Т.И. Дёмина, О.П. Шевякова

МАТЕМАТИКА

1 семестр

Методические рекомендации
по выполнению контрольной работы
для студентов направления
100400.62 «Туризм»

Майкоп
2014

УДК 51(07)
ББК 22.1
Д – 30

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Майкопский государственный технологический университет»
Кафедра высшей математики и системного анализа

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры
высшей математики и системного анализа

Рецензенты:
канд. физ. - мат. наук, доц. Куижева С.К.
канд. физ. - мат. наук, доц. Козлов В.А.

Дёмина Т.И., Шевякова О.П.

Д 30 **Математика. 1 семестр**. Методические рекомендации по выполнению контрольной работы для студентов направления 100400.62 «Туризм». - Майкоп: ИП Кучеренко В.О., 2014. - 68 с.

Пособие рекомендовано студентам-заочникам I курса при изучении курса математики в 1 семестре. Оно содержит список литературы, необходимой для изучения тем курса, методические рекомендации, а также типовые задания по каждому разделу.

УДК 51(07)
ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цели и задачи освоения дисциплины. Целью математического образования бакалавра является: воспитание достаточно высокой математической культуры; способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановки цели и выбору путей её достижения.

Задачами дисциплины являются: изучение понятий математического анализа, алгебры и геометрии; формирование навыков использования рассматриваемого математического аппарата в профессиональной деятельности; воспитание культуры мышления (строгости, последовательности, непротиворечивости и основательности в суждениях, в том числе и в повседневной жизни).

Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата. Дисциплина «Математика» служит основой для изучения учебных дисциплин как математического и естественнонаучного, так и профессионального цикла.

Для изучения дисциплины необходимы компетенции, сформированные в результате обучения в средней общеобразовательной школе. Данная дисциплина способствует изучению дисциплин «Информатика», «География», «Менеджмент», «Маркетинг».

В результате освоения дисциплины «Математика» обучающийся должен знать фундаментальные понятия математики; уметь использовать математический аппарат в профессиональной деятельности, применять математические методы при решении прикладных задач, углублять свои математические знания и навыки; владеть методами построения простейших математических моделей типовых профессиональных задач.

Учебно-методическое пособие рекомендовано студентам-заочникам I курса при изучении курса математики в 1 семестре. Оно содержит список литературы, необходимой для изучения тем курса, методические рекомендации, а также типовые задания по каждому разделу.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Курс высшей математики. Ч. 1: учебник/ М.К. Беданоков [и др.]. - Майкоп: Магарин О.Г., 2013. - 384 с.

2. ЭБС «Айбукс» Балдин К.В. Высшая математика: учебник / - М.: Флинта: МПСИ, 2010. - 360 с. - Режим доступа: http://ibooks.ru/

Дополнительная

3. Дёмина Т.И., Шевякова О.П. Основы математического анализа. Учебное пособие для бакалавров. Часть первая. - Майкоп: ИП Кучеренко В.О., 2013. - 130 с.

4. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: Учебник и практикум / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.И. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. -4-е изд., перераб. и доп. - М.: Юрайт, 2012. - 909 с.

5. Мальцев И.А. Линейная алгебра. 2-е изд., испр. и доп. - СПб.: Лань, 2010. - 384 с.

6. Общий курс высшей математики: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА-М, 2007. - 656 с.

7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов. В 2-х т. Т. I. - М.: Интеграл-Пресс, 2010. - 416 с.

8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. - М.: Рольф, 2009. - 608 с.

9. Шипачев, В.С. Высшая математика. Базовый курс: Учеб. пособие/ В.С. Шипачев. - М.: Юрайт, 2011. - 447 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ КУРСА

Раздел I. АЛГЕБРА МАТРИЦ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами. Определители квадратных матриц. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Теорема Лапласа. Обратная матрица. Ранг матрицы. Методы решения систем линейных уравнений: матричное решение, методы Крамера и Гаусса. Исследование систем линейных уравнений на совместность. Системы однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

Пример 1. Вычислить $3A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -8 & 5 & 8 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$,
$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Имеем $3A + B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 4 \\ -8 & 5 & 8 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 12 & -9 & 12 \\ -24 & 15 & 24 \\ 6 & -15 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -12 & 14 \\ -21 & 11 & 25 \\ 8 & -20 & 21 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Вычислить $A \cdot A^T - A^T \cdot A$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Найдем матрицу, транспонированную к матрицеA. Для этого в матрице A поменяем местами строки со столбцами, сохраняя их порядок, получим $A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Найдем произведения матриц. Имеем

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 1\cdot(-1) + 5\cdot 5 & 0\cdot 1 - 1\cdot 3 + 5\cdot(-2) & 0\cdot 2 - 1\cdot 4 + 5\cdot 6 \\ 1\cdot 0 + 3\cdot(-1) - 2\cdot 5 & 1\cdot 1 + 3\cdot 3 - 2\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 3\cdot 4 - 2\cdot 6 \\ 2\cdot 0 + 4\cdot(-1) + 6\cdot 5 & 2\cdot 1 + 4\cdot 3 + 6\cdot(-2) & 2\cdot 2 + 4\cdot 4 + 6\cdot 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 26 & -13 & 26 \\ -13 & 14 & 2 \\ 26 & 2 & 56 \end{pmatrix} .$$

Аналогично, $A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 3 + 2\cdot 4 & 0 - 2 + 12 \\ -1\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 2 & -1\cdot(-1) + 3\cdot 3 + 4\cdot 4 & -5 - 6 + 24 \\ 5\cdot 0 - 2\cdot 1 + 6\cdot 2 & 5\cdot(-1) - 2\cdot 3 + 6\cdot 4 & 25 + 4 + 36 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ 11 & 26 & 13 \\ 10 & 13 & 65 \end{pmatrix} .$$

3. Найдем разность полученных матриц

$$A \cdot A^T - A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 26 & -13 & 26 \\ -13 & 14 & 2 \\ 26 & 2 & 56 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ 11 & 26 & 13 \\ 10 & 13 & 65 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & -24 & 16 \\ -24 & -12 & -11 \\ 16 & -11 & -9 \end{pmatrix} .$$

Пример 3. Вычислить $A^2 + B \cdot C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Находим A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 3\cdot 1 + 1\cdot 4 & 2\cdot 3 + 3\cdot(-3) + 1\cdot 7 & 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 - 3\cdot 1 + 0\cdot 4 & 1\cdot 3 - 3\cdot(-3) + 0\cdot 7 & 1\cdot 1 - 3\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + 7\cdot 1 + 1\cdot 4 & 4\cdot 3 + 7\cdot(-3) + 1\cdot 7 & 4\cdot 1 + 7\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ -1 & 12 & 1 \\ 19 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Находим $B \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 5+6+1 & 10+9+0 & 20-6-1 \\ 0+12-7 & 0+18+0 & 0-12+7 \\ 4+2-2 & 8+3+0 & 16-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 19 & 13 \\ 5 & 18 & -5 \\ 4 & 11 & 16 \end{pmatrix}.$$

3. Получаем

$$A^2 + B \cdot C = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 3 \\ -1 & 12 & 1 \\ 19 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 19 & 13 \\ 5 & 18 & -5 \\ 4 & 11 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 23 & 16 \\ 4 & 30 & -4 \\ 23 & 9 & 21 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Вычислить определители 2-го, 3-го, 4-го порядков:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. а) Определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 8 \cdot (-1) = -8 + 8 = 0.$$

б) При вычислении определителя 3-го порядка используем *правило треугольников*, получаем:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 7 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 4 - (1 \cdot (-3) \cdot 4 + 0 \cdot 7 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1) =$$

$$= -6 + 7 + 0 + 12 - 0 + 3 = 16.$$

в) По теореме Лапласа определитель равен сумме произведений элементов строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения. Используя свойства определителей, определитель нужно преобразовать так, чтобы в одной строке или столбце получить элементы равные нулю. Умножая вторую строку на -4 и прибавляя к первой строке, получим еще один нуль в четвертом столбце. Элементы 2-й строки умножим на

-6 и прибавим к соответствующим элементам 4-й строки. Таким образом,

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 22 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам 4-го столбца

$$D = 1 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 22 \end{vmatrix} = -2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 22 \end{vmatrix} = -8 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}.$$

(Вынесли за знак определителя общий множитель элементов 1-го и 2-го столбца, а затем общий множитель элементов 3-й строки.)

Разложим определитель по элементам 1-го столбца

$$D = -16 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = 16 \cdot (1 \cdot 11 - 2 \cdot 10) = 16 \cdot (-9) = -144.$$

Пример 5. Определить ранги матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Ранг данной матрицы может принимать значения от 1 до 3, так как из элементов матрицы можно создать миноры по 3-й порядок включительно. Но вместо того, чтобы вычислять все возможные миноры 3-го и более высокого порядка, применим к данной матрице эквивалентные преобразования. Вначале добьемся того, чтобы в первом столбце все элементы, кроме первого, равнялись 0. Для этого запишем вместо второй строки ее сумму с первой, умноженную предварительно на (-2), а вместо третьей – разность третьей и первой. Затем к третьей строке прибавим вторую, в результате чего получим эквивалентную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, то ранг матрицы $r(A) = 2$.

б) Используя элементарные преобразования, приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & -2 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, то $r(A) = 3$.

в) Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, значит, ранг матрицы $r(A) = 2$.

Пример 6. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решить систему: а) методом Крамера; б) в матричной форме; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение. а) Решим систему **методом Крамера**.

1. Найдем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot (-1) -$$

$$-2 \cdot (-2) \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) \cdot 4 = 32 + 6 + 6 + 12 - 8 + 12 = 60.$$

(Определитель вычислили, используя *правило треугольников*.)

2. Найдем вспомогательные определители.

Определитель Δ_1 получается из определителя Δ, заменой первого столбца на столбец свободных членов. Имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot4\cdot4+11\cdot(-2)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)\cdot11-11\cdot4\cdot(-1)-$$

$$-(-2)\cdot(-2)\cdot4-11\cdot(-1)\cdot4 = 64+22+22+44-16+44 = 180.$$

Определитель Δ_2 получается из определителя Δ, заменой второго столбца на столбец свободных членов. Вычислим

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot11\cdot4+3\cdot11\cdot(-1)+4\cdot(-2)\cdot3-3\cdot11\cdot(-1)-$$

$$-11\cdot(-2)\cdot2-3\cdot4\cdot4 = 88-33-24+33+44-48 = 60.$$

Определитель Δ_3 получается из определителя Δ, заменой третьего столбца на столбец свободных членов. Найдем

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot11+3\cdot(-2)\cdot4+(-1)\cdot11\cdot3-3\cdot4\cdot4-$$

$$-(-2)\cdot11\cdot2-3\cdot(-1)\cdot11 = 88-24-33-48+44+33 = 60.$$

3. По формулам Крамера найдем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{180}{60} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 60 = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{60}{60} = 1\ .$$

б) Решим систему **в матричной форме**.

1. Запишем систему в матричной форме: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

2. Для матрицы A найдем обратную матрицу.

1) Вычислим определитель матрицыA:

$$\det\ A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60.$$

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - (-2) \cdot (-2) = 12;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3l & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 4 - 3 \cdot (-2)) = -18;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 = -18;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(-1 \cdot 4 - (-2) \cdot (-1)) = 6;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1)) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) = 6;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1)) = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 11.$$

3) Составим из алгебраических дополнений матрицу союзную матрице A. Имеем

$$A^s = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

4) Запишем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det\ A} A^s = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Найдем матричное решение системы линейных уравнений

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 \cdot 4 + 6 \cdot 11 + 6 \cdot 11 \\ -18 \cdot 4 + 11 \cdot 11 + 1 \cdot 11 \\ -18 \cdot 4 + 1 \cdot 11 + 11 \cdot 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 180 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

4. Используя определение равных матриц, получим

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

в) Решим систему **методом Гаусса**.

1. Выпишем расширенную матрицу системы и путем элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array} \right).$$

Умножим вторую и третью строки на (-2), а затем первую сроку умножим на 3 и прибавим к соответствующим элементам второй и третьей строк, получим матрицу эквивалентную матрице $\bar{A}$:

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ -6 & -8 & 4 & -22 \\ -6 & 4 & -8 & -22 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \end{array} \right).$$

Переставим вторую и третью строки, а затем вторую строку умножим на 11 и прибавим к третьей строке, после чего третью строку разделим на (-120):

$$\bar{A} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \\ 0 & -11 & 1 & -10 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & -120 & -120 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

2. По последней матрице восстановим систему

$$\begin{cases} 2x_1 \; -x_2 \; -x_3 = 4, \\ \qquad x_2 \; -11x_3 = -10, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

3. Из полученной системы последовательно находим: $x_3 = 1$. Из второго уравнения найдем: $x_2 = -10 + 11x_3 = -10 + 11 \cdot 1 = 1$. Из первого уравнения получим: $2x_1 = 4 + x_2 + x_3$, $2x_2 = 6$, тогда $x_1 = 3$.

Пример 7. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = 5, \\ x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = -3, \\ 7x_1 & +x_2 & -x_3 & = 10. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = -3, \\ & 5x_2 & -7x_3 & = 11, \\ & & -x_3 & = -2, \end{cases}$$

откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример 8. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Записать общее решение и выделить два частных решения :

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = 1, \\ x_1 & +x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 1, \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 2, \\ 5x_1 & +2x_2 & -4x_3 & +2x_4 & = 5. \end{cases}$$

Решение. 1. Выпишем расширенную матрицу системы

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

и путем элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. Для этого сделаем следующие элементарные преобразования:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & -9 & 0 \\ 0 & -18 & 36 & -18 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -8 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

2. Матрица коэффициентов при неизвестных эквивалентна матрице $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Ранг матриц A и $\bar{A}$ равен 2, $r(A) = r(\bar{A}) < 4$, где 4 - число неизвестных системы. Следовательно, система совместная и неопределенная. Найдем общее решение системы.

3. Выберем в качестве базисного минор $M = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Восстановим систему по полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & -8x_3 & +4x_4 & = 1, \\ & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 0. \end{cases}$$

Неизвестные x_1, x_2 - базисные, x_3, x_4 - свободные. Запишем систему в укороченном виде:

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & = 1 + 8x_3 - 4x_4, \\ & -x_2 & = -2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Положим $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тогда

$$\begin{cases} x_1 & +4x_2 & = 1 + 8C_1 - 4C_2 \\ & -x_2 & = -2C_1 + C_2 \end{cases}$$

Выразим $_2$ из второго уравнения $x_2 = 2C_1 - C_2$, и подставим полученное значение в первое уравнение:

$$\begin{aligned} x_1 + 4(2C_1 - C_2) & = 1 + 8C_1 - 4C_2, \\ x_1 + 8C_1 - 4C_2 & = 1 + 8C_1 - 4C_2. \end{aligned}$$

Отсюда $x_1 = 1$.

4. Общее решение системы имеет вид

$$X(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2C_1 - C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

5. Подставим $C_1 = 1, \quad C_2 = 0$, получим частное решение:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \cdot 1 - 0 = 2, \quad x_3 = C_1 = 1, \quad x_4 = C_2 = 0.$$

6. Подставим $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. Получим другое частное решение:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 1.$$

Пример 9. Решить систему однородных линейных уравнений, найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0, \\ 2x_1 & -4x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 0, \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 0, \\ 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & +3x_4 & = 0. \end{cases}$$

Решение. 1. Выпишем матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

и путем элементарных преобразований приведем ее к ступенчатому виду. Для этого умножим первую строку на (-2), (-3), (-4) и прибавим соответственно ко второй, третьей и четвертой строке, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь умножим вторую строку на (-1) и прибавим к элементам третьей и четвертой строк, после чего отбросим нулевые строки

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Ранг матрицы A равен двум: $r(A) = 2$. Число неизвестных $n = 4$, так как $2 < 4$, то однородная система имеет ненулевые решения. В качестве базисного возьмем минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, тогда переменные x_1, x_2 - базисные, x_3, x_4 - свободные.

3. По последней матрице восстановим систему и выразим базисные переменные через свободные. Имеем

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0, \\ & -6x_2 & +5x_3 & -x_4 & =0. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем $6x_2 = 5x_3 - x_4$, откуда $x_2 = \dfrac{5}{6}x_3 - \dfrac{1}{6}x_4$. Тогда из первого уравнения найдем

$$x_1 = -x_2 + x_3 - x_4, \quad x_1 = -\left(\frac{5}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4\right) + x_3 - x_4, \quad x_1 = \frac{1}{6}x_3 - \frac{5}{6}x_4.$$

4. Пусть $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, тогда $x_2 = \dfrac{5}{6}C_1 - \dfrac{1}{6}C_2$, $x_1 = \dfrac{1}{6}C_1 - \dfrac{5}{6}C_2$. Общее решение системы имеет вид

$$X(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}C_1 - \frac{1}{6}C_2 \\ \\ \frac{1}{6}C_1 - \frac{5}{6}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

5. Найдем фундаментальнуюсистему решений

$$E_1 = X(1,0) = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = X(0,1) = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -5/6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

E_1, E_2 – фундаментальная система решений.

Используя фундаментальную систему решений, общее решение можно записать в виде

$$X(C_1, C_2) =_1 E_1 + C_2E_2.$$

Раздел II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств. Понятие n-мерного линейного векторного пространства. Понятие линейной зависимости и независимости системы векторов. Базис линейного пространства. Размерность линейного пространства. Понятие ранга системы векторов. Базисы некоторых линейных пространств. Координаты вектора в базисе. Связь между координатами вектора в различных базисах. Подпространства линейного пространства, примеры. Евклидовы пространства. Свойства длины вектора. Ортонормированная система векторов. Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора. Связь между координатами вектора и координатами его образа. Действия над линейными операторами. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора. Диагонализируемость линейного оператора. Линейная модель обмена (модель международной торговли). Квадратичные формы.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a}(2;3;3)$, $\vec{b}(-1;4;-2)$, $\vec{c}(-1;-2;4)$, $\vec{d}(4;11;11)$ в некотором базисе. Образуют ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис. Если образуют, то найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение. Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ трехмерного пространства образуют базис, если они линейно независимы, то есть векторное равенство $\lambda_1\vec{a}+$ $+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=0$ выполняется лишь при условии, что все λ_1, λ_2, λ_3 равны нулю одновременно.

Переходя к координатам, получим

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Задача свелась к решению системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases}2\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0,\\3\lambda_1+4\lambda_2-2\lambda_3=0,\\3\lambda_1-2\lambda_2+4\lambda_3=0.\end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, приводим ее к виду:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 & = 0, \\ & \lambda_2 & -11\lambda_3 & = 0, \\ & & \lambda_3 & = 0, \end{cases}$$

то есть ранг системы равен числу переменных $r = n = 3$, откуда следует, что система имеет только тривиальное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Значит, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно независимы и они обазуют базис.

Найдем координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Матрица перехода от старого базиса к новому будет иметь вид

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Координаты вектров $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ по старому базису образуют столбцы матрицы перехода.)

Тогда обратная к ней матрица

$$T^{-1} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Найдем координаты вектора $\vec{d}$ в новом базисе

$$\vec{d}^* = T^{-1}\vec{d} = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\vec{d} = 3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Пример 2. Задана матрица A линейного оператора в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Найдите матрицу$A^*$ этого оператора в базисе $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l} \vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3; \\ \vec{e}\,'_2 = -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3; \\ \vec{e}\,'_3 = -\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3. \end{array}$$

Решение. Матрица перехода от старого базиса к новому имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную к ней матрицу

$$T^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Тогда, применяя формулу $A^* = T^{-1}AT$, получим

$$A^* = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 12 & 6 & 6 \\ -18 & 11 & 1 \\ -18 & 1 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 24 & 6 & 12 \\ -26 & -9 & 12 \\ -46 & 21 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 102 & -24 & 12 \\ -43 & -34 & 92 \\ 7 & 106 & 52 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17/10 & -2/5 & 1/5 \\ -43/60 & -17/30 & 23/15 \\ 7/60 & 53/30 & 13/15 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $(3-\lambda)\left[(5-\lambda)(3-\lambda)-1\right] + (-3+\lambda+1) + (1-5+\lambda) = 0$.

После элементарных преобразований уравнение приводится к виду $(3-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0$, откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Находим собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \xi_1' & -\xi_2' & +\xi_3' & = 0, \\ -\xi_1' & +3\xi_2' & -\xi_3' & = 0, \\ \xi_1' & -\xi_2' & +\xi_3' & = 0 \end{cases}$$

(одно из уравнений этой системы есть следствие двух других и может быть отброшено), получим $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = -\xi_1'$. Полагаем $\xi_1' = \alpha$, тогда $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = -\alpha$ и $\vec{r}_1 = \alpha\vec{e}_1 - \alpha\vec{e}_3$.

Находим собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_2 = 6$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} & -\xi_2'' & +\xi_3'' & = 0, \\ -\xi_1'' & +2\xi_2'' & -\xi_3'' & = 0, \\ \xi_1'' & -\xi_2'' & & = 0 \end{cases}$$

(одно из этих уравнений - следствие двух других). Отсюда $\xi_1'' = \xi_2'' = \xi_3'' = \beta$ и $\vec{r}_2 = \beta\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \beta\vec{e}_3$.

Находим собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_3 = 6$. Составляем систему уравнений

$$\begin{cases} -3\xi_1''' & -\xi_2''' & +\xi_3''' & = 0, \\ -\xi_1''' & -\xi_2''' & -\xi_3''' & = 0, \\ \xi_1''' & -\xi_2''' & -3\xi_3''' & = 0 \end{cases}$$

(снова одно из этих уравнений - следствие двух других). Решая эту систему, находим $\xi_1''' = \gamma$, $\xi_2''' = -2\gamma$, $\xi_3''' = \gamma$ и $\vec{r}_3 = \gamma\vec{e}_1 - 2\gamma\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$.

Итак, собственные векторы заданной матрицы имеют вид

$$\vec{r}_1 = \alpha(\vec{e}_1 - \vec{e}_3); \quad \vec{r}_2 = \beta(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3); \quad \vec{r}_3 = \gamma(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \alpha,\, \beta,\, \gamma \neq 0.$$

Пример 4. Задана квадратичная форма, определить ее тип. Привести квадратичную форму к каноническому виду линейным преобразованием.

$$L(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы. Диагональные элементы симметрической матрицы A квадратичной формы равны коэффициентам при квадратах переменных, то есть $a_{11} = 2$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = -3$. Другие элементы матрицы равны половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы: $a_{12} = a_{21} = -4/2 = -2$, $a_{13} = a_{31} = 4/2 = 2$, $a_{23} = a_{32} = -8/2 = -4$. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Исследуем на знакоопределенность квадратичную форму. Найдем все главные (угловые) миноры матрицы A:

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 12.$$

Так как $\Delta_1 > 0, \Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$, то *по критерию Сильвестра* квадратичная форма не является знакоопределенной.

Приведем квадратичную форму к каноническому виду. Сгруппируем все члены, содержащие x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$\begin{aligned}
&L = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3 = \\
&= (2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3) - 3x_3^2 - 8x_2x_3 = \\
&= 2[x_1^2 - 2x_1(x_2 - x_3) + (x_2 - x_3)^2] - 2(x_2 - x_3)^2 - 3x_3^2 - 8x_2x_3 = \\
&= 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 - 5x_3^2.
\end{aligned}$$

Сгруппируем все члены, содержащие x_2, и дополним их до полного квадрата:

$$\begin{aligned}
&L = 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2(x_2^2 + 2x_2x_3) - 5x_3^2 = \\
&= 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) + 2x_3^2 - 5x_3^2 = \\
&= 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 - 2(x_2 + x_3)^2 - 3x_3^2.
\end{aligned}$$

Невырожденное линейное преобразование

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1 - x_2 + x_3, \\
&y_2 = x_2 + x_3, \\
&y_3 = x_3
\end{aligned}$$

приводит квадратичную форму к каноническому виду

$$L(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 3y_3^2.$$

Раздел III. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Линейные операции над векторами. Нахождение координат вектора. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис и координаты вектора. Скалярное произведение векторов, его свойства. Векторное произведение векторов, его свойства. Смешанное произведение векторов, его свойства.

Пример 1. В системе Oxy известны координаты точек $A(-4;1)$, $B(8;-8)$, $C(6;6)$. Найти:

а) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, их разложение по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и их модули;

б) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;

в) направляющие косинусы векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;

г) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;

д) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ как на сторонах.

Решение. а) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, разложение по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и его модуль:

$$\overrightarrow{AB} = (8-(-4);\ -8-1) = (12;\ -9), \quad \overrightarrow{AB} = 12\vec{i} - 9\vec{j},$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2+(-9)^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Аналогично для $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = (6-(-4);\ 6-1) = (10;\ 5), \quad \overrightarrow{AC} = 10\vec{i} + 5\vec{j},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

б) Угол между векторами найдем с помощью скалярного произведения векторов:

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}. \tag{1}$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_x, a_y)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y)$ находим по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y.$$

Тогда $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 12\cdot 10 + (-9)\cdot 5 = 120 - 45 = 75$. По формуле (1) получим

$$\cos\varphi = \cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{75}{15\cdot 5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Поэтому искомый угол $\varphi = \arccos(1/\sqrt{5})$.

в) Направляющие косинусы вектора $\vec{a}(a_x; a_y)$ находим по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}.$$

Тогда для вектора $\overrightarrow{AB}(12; -9)$ получаем: $\cos\alpha_1 = 12/15 = 0,8$; $\cos\beta_1 = -9/15 = -0,6$, и для вектора $\overrightarrow{AC}(10; 5)$: $\cos\alpha_2 = 10/(5\sqrt{5}) = 2/\sqrt{5}$; $\cos\beta_2 = 5/(5\sqrt{5}) = 1/\sqrt{5}$.

г) Используем свойство скалярного произведения векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}. \tag{2}$$

Из формулы (2) выразим проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, получаем:

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{75}{5\sqrt{5}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}.$$

д) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ как на сторонах (рис. 1), найдем по формуле:

$$S_{\text{парал.}} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin\varphi.$$

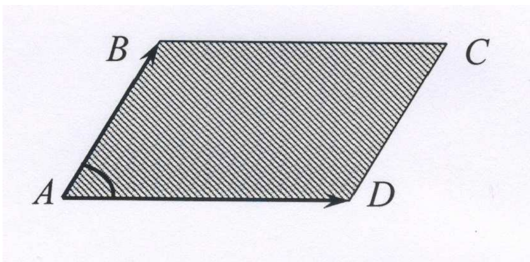

Рис.1

Так как известно, что $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Найдем $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Получаем: $S_{\text{парал.}} = 15 \cdot 5\sqrt{5} \cdot \sin\varphi