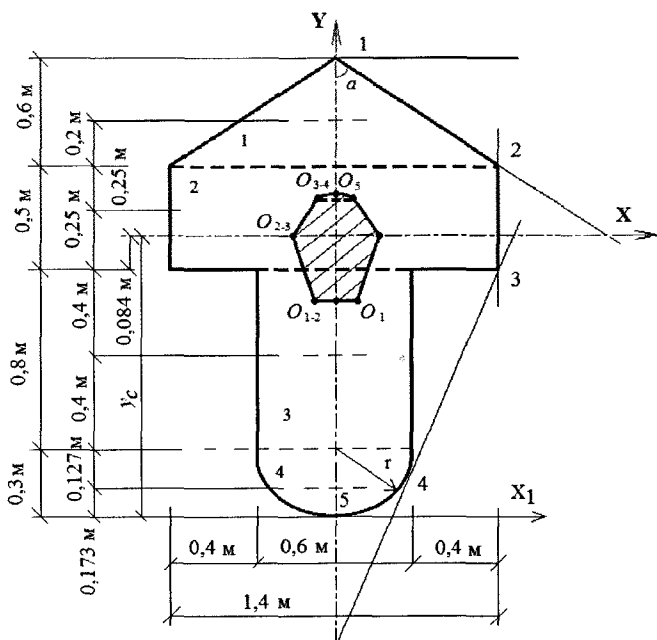


Рис. 8.2.5.

$$\gamma_c = (A_1 \cdot 1,8 + A_2 \cdot 1,35 + A_3 \cdot 0,7 + A_4 \cdot 0,173)/A = 2,061/1,74 = 1,184 \text{ м}$$

Определим главные моменты инерции относительно осей Y и X:

$$I_Y = 2 \cdot \frac{0,6 \cdot 0,7^3}{12} + \frac{0,5 \cdot 1,4^3}{12} + \frac{0,8 \cdot 0,6^3}{12} + 3,14 \cdot \frac{0,3^4}{4 \cdot 2} = 0,16618 \text{ м}^4.$$

$$I_X = \left[\frac{1,4 \cdot 0,6^3}{36} + 0,616^2 \cdot A_1 \right] + \left[\frac{1,4 \cdot 0,5^3}{12} + 0,166^2 \cdot A_2 \right] + \left[\frac{0,6 \cdot 0,8^3}{12} + 0,4842 \cdot A_3 + 0,11 \cdot 0,3^4 - 0,1272 \cdot A_4 + 1,0112 \cdot A_4 \right] = 0,3686 \text{ м}^4.$$

Вычисляем квадраты радиусов инерции поперечного сечения:

$$i_X^2 = \frac{I_X}{A} = \frac{0,3686}{1,74} = 0,2117 \text{ м}^2; \quad i_Y^2 = \frac{I_Y}{A} = \frac{0,16618}{1,74} = 0,0954 \text{ м}^2.$$

Нейтральная линия проходит через точки с координатами $x=0$, $y=b_0$ и $x=a_0$, $y=0$, которые можно вычислить по формулам:

$$a_0 = -\frac{I_Y}{A \cdot x_F}; \quad b_0 = -\frac{I_X}{A \cdot y_F}, \text{ где } x_F, y_F - \text{координаты точки приложения}$$

силы. Эти формулы для рассматриваемого случая примут вид:

$$y_F = -\frac{i_X^2}{b_0}; \quad x_F = -\frac{i_Y^2}{a_0}.$$

Если внешняя сила приложена в пределах ядра сечения, то во всем сечении будут нормальные напряжения одного знака. Предположим, что нулевая линия проходит через точки 1 и 2 поперечного сечения, следовательно, $b_0 = 1,016$ м; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,7}{0,6}$; $\alpha_0 = b_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1,016 \cdot \frac{0,7}{0,6} = 1,1185$ м.

Находим координаты точки приложения сосредоточенной силы:

$$y_F = -\frac{i_X^2}{b_0} = -\frac{0,2127}{1,016} = -0,208 \text{ м} = -20,8 \text{ см.}$$

$$x_F = -\frac{i_Y^2}{\alpha_0} = -\frac{0,0954}{1,185} = -0,081 \text{ м} = -8,1 \text{ см.}$$

Откладываем эти координаты на рис. 8.2.5 и находим точку O_{1-2} . Таким образом, если приложить силу в точке O_{1-2} , то нулевая линия будет проходить через сторону 1-2 поперечного сечения. Следовательно, во всем сечении будут нормальные напряжения одного знака.

Теперь предположим, что нулевая линия проходит через точки 2 и 3 поперечного сечения. В этом случае $\alpha_0 = 0,7$ м; $b_0 = \infty$, а эксцентриситеты:

$$y_F = -\frac{0,2117}{\infty} = 0; \quad x_F = -\frac{0,0954}{0,7} = -0,136 \text{ м} = -13,6 \text{ см.}$$

По этим координатам строим точку O_{2-3} (рис. 8.2.5).

Далее предположим, что нулевая линия проходит к круговому контуру поперечного сечения. Значения α_0 и b_0 в этом случае можно вычислить теоретически, но это будет довольно сложной операцией, поэтому ограничимся непосредственным измерением α_0 и b_0 на рисунке 8.2.5, т.е. определим их графически: $\alpha_0 = 0,74$ м, а $b_0 = -1,62$ м. Тогда

$$y_F = -\frac{0,2117}{-1,62} = 0,131; \quad x_F = -\frac{0,0954}{0,74} = -0,129 \text{ м.}$$

По этим координатам строим точку O_{3-4} .

Проводим нулевую линию через точку 5 параллельно оси X, тогда $\alpha_0 = \infty$, $b_0 = -y_c = -1,184$ м. Находим координаты точки O_5 , где по

предположению должна быть приложена сила внецентренного сжатия или растяжения:

$$y_F = -\frac{0,2117}{-1,184} = 0,1788 \text{ м}; \quad x_F = -\frac{0,0954}{\infty} = 0.$$

Наконец, проводим нулевую линию через точку 1 параллельно оси X. В этом случае $b_0 = 1,016 \text{ м}$; $\alpha_0 = \infty$. Точка O_1 – точка приложения силы – будет иметь координаты:

$$y_F = -\frac{0,2117}{1,016} = -0,208 \text{ м}; \quad x_F = -\frac{0,0954}{\infty} = 0.$$

Точки $O_1, O_{1-2}, O_{2-3}, O_{3-4}$ соединяем прямыми линиями, а точки O_{3-4} и O_5 – выпуклой кривой линией. Учитывая симметрию поперечного сечения, продолжаем построения дальше. Внутренняя область, ограниченная построенной линией, будет являться ядром заданного поперечного сечения.

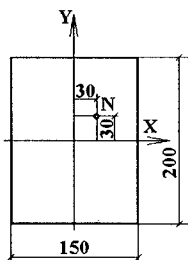


Рис. 8.2.6.

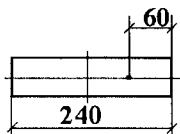
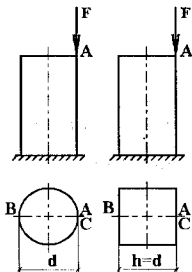


Рис. 8.2.7.

Задача 8.9. Деревянная стойка прямоугольного сечения нагружена продольной сжимающей силой $F=90 \text{ кН}$, приложенной в точке N (см. рисунок 8.2.6). Определить положение нейтральной оси сечения и построить эпюры нормальных напряжений по сторонам прямоугольника.

Задача 8.10. Определить необходимую толщину стальной полосы шириной 24 см, растягиваемой двумя параллельными ее оси силами 100 кН, приложенными посередине ее толщины на расстоянии 6 см от края полосы; $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ (рис. 8.2.7).



Задача 8.11. В точках A двух колонн приложены сжимающие силы (см. рисунок 8.2.8). При этом в точках C обеих колонн сжимающие напряжения оказались одинаковыми. Сравнить напряжения в точках B колонн.

Рис. 8.2.8.

Тема 8.3. Расчет по III и IV теориям прочности. Совместное действие кручения и изгиба.

Задача определения момента перехода материала из упругого состояния в предельное решается путем установления меры напряженного состояния, при достижении которого и происходит переход.

Такая мера устанавливается с помощью *критериев прочности и пластичности*. В качестве эквивалентного состояния выбирается одноосное растяжение.

Критерий наибольших касательных напряжений иногда называют *третьей теорией прочности*. В действительности же этот критерий является критерием пластичности.

В случае плоского напряженного состояния одно из главных напряжений равно нулю. Пусть $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_z = \sigma$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau$. При расчете по методу предельных состояний условие прочности можно записать в виде

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R, \quad (8.12)$$

где R - расчетное сопротивление материала при одноосном растяжении.

Другим критерием пластичности является *критерий удельной энергии изменения формы*, который иногда называют *энергетической (четвертой) теорией прочности*.

Для плоского напряженного состояния, когда $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_z = \sigma$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau$, прочность конструкции проверяется по формуле:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R \quad (8.13)$$

где R - расчетное сопротивление материала при одноосном растяжении.

Задача 8.11. Сплошной стальной вал круглого поперечного сечения в опасном сечении подвергается действию крутящего момента $M_z=14$ кНм, и изгибающего момента $M_y=12$ кНм. Из условия прочности по третьей теории

прочности, определить необходимый диаметр вала, если допускаемое напряжение $[\sigma]=90$ МПа.

Решение: Условие прочности по третьей теории прочности выглядит согласно (8.12) следующим образом:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma].$$

Поскольку здесь одновременное действие кручения и изгиба, то в указанной формуле

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_X}{W_X} - \text{напряжение от изгиба в опасном сечении, а}$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_Z}{W_p} - \text{напряжения от кручения в том же сечении.}$$

Для круглого сечения осевой момент сопротивления $W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$. А полярный момент сопротивления при кручении $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$. Тогда, с учетом выше сказанного, формула условия прочности принимает вид

$$\sqrt{\left(\frac{32 \cdot M_X}{\pi \cdot d^3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot M_Z}{\pi \cdot d^3}\right)^2} \leq [\sigma].$$

Выполняем преобразования и получаем

$$\frac{32}{\pi \cdot d^3} \sqrt{(M_X)^2 + (M_Z)^2} \leq [\sigma],$$

обозначив

$$M_{\text{расчIII}} = \sqrt{(M_X)^2 + (M_Z)^2}, \quad (8.14)$$

$$\text{в результате имеем} \quad \frac{32}{\pi \cdot d^3} M_{\text{расчIII}} \leq [\sigma]. \quad (8.15)$$

$$\text{Откуда} \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{расчIII}}}{\pi \cdot [\sigma]}}, \quad \text{и} \quad \text{тогда} \quad \text{учитывая,} \quad \text{что}$$

$$M_{\text{расчIII}} = \sqrt{(12)^2 + (14)^2} = 18,44 \text{ кН получаем искомый диаметр}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 18,44 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 0,128 \text{ м} = 128 \text{ мм.}$$

Задача 8.12. Определить наибольшее расчетное напряжение в стальном стержне АВ круглого сечения диаметром 6 см, нагруженного двумя

одинаковыми силами $F=1,2$ кН, приложенными, как показано на рисунке 8.3.1 (размеры даны в сантиметрах). Чему будет равно наибольшее расчетное напряжение в стержне, если один из грузов будет снят? Использовать 4-ю теорию прочности.

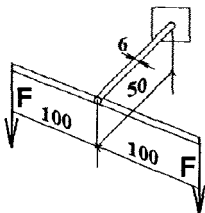


Рис. 8.3.1.

Решение: при действии двух сил стержень подвергается только изгибу. Изгибающий момент при этом равен $M_H = 2F \cdot 0,5 = 2,4 \cdot 0,5 = 1,2$ кНм. Тогда напряжения в опасном сечении определяются формулой $\sigma_{\max} = \frac{M_H}{W_H}$, т.е.

$$\sigma_{\max} = \frac{32 \cdot M_H}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 1,2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^3} = 56,59 \cdot 10^6 \text{ Па} = 56,59 \text{ МПа}.$$

При снятии одной из сил стержень подвергается действию изгибающего момента $M_H = F \cdot 0,5 = 1,2 \cdot 0,5 = 0,6$ кНм и крутящего момента $M_Z = F \cdot l = 1,2 \cdot 1 = 1,2$ кНм. При этом напряжения в опасном сечении (заделка) определяются по формуле $\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$,

где $\sigma = \frac{M_H}{W_H} = \frac{32 \cdot M_H}{\pi \cdot d^3}$ и $\tau = \frac{M_Z}{W_\rho} = \frac{16 \cdot M_Z}{\pi \cdot d^3}$. В результате

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\left(\frac{32 \cdot M_H}{\pi \cdot d^3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{16 \cdot M_Z}{\pi \cdot d^3}\right)^2} \quad \text{где}$$

$$M_{\text{расч/IV}} = \sqrt{(M_H)^2 + 0,75 \cdot (M_Z)^2}, \quad (8.16)$$

расчетный момент по четвертой теории прочности и тогда

$\sigma_{\max} = \frac{32}{\pi \cdot d^3} M_{\text{расч/IV}}$, то есть при $M_{\text{расч/IV}} = \sqrt{(0,6)^2 + 0,75 \cdot (1,2)^2} = 1,2$ кНм, максимальное напряжение равно

$$\sigma_{\max} = \frac{32}{3,14 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^3} \cdot 1,2 \cdot 10^3 = 56,59 \cdot 10^6 \text{ Па} = 56,59 \text{ МПа}.$$

Таким образом, в первом случае при действии двух сил (изгиб) и во втором случае при одной снятой силе (кручение с изгибом) максимальные напряжения в стержне оказываются равными.

Задача 8.13. Рассчитать радиус круглого цилиндрического вала с прямой осью, несущего два шкива, весом каждый по 1 кН и с одинаковыми диаметрами $D = 0,5$ м. Длина вала $l = 0,5$ м (рис. 8.3.2.). Натяжение в ведущих ремнях $F_1 = 0,8$ кН, в ведомых $F_2 = 0,2$ кН. Ремни левого шкива расположены вертикально, правого – горизонтально, $R_{adm} = 65$ МПа. Собственным весом вала пренебречь. Использовать критерии прочности наибольших касательных напряжений и удельной потенциальной энергии формоизменения.

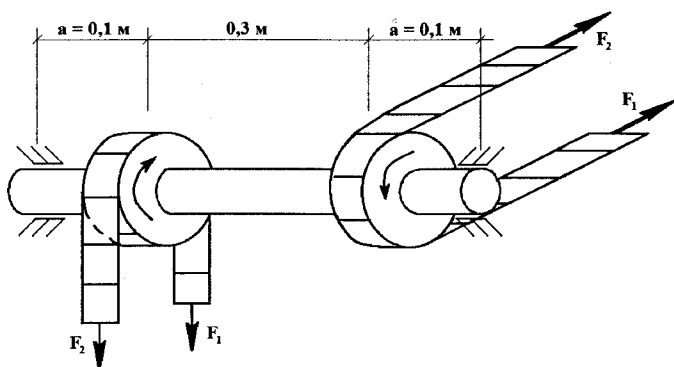


Рис. 8.3.2.

Решение. Определяем величину внешних усилий (моментов пар и сосредоточенных сил), передаваемых на вал со стороны шкивов. Величина внешних скручивающих моментов M_I и M_{II} определится разностью натяжений в ремнях:

$$M_I = 800 \cdot 0,25 - 200 \cdot 0,25 = 150 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{II} = 200 \cdot 0,25 - 800 \cdot 0,25 = (-150) \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Кроме кручения вал испытывает изгиб в вертикальной плоскости от веса шкивов $G_1 = G_2 = 1$ кН и от суммарной силы натяжения в ремнях левого шкива $F_I = 0,8 + 0,2 = 1$ кН, а также изгиб в горизонтальной плоскости от суммарной силы натяжения в ремнях правого шкива $F_{II} = 0,8 + 0,2 = 1$ кН.

Схема загрузки вала в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также эпюры крутящего момента T и изгибающих моментов $M_{\text{верт}}$ и $M_{\text{гор}}$ показаны на рисунке 8.3.3. Самым напряженным является сечение, где расположен левый шкив и в котором $T=150$ Н·м, $M_{\text{верт}} = 180$ Н·м; $M_{\text{гор}} = 20$ Н·м.

Для расчета диаметра вала воспользуемся формулами (8.15) и (8.16), имея в виду, что $M_{\text{расчIII}} = \sqrt{(M_{\text{и}})^2 + (M_Z)^2}$, а

$$M_{\text{расчIV}} = \sqrt{(M_X)^2 + 0,75 \cdot (M_Z)^2}, \text{ здесь } M_Z = T.$$

В результате получим по критерию наибольших касательных напряжений:

$$d_{\text{III}} = \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{180^2 + 20^2 + 150^2}}{65 \cdot 10^6}} = 0,0342 \text{ м} = 34,2 \text{ мм};$$

по критерию удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$d_{\text{IV}} = \sqrt[3]{\frac{10\sqrt{180^2 + 20^2 + 0,75 \cdot 150^2}}{65 \cdot 10^6}} = 0,0324 \text{ м} = 32,4 \text{ мм}.$$

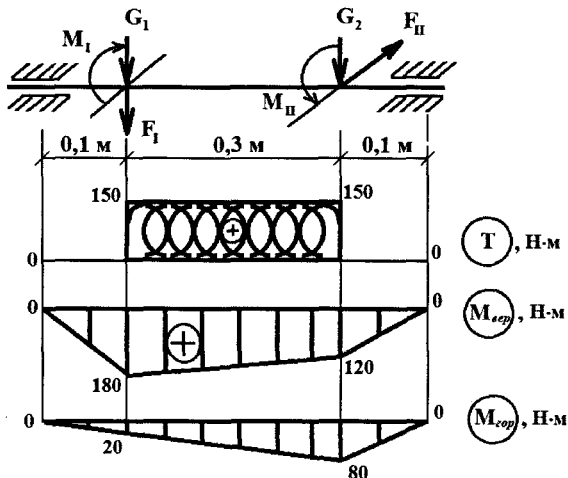


Рис. 8.3.3.

Вал, рассчитанный по критерию удельной потенциальной энергии формоизменения, более экономичен.

Задача 8.14. Стержень с ломаной осью диаметром $D=0,1$ м одним концом зашцеилен, а на другом нагружен силой $F=5$ кН. Размеры участков стержня даны на рисунке 8.3.4. Найти эквивалентное напряжение, используя критерий удельной потенциальной энергии формоизменения.

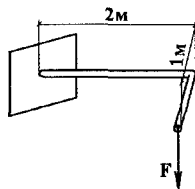


Рис. 8.3.4

Задача 8.15. Полый стальной вал, внутренний диаметр которого должен составлять 0,6 наружного, в опасном сечении подвергается действию изгибающего момента $M_x=90$ кНм и крутящего момента $M_z=120$ кНм. Определить наружный и внутренний диаметры вала, если расчетное сопротивление $R_y=120$ МПа. Использовать теорию наибольших касательных напряжений.

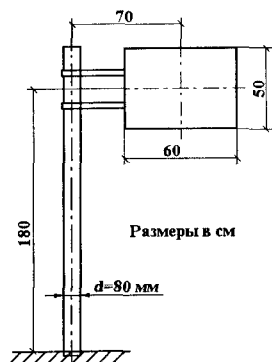


Рис. 8.3.5.

Задача 8.16. Дорожный знак укреплен на полый круглой стойке с наружным диаметром 80 мм (рис. 8.3.5). Используя третью теорию прочности, определить толщину стенки стойки при расчетном сопротивлении $R_y=80$ МПа, если наибольшая ветровая нагрузка на знак равна $1,5$ кН/м².

Задача 8.17. Стальной коленчатый стержень ABCD закреплен, как указано на рисунке 8.3.6. Участок АВ имеет круглое сечение диаметром 125 мм.

Сила 20 кН приложена к точке М перпендикулярно к плоскости рисунка. Пренебрегая касательными напряжениями от поперечной силы, определить в наиболее опасном сечении стержня mn расчетные напряжения по третьей и четвертой теориям прочности.

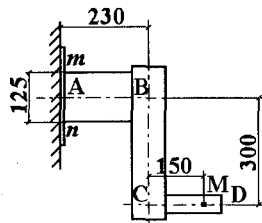


Рис. 8.3.6.

Тема 9. Устойчивость сжатых стержней.

Наряду с анализом прочности и жесткости зачастую необходим ещё анализ устойчивости конструкций. Он выполняется путем определения критической (Эйлеровой) силы для сжатого стержня

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}, \quad (9.1)$$

$F_{кр}$ представляет собой наименьшую сжимающую силу, при которой наряду с прямолинейной формой равновесия становится возможной другая (изгибная) форма равновесия. В таких случаях говорят, что происходит ветвление, или бифуркация, форм равновесия стержня.

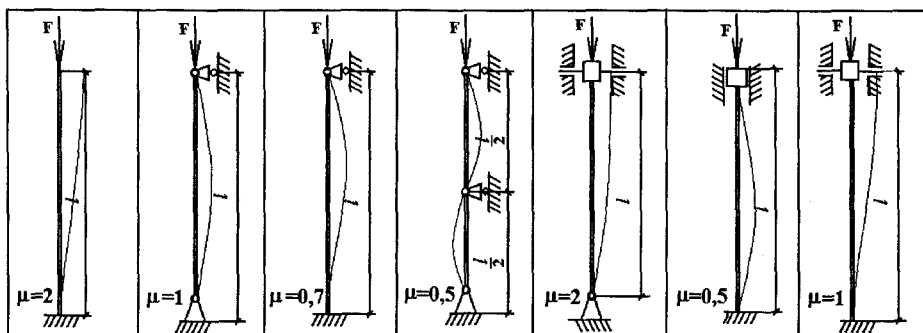


Рис. 9.1.

Формула Эйлера получена в предположении шарнирного опирания стержня по концам. На практике встречаются и другие способы закрепления концов (рис. 9.1), критическая сила для каждого из которых может быть получена по общей формуле

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu l)^2}, \quad (9.2)$$

где μ - коэффициент приведенной длины, а величина μl - называется приведенной или свободной длиной.

Длину μl можно интерпретировать как некоторую условную длину шарнирно-опертого по концам стержня, для которого критическая сила равна критической силе для заданного стержня.

Если закрепление концов стержня таково, что в плоскостях XOZ и YOZ коэффициенты приведенной длины различны и равны μ_1 и μ_2 , то необходимо вычислять два значения сжимающей силы.

$$F_{кр1} = \frac{\pi^2 E J_1}{(\mu_1 l)^2}, \quad \text{и} \quad F_{кр2} = \frac{\pi^2 E J_2}{(\mu_2 l)^2} \quad (9.3)$$

Критической для данного стержня является наименьшая из этих двух сил.

Формула Эйлера применима в пределах упругих деформаций. Предельная гибкость стержня определяется формулой

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}, \quad (9.4)$$

При $\lambda \geq \lambda_0$ можно пользоваться формулой Эйлера, если же $\lambda < \lambda_0$, то формула Эйлера становится неприемлемой. Здесь $\lambda = \frac{\mu l}{i_{min}}$ - гибкость рассматриваемого стержня, $i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ - минимальный радиус инерции его поперечного сечения.

При $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$, теоретическое исследование устойчивости затруднено. Для практических расчетов здесь пользуются эмпирической зависимостью Ф.С.Ясинского, предложенной им на основе опытных данных.

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad \text{Формула Ясинского,} \quad (9.5)$$

где a и b - константы, зависящие от материала.

Задача 9.1. Определить величины критической силы и критического напряжения для сжатой стойки прямоугольного сечения 4×6 см. Один конец стойки зашцеplen, второй - шарнирно оперт. Длина стойки 2,5 м. Материал – сталь с $\sigma_{пц} = 240$ МПа и модулем упругости $E_{ст} = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Решение. Вначале определяем предел применимости формулы Эйлера для данного материала по формуле:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{пл}}}} = \sqrt{\frac{9,87 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{240 \cdot 10^6}} = 90,7,$$

и сравниваем его с гибкостью заданного стержня $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}$.

а гибкость заданного стержня при $\mu = 0,7$ равна $\lambda = \frac{0,7 \cdot 250}{1,15} = 152$, где

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{h \cdot b^3}{12 \cdot A}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 3^3}{12 \cdot 24}} = 1,15 \text{ см.}$$

Поскольку $\lambda > \lambda_0$, то можно пользоваться формулой Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad F_{\text{кр}} = \frac{9,87 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 32 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 2,5)^2} = 206255 \text{ Н} \approx 206,3 \text{ кН.}$$

$$\text{Критическое напряжение } \sigma_{\text{кр}} = \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{206255}{24 \cdot 10^{-4}} = 85,9 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

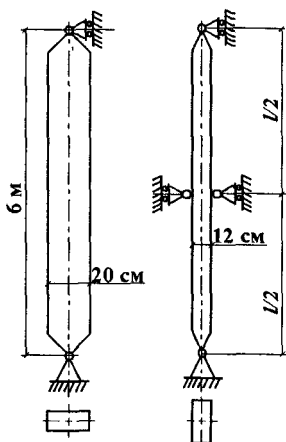


Рис. 9.2.

Задача 9.2. Определить величины допускаемой силы и допускаемого напряжения для сжатой деревянной стойки прямоугольного сечения 12×20 см. Стойка закреплена в главных плоскостях так, как показано на рисунке 9.2. Длина стойки 6 м. Предел пропорциональности материала $\sigma_{\text{пл}} = 15$ МПа и модуль упругости $E = 0,9 \cdot 10^{10}$ Па. Коэффициент запаса устойчивости $n_y = 1,6$.

Решение. Вначале определяем предел применимости формулы Эйлера для данного материала:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{пл}}}} = \sqrt{\frac{9,87 \cdot 0,9 \cdot 10^{10}}{15 \cdot 10^6}} = 76,95.$$

и сравниваем его с гибкостью заданного стержня

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}}.$$

Гибкость заданного стержня различна в главных плоскостях:

В плоскости наибольшей жесткости при $\mu = 1$ и радиусе инерции

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}} = \sqrt{\frac{b \cdot h^3}{12 \cdot A}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 20^3}{12 \cdot 240}} = 5,77 \text{ см, гибкость равна}$$

$$\lambda_1 = \frac{1 \cdot 600}{5,77} \approx 104.$$

В плоскости наименьшей жесткости при $\mu = 0,5$ и радиусе инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{h \cdot b^3}{12 \cdot A}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 12^3}{12 \cdot 240}} = 3,46 \text{ см, гибкость равна}$$

$$\lambda_2 = \frac{0,5 \cdot 600}{3,46} \approx 86,7.$$

Таким образом, поскольку $\lambda_1 = 104 > \lambda_0 = 76,95$ и $\lambda_2 = 86,7 > \lambda_0 = 76,95$, то можно пользоваться формулой Эйлера.

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}.$$

В плоскости максимальной жесткости критическая сила равна

$$F_{\text{кр1}} = \frac{3,14^2 \cdot 0,9 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}}{(6)^2} = 197392 \text{ Н} \approx 197,4 \text{ кН.}$$

А в плоскости минимальной жесткости критическая сила равна

$$F_{\text{кр2}} = \frac{3,14^2 \cdot 0,9 \cdot 10^{10} \cdot 2,88 \cdot 10^{-5}}{(0,5 \cdot 6)^2} = 284245 \text{ Н} \approx 284,2 \text{ кН.}$$

Поскольку $F_{\text{кр1}} < F_{\text{кр2}}$, то за критическую силу для заданного стержня принимаем $F_{\text{кр1}} = 197,4 \text{ кН}$. Поэтому искомое допускаемое усилие и допускаемое напряжение определяются как

$$[F] = \frac{F_{\text{кр1}}}{n_y} = \frac{197,4}{1,6} = 123,4 \text{ кН, и}$$

$$[\sigma] = \frac{[F]}{A} = \frac{123,4 \cdot 10^3}{240 \cdot 10^{-4}} \approx 5,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,2 \text{ МПа.}$$

Задача 9.3. Определить величины критической силы и критического напряжения для сжатой стойки двутаврового сечения № 30. Оба конца стойки шарнирно оперты. Длина стойки 5 м. Материал – сталь с $\sigma_{\text{пл}} = 220 \text{ МПа}$ и модулем упругости $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Задача 9.4. Используя формулу Эйлера, подобрать по сортаменту двутавровое поперечное сечение стойки длиной 2,6 м на продольную

сжимающую нагрузку $F=125$ кН. Один конец стойки зашце́млен, второй оперт шарнирно. Материал — сталь с $\sigma_{\text{пц}} = 200$ МПа. Коэффициент запаса устойчивости $n_y = 2$.

Задача 9.5. Какой из двух стержней одинаковой длины, условия закрепления и нагружения которых также одинаковы, является более гибким — стержень квадратного или круглого сечения с одинаковой площадью?

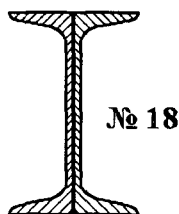


Рис. 9.3.

Задача 9.6. Определить допускаемую величину нагрузки на сжатую стойку с сечением, составленным из двух швеллеров № 18, сваренных стенками вплотную (рис. 9.3). Длина стойки 1,5 м, концы ее зашце́млены. При вычислении использовать формулу Ясинского $\sigma_k = 310 - 1,14\lambda$ (МПа). Коэффициент запаса устойчивости $n_y = 1,5$.

Тема 10. Динамическое нагружение. Расчет элементов конструкций, движущихся с ускорением.

Динамическая нагрузка — это нагрузка, быстро меняющая свое значение или место приложения, в результате чего возникают колебания системы.

При динамическом нагружении силы инерции выступают как дополнительная внешняя нагрузка. Взаимодействие сил инерции и сил упругости порождает упругие колебания, в процессе которых внутренние силы и напряжения в системе могут достигать значений, >> чем в покое при статическом действии нагрузок.

Расчет конструкций с учетом сил инерции и возникающего движения масс системы называют динамическим расчетом.

Отношение динамического значения некоторого фактора (усилия, напряжения, перемещения) к соответствующему статическому значению этого фактора называют динамическим коэффициентом.

Для элементов конструкций, движущихся с постоянным ускорением динамический коэффициент μ равен

$$\mu = \frac{N_d}{N_{ст}} = 1 + \frac{a}{g}, \quad (10.1)$$

где a — ускорение движения системы (детали), g — ускорение силы тяжести.

В инженерной практике очень часто прибегают к использованию динамического коэффициента, когда в расчетах определение внутренних усилий ведут от условных статических (квазистатических) загрузений, а затем найденное статическое усилие $N_{ст}$ умножают на динамический коэффициент

$$N_d = \mu N_{ст}. \quad (10.2)$$

При этом коэффициент должен быть предварительно определен из решения соответствующей задачи. В некоторых случаях такой подход дает возможность достаточно просто получить приемлемое решение.

Задача 10.1. Груз весом 3 т поднимается равноускоренно с помощью стального троса, причем за первые 2 сек он поднимается на высоту 4 м. Площадь поперечного сечения троса - 5 см^2 , длина его - 90 м, а объемный вес $\gamma = 7,2 \text{ г/см}^3$. Определить наибольшее нормальное напряжение в тросе без учета и с учетом собственного веса.

Решение. Из кинематики известно, что пройденный путь при равноускоренном движении определяется по формуле

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В этой формуле S_0 - начальное перемещение, а v_0 - начальная скорость, a - ускорение движения системы и t - время. Так как движение начинается из состояния покоя, то

$$S_0 = 0, v_0 = 0 \Rightarrow S = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2S}{t^2} = \frac{2 \cdot 4}{2^2} = 2 \text{ м/с}^2.$$

Динамический коэффициент при этом равен:

$$\mu = \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \left(1 + \frac{2}{9,81}\right) \approx 1,2.$$

Напряжения в тросе определяются так:

$$\sigma_1 = \mu \frac{N_{\text{ст}}}{A} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 9,81}{5 \cdot 10^{-4}} \cdot 1,2 = 70,9 \cdot 10^6 \text{ Па без учета собственного веса.}$$

Тогда с учетом собственного веса, поскольку

$N_2 = N_1 + V \cdot \gamma \cdot g$, где $V \cdot \gamma \cdot g$ - вес троса, поднимающего груз, имеем

$$N_2 = (3 \cdot 10^3 + 90 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 7,2 \cdot 10^3) \cdot 9,81 \text{ Н} = 3,26 \cdot 10^4 \text{ Н, тогда}$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu N_2}{A} = \frac{3,26 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{-4}} \left(1 + \frac{2}{9,81}\right) = 78,3 \cdot 10^6 = 78,3 \text{ МПа.}$$

Задача 10.2. Противовес подъемника весит 45 кН. При торможении поднимающегося подъемника, опускающийся противовес испытывает ускорение $1,5 \text{ м/с}^2$. Определить диаметры болтов А и В противовеса (рис. 10.1), если для материала болтов $[\sigma] = 30 \text{ МПа}$, $[\tau] = 20 \text{ МПа}$.

Решение. Рассматриваемая нагрузка является динамической, поэтому напряжения, возникающие в болтах - динамические.

Вначале определяем динамический коэффициент:

$$\mu = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{1,5}{9,81} = 1,153,$$

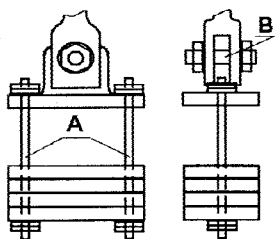


Рис. 10.1

Болты типа А подвергаются растяжению, а болт типа В – срезу по двум плоскостям. Поэтому условие прочности для болтов типа А определяются формулой

$$\sigma = \frac{N \cdot \mu}{A} = \frac{4N \cdot \mu}{\pi \cdot d^2} \leq [\sigma].$$

Отсюда диаметр болтов типа А: $d_A \geq \sqrt{\frac{4N \cdot \mu}{[\sigma]\pi}}$, и

$$d_A \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot 1,153}{3,14 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 0,0469 \text{ м} = 46,9 \text{ мм}.$$

Условие прочности для болтов типа В определяются формулой

$$\tau = \frac{F \cdot \mu}{2 \cdot A} = \frac{4F \cdot \mu}{2 \cdot \pi \cdot d^2} \leq [\tau].$$

В указанной формуле двойка в знаменателе появляется за счет двух плоскостей среза. Тогда диаметр болта типа В находится как $d_B \geq \sqrt{\frac{2F \cdot \mu}{[\tau]\pi}}$, и

$$d_B \geq \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \cdot 10^3 \cdot 1,153}{3,14 \cdot 20 \cdot 10^6}} = 0,0406 \text{ м} = 40,6 \text{ мм}.$$

Таким образом $d_A = 46,9 \text{ мм}$, $d_B = 40,6 \text{ мм}$.

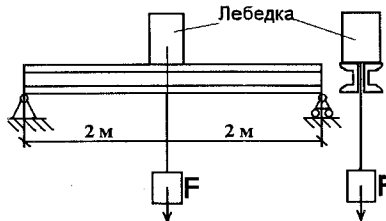


Рис. 10.2.

Задача 10.3. На двух балках корытного профиля № 20 установлена лебедка весом 800 кг, поднимающая груз 3т с помощью стального троса (рисунок 10.2). Площадь поперечного сечения троса 5см².

Подъем груза происходит с постоянным ускорением 4 м/с². Учитывая вес груза, лебедки и собственный вес балки, определить величину наибольшего напряжения в балках и в тросе.

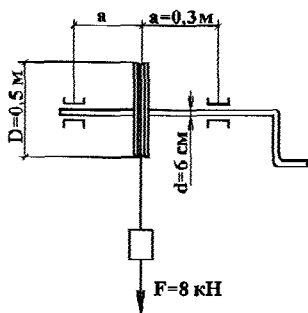


Рис. 10.3.

Задача 10.4. Груз F равноускоренно поднимается на тросе, накрутом на шкив (рисунок 10.3). Площадь поперечного сечения троса $A = 1 \text{ см}^2$. Определить наибольшее расчетное напряжение в тросе и в опасном сечении вала по третьей теории прочности, если ускорение движения равно $0,8 \text{ м/с}^2$. Массу троса, вала и шкива при расчете не учитывать.

Задача 10.5. Проверить прочность горизонтального бруса, поднимаемого вверх силой F , приложенной посередине бруса, с ускорением $a = 2g$. Брус имеет квадратное сечение со стороной 5 см, длина бруса $l = 2 \text{ м}$. Плотность материала бруса $\rho = 2,8 \text{ г/см}^3$, допускаемое нормальное напряжение $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Тема 11. Ударное действие нагрузки..

Рассмотрим воздействие вертикально падающего груза весом G на тело весом G_0 , соединенное с некоторой упругой конструкцией, например растянутым стержнем или изгибаемой балкой (рис. 11.1).

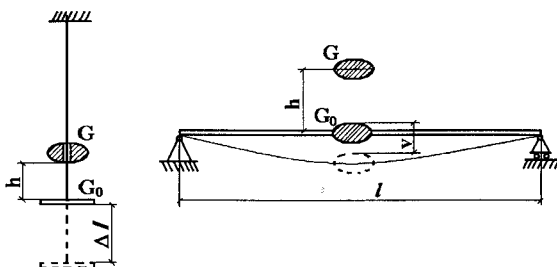


Рис. 11.1.

Период соударения τ обычно очень мал и измеряется микро- или миллисекундами. Но в этот короткий промежуток времени развиваются очень большие ударные силы взаимодействия.

Деформации упругой системы (удлинение Δl или прогиб v) не успевают развиться за короткий промежуток времени τ . Поэтому результатом удара будет возникновение движения ударяемой массы с конечной скоростью, а также изменение скорости падения груза на конечное значение.

Взаимодействие тел, при котором за очень малый промежуток времени скачкообразно возникают конечные изменения скорости этих тел, называют ударом.

При ударе:

$$\mu = \frac{\lambda_d}{\lambda_{ст}} = \frac{N_d}{N_{ст}}, \quad (11.1)$$

т.е. все факторы в рассматриваемой системе при ударе возрастают в одно и то же число раз по сравнению со статическим нагружением. Это число и есть динамический коэффициент μ .

Формула для динамического коэффициента при ударе:

$$\mu = \frac{\lambda_d}{\lambda_{ст}} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст}}} \cdot \eta, \quad (11.2)$$

$$\text{где } \eta = \frac{M}{M+m} = \frac{1}{1+m/M}. \quad (11.3)$$

η – коэффициент, учитывающий соотношение ударяемой и ударяющей масс.

Формулу (11.2) можно выразить через скорость груза, если вспомнить, что $v^2 = 2gh$:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\lambda_{ст}}} \cdot \eta. \quad (11.4)$$

Параметр λ_d представляет собой перемещение точки соударения от условной статической силы, равной весу падающего груза.

Она определяет податливость, мягкость пружины (или др. упругой конструкции, на которую падает груз). Естественно, чем $\lambda_{ст}$, тем $\mu > \mu$.

Если ударяемая конструкция не имеет в точке удара сосредоточенной массы m , то полагая $m=0$, и $\eta = 1$:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст}}}. \quad (11.5)$$

При $h=0$ имеем $\mu = 2$. Это случай так называемого внезапного приложения нагрузки.

Для горизонтального приложения нагрузки:

$$\mu = \sqrt{\frac{v^2}{g\lambda_{ст}}} \cdot \eta, \quad (11.6)$$

и $\lambda_d = \mu\lambda_{ст}$, $N_d = \mu N_{ст}$ где статические величины находят от условной силы $F_{ст} = G$, но направленной горизонтально.

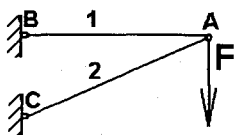


Рис. 11.2.

Задача 11.1. Сила $F=30$ кН мгновенно, но без удара приложена в узле А кронштейна ВАС (рис. 86). Чему равен коэффициент запаса прочности конструкции, если $A_1=4$ см², $A_2=100$ см², $\sigma_{в1}=400$ МПа, $\sigma_{в2}=60$ МПа. Угол ВАС=30°.

Решение. Данный случай нагружения называется внезапным приложением нагрузки. Поскольку высота падения груза $h = 0$, то динамический коэффициент

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст}} \cdot \eta} = 2.$$

Используя метод вырезания узлов, составляем уравнения равновесия системы:

$$\sum F_{Yi} = N_2 \cdot \sin 30^\circ - F = 0, \text{ откуда } N_2 = \frac{F}{\sin 30^\circ} = \frac{30}{0,5} = 60 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{Xi} = -N_1 + N_2 \cos 30^\circ = 0; N_1 = N_2 \cos 30^\circ = 60 \cdot 0,866 = 51,96 \text{ кН.}$$

Напряжения в каждом из стержней определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{N_i \mu}{A}.$$

Тогда для первого стержня

$$\sigma_1 = \frac{51,96 \cdot 10^3 \cdot 2}{4 \cdot 10^{-4}} = 259,8 \cdot 10^6 \text{ Па; } k = \frac{400}{259,8} = 1,54.$$

Для второго же стержня

$$\sigma = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 2}{30 \cdot 10^{-4}} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па; } k = \frac{60}{40} = 1,5.$$

Таким образом, принимаем для системы коэффициент запаса прочности $k = 1,5$, меньший из двух.

Задача 11.2. Груз, весом 4 кН падает на платформу с высоты 6 мм, растягивая стальной ступенчатый стержень (рис. 11.3). Определить наибольшие напряжения в стержне, если $l=5$ м, а площадь участков соответственно $A=2\text{см}^2$ и $2A=4\text{см}^2$.

Решение. Формула динамического коэффициента при ударе $\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\lambda_{ст}} \eta}$, в которой $\lambda_{ст}$ - это перемещение системы (удлинение стержня в данной задаче) от статической нагрузки, равной весу падающего груза - 4 кН.

$$\lambda_{ст} = \frac{N \cdot l}{2 \cdot E \cdot A} + \frac{N \cdot l}{2 \cdot E \cdot 2A}, \text{ следовательно}$$

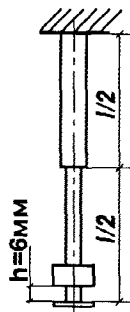


Рис. 11.3.

$$\lambda_{\text{ст}} = 4 \cdot 10^3 \left(\frac{2,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} + \frac{2,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} \right) = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Тогда динамический коэффициент равен

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{3,75 \cdot 10^{-4}} \cdot 1} = 6,74.$$

А наибольшие напряжения в стержне (возникают в нижней, узкой части) определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N \cdot \mu}{A}, \text{ тогда}$$

$$\sigma = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 6,74}{2 \cdot 10^{-4}} = 134,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 134,8 \text{ МПа.}$$

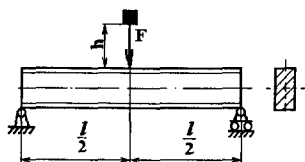


Рис. 11.4.

Задача 11.3. Определить максимальные нормальные и касательные напряжения для двухопорной балки прямоугольного сечения размерами 6×8 см при падении на нее груза весом 0,6 кН с высоты 4 см (рис. 11.4). Пролет балки 3 м, материал – сталь с модулем упругости $E_{\text{стали}} = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

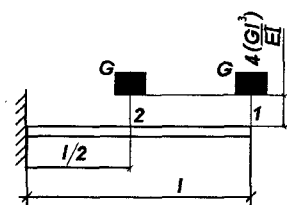


Рис. 11.5.

Задача 11.4. Как изменятся максимальные нормальные напряжения в консольной балке, если точку падения груза перенести из точки 1 в точку 2 (рис. 11.5)? Жесткость стержня при изгибе $EJ = \text{const}$. Высота падения груза $h = 4Gl^3/(EJ)$.

Задача 11.5. Груз $F = 15$ кН с постоянной скоростью $v = 2,4$ м/с опускается на сматывающемся с барабана лебедки тросе. Когда длина троса между грузом и лебедкой оказывается равной $l = 180$ м, происходит резкое торможение барабана, и груз останавливается. Площадь поперечного сечения троса $A = 5$ см², вес погонного метра $q = 2,1$ кг/м, модуль упругости $E = 1,6 \cdot 10^{11}$ Па.

Определить наибольшее нормальное напряжение в тросе без учета и с учетом его веса.

Задача 11.6. Стержень, имеющий длину 80 см и площадь поперечного сечения 5 см^2 , подвергается продольному растягивающему удару при падении груза 2 кН. Кинетическая энергия груза к моменту соударения равна 15 кНм. Найти напряжение в стержне при ударе в предположении, что он изготовлен: а) из стали; б) из дерева; в) из резины ($E = 10 \text{ МПа}$).

Тема 12. Работа конструкции за пределами упругости.

Практический интерес представляет задача об определении несущей способности балки, т.е. вычислении предельной нагрузки, которую она может выдержать (в случае плоского изгиба).

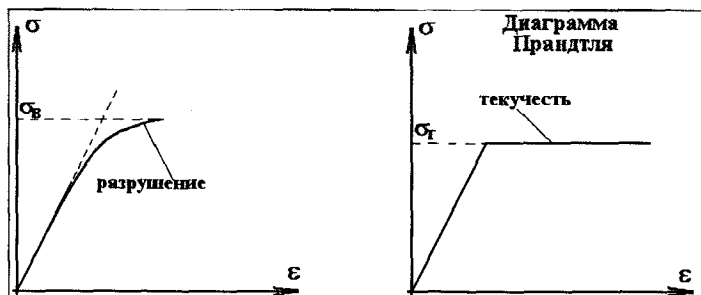


Рис. 12.1.

В целях упрощения задачи для материала балки примем в качестве расчетной так называемую диаграмму Прандтля (рис. 12.1), предполагая, что при $\sigma < \sigma_T$ материал работает линейно-упруго. При достижении в данной точке сечения равенства $\sigma = \sigma_T$ возникает текучесть, и далее продольное волокно балки в этой точке неограниченно деформируется при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_T$.

*Состояние сечения, когда во всех его точках развиваются пластические деформации, называют **пластическим шарниром**.*

При этом балка как бы превращается в механизм, продолжающий увеличивать прогибы v при постоянной внешней нагрузке $F_{\text{пред}}$. Такое состояние называют **пластическим механизмом**.

При разгрузке балки образуется остаточный прогиб $v_{\text{ост}}$. В поперечном сечении, где образовался пластический шарнир, внутренний момент обозначен $M_{\text{пред}}$ и назовем его **пластическим предельным моментом**.

Наиболее напряженное сечение балки до истощения несущей способности проходит три стадии работы: линейно упругая ($M_x \leq M_T$); упругопластическая ($M_T < M_x < M_{пред}$) и чисто пластическая (пластический шарнир) ($M_x = M_{пред}$) (рис. 12.2).

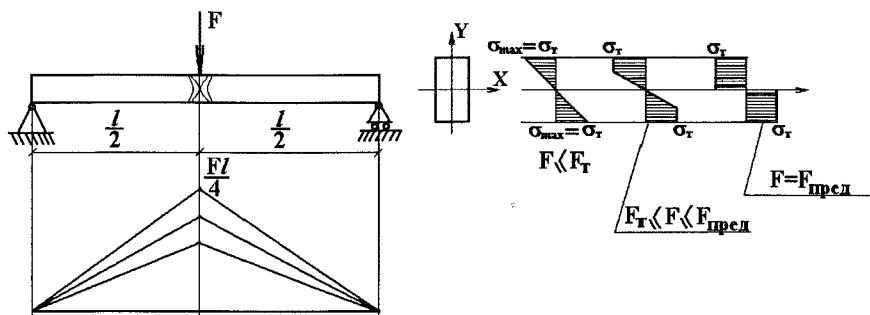


Рис. 12.2.

При образовании пластического шарнира нулевая линия делит площадь сечения на две равновеликие части.

$$A_p - A_{сж} = 0; \quad A_p = A_{сж} = \frac{A}{2}. \quad (12.1)$$

Внутренний момент $M_{пред}$ определяется как момент всех элементарных сил ($\sigma_T dA$) относительно оси X (или любой другой оси т.к. эти силы приводятся к паре с моментом $M_{пред}$).

$$M_{пред} = \sigma_T (S_x^p + S_x^{сж}), \text{ или } M_{пред} = \sigma_T W_{пл}, \quad (12.2)$$

где $S_x^p = \int_{A_p} y dA$ и $S_x^{сж} = \int_{A_{сж}} y dA$ - статические моменты растянутой и сжатой частей сечения относительно нейтральной оси X , взятые по абсолютному значению (оба положительные). Характеристику

$$W_{пл} = S_x^p + S_x^{сж}, \quad (12.3)$$

называют иногда *пластическим моментом сопротивления сечения*.

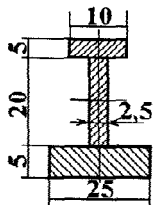


Рис. 12.3.

Задача 12.1. Стальная балка пролетом 5 м с шарнирными опорами по концам нагружена посередине пролета силой F . Поперечное сечение балки указано на рисунке. Определить допускаемую величину силы F , если предел текучести материала $\sigma_T = 240$ МПа, а коэффициент запаса равен $k = 1,5$. Размеры даны в сантиметрах.

Решение: Для конструкций, работающих за пределами упругости, при изгибе предельный момент сопротивления определяется по формуле (12.2)

$$M_{\text{пред}} = \sigma_T (S_X^{\text{сж}} + S_X^{\text{раст}}).$$

С другой стороны, для двухопорной балки, нагруженной посередине пролета $M_{\text{max}} = \frac{F \cdot l}{4}$. Учитывая коэффициент запаса, получаем равенство

$$\frac{\sigma_T}{1,5} (S_X^{\text{сж}} + S_X^{\text{раст}}) = \frac{F \cdot l}{4}.$$

Определим теперь величины статических моментов в формуле предельных моментов. Поскольку при предельном моменте нейтральная линия делит сечение на две равновеликие части, определим вначале их значения

$$A_{\text{сж}} = A_{\text{раст}} = \frac{25 \cdot 5 + 20 \cdot 2,5 + 5 \cdot 10}{2} = 112,5.$$

Положение нейтральной линии определяем как $y_0 = \frac{112,5}{25} = 4,5$ см.

Тогда сумма статических моментов сечения $S_X^{\text{сж}} + S_X^{\text{раст}} = 25 \cdot 4,5 \cdot 2,25 + 20 \cdot 2,5 \cdot 10,5 + 5 \cdot 10 \cdot 23 + 25 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 1931,3 \text{ см}^3 = 1,93 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Тогда из выше приведенной формулы получаем, что

$$[F] = \frac{4 \cdot \sigma_T}{1,5 \cdot l} (S_X^{\text{сж}} + S_X^{\text{раст}}) = \frac{4 \cdot 240 \cdot 10^6}{1,5 \cdot 5} \cdot 1,93 \cdot 10^{-3} = 247040 \text{ Н} = 247 \text{ кН}.$$

Задача 12.2. Подобрать сечение прокатной двутавровой балки пролетом 6 м, с шарнирными опорами по концам, нагруженной в третях пролета двумя сосредоточенными силами по 20 кН каждая (рис. 12.4). $[\sigma] = 160$ МПа.

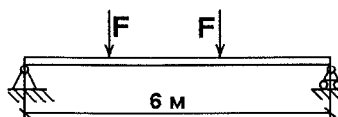


Рис. 12.4.

Решение: Для конструкций, работающих за пределами упругости, при изгибе предельный момент сопротивления определяется по формуле $M_{\text{пред}} = \sigma_T (S_X^{\text{сж}} + S_X^{\text{раст}})$.

С другой стороны, для двухопорной балки, нагруженной двумя силами в третях пролета $M_{\text{max}} = \frac{F \cdot l}{3}$. Учитывая коэффициент запаса, получаем равенство $[\sigma] (S_X^{\text{сж}} + S_X^{\text{раст}}) = \frac{F \cdot l}{3}$.

Отсюда определяем статический момент относительно оси X. Т.к. двутавровое сечение имеет две оси симметрии

$$S_X^{\text{раст}} = S_X^{\text{сж}} = \frac{F \cdot l}{[\sigma] 6} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 6}{160 \cdot 10^6 \cdot 6} = 125 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

По сортаменту подбираем ближайшее сечение I № 22 со статическим моментом $S_X = 131 \text{ см}^3$.

Задача 12.3. Однопролетная шарнирно опертая по концам балка из двутавра № 20 нагружена посередине пролета силой F. Пролет балки 4 м, предел текучести материала балки $R_{\text{уп}} = 285 \text{ МПа}$, расчетное сопротивление стали $R_y = 240 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$. Определить допускаемую и предельную нагрузку для балки.

Задача 12.4. Определить размеры прямоугольного сечения балки, защемленной одним концом и нагруженной на свободном конце силой $F = 5,4 \text{ кН}$. Соотношение размеров балки $h/b = 2$, длина балки 3 м, допускаемое напряжение составляет 200 МПа. Насколько потребуется больше материала, если расчет произвести по допускаемым напряжениям?

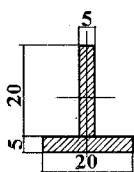


Рис. 12.5.

Задача 12.5. Определить допускаемый пролет для шарнирно опертой по концам балки таврового сечения, представленного на рисунке 12.5. Балка нагружена посередине пролета силой $F = 120 \text{ кН}$. Допускаемое напряжение материала составляет 160 МПа.

Тема 13. □болочки. Расчет симметричных оболочек по безмоментной теории.

Под *оболочкой* понимается тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других. Геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочки, носит название *срединной поверхности*. *Осесимметричными*, или просто *симметричными*, оболочками называются такие, срединная поверхность которых представляет собой поверхность вращения.

Задача о расчете оболочек вращения наиболее просто решается в том случае, когда возможно принять, что напряжения, возникающие в оболочке, постоянны по толщине, и, следовательно, изгиб оболочки отсутствует. Теория оболочек, построенная в этом предположении, называется *безмоментной теорией оболочек*.

Если оболочка не имеет резких переходов и жестких защемлений и, кроме того, не нагружена сосредоточенными силами и моментами, то к ее расчету с успехом может применяться безмоментная теория.

По безмоментной теории напряжения σ_m и σ_t в оболочке определяются из уравнений равновесия. Первое из них:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}, \quad (13.1)$$

называется *уравнение Лапласа*; второе

$$\sigma_m 2\pi r h \sin\theta = P. \quad (13.2)$$

Здесь h – толщина оболочки, ρ_m , – радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности (рис. 13.1), ρ_t — второй главный радиус, т. е. радиус кривизны нормального сечения, перпендикулярного дуге меридиана; ρ_m и ρ_t являются в общем случае функцией угла θ — угла между нормалью и осью симметрии. Напряжения σ_m и σ_t называются соответственно *меридиональным* и *окружным*.

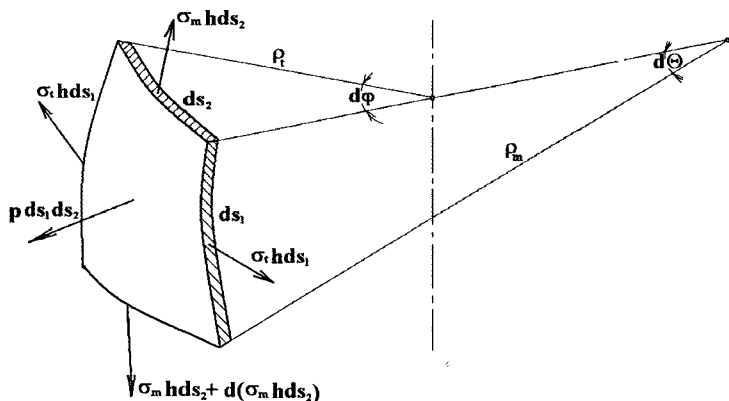


Рис. 13.1.

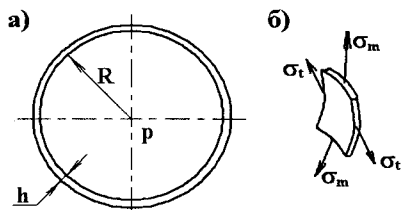


Рис. 13.2.

Задача 13.1. Сферическая оболочка радиуса R и толщины h находится под действием внутреннего давления p (рис. 13.2, а). Определить напряжения, возникающие в оболочке.

Решение. Для сферической оболочки $\rho_m = \rho_t = R$. Вследствие полной симметрии $\sigma_m = \sigma_t$. Используя формулу Лапласа, получаем, что

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}, \text{ то есть напряженное состояние является двухосным}$$

(рис. 13.2, б). Наименьшее напряжение σ_3 принимается равным нулю. Эквивалентное напряжение, независимо от величины k

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{pR}{2h}.$$

Задача 13.2. Цилиндрическая оболочка радиуса R и толщины h нагружена внутренним давлением p (рис. 13.3, а). Определить напряжения в оболочке.

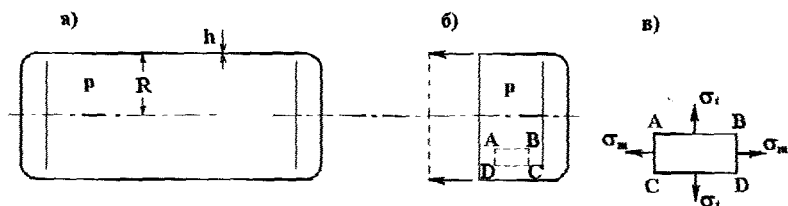


Рис. 13.3.

Решение: Отсекаем поперечным сечением часть цилиндра (рис. 13.3, б) и составляем для нее уравнение равновесия:

$$\sigma_m 2\pi R h = P.$$

Осевая составляющая сил давления, независимо от формы дна будет равна $P = \pi R^2 p$, и таким образом

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}.$$

Для цилиндра $\rho_m = \infty$; $\rho_t = R$. Поэтому из формулы Лапласа (13.1) получаем $\sigma_t = pR/h$, т.е. окружное напряжение оказывается вдвое больше, чем меридиональное.

Элемент ABCD, выделенный из цилиндрической оболочки (рис. 13.3, в), находится в двухосном напряженном состоянии: $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_m$, $\sigma_3 = 0$. Эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{pR}{h}.$$

Для цилиндрической оболочки, как видим, эквивалентное напряжение оказывается вдвое больше, чем для сферической оболочки того же радиуса и той же толщины.

Задача 13.3. Сферическая оболочка радиуса $R=1,5$ м находится под действием внутреннего давления $p=15$ атм ($1 \text{ атм}=9,81 \text{ Н/м}^2$). Определить необходимую для обеспечения прочности толщину оболочки, если $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

Задача 13.4. Цилиндрическая оболочка радиуса $R=0,8$ м и толщиной $h=16$ мм находится под действием внутреннего давления. Определить допускаемую величину внутреннего давления на оболочку, если $[\sigma] = 200$ МПа.

Задача 13.4. Определить величину предельного внутреннего давления в сферическом сосуда радиуса $R=0,8$ м и толщиной $h=20$ мм. Расчетное сопротивление материала $R_y = 280$ МПа.

Использованная литература

1. Ахметзянов, М.Х. Сопротивление материалов: учеб. пособие / М.Х. Ахметзянов – М.: Высшая школа, 2007. – 334 с.
2. Копнов, В.А. Сопротивление материалов / В.А. Копнов, С.Н. Кривошапко. – М.: Высшая школа, 2005. – 351 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. пособие / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 592 с.
4. Учебное пособие по дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов технических специальностей и направлений подготовки очной и заочной форм обучения / сост. Н.Н. Саенко. – Майкоп: ИП Магарин О.Г., 2013. – 168 с.
5. Учебно-методическое пособие для выполнения расчетно-графических работ по курсу «Сопротивление материалов»: для студентов технических специальностей и направлений подготовки (очной и заочной форм обучения) / сост. А.З. Уджуху, Н.Н. Саенко, Н.В. Стерехова – Майкоп, ИП Магарин О.Г., 2011. – 75 с.

Составители: **Н.Н. Саенко, Н.В. Стерехова**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
по дисциплине
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

**Для студентов технических специальностей и направлений подготовки очной
и заочной форм обучения**

Подписано в печать 02.08.2015. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Формат бумаги 60x84/16. Печать цифровая. Усл. п. л. 6,75. Тираж 300. Заказ 090.

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии ИП Магарин О.Г.
385008, г. Майкоп, ул. 12 Марта, 146. Тел. 8-906-438-28-07. E-mail: olemag@yandex.ru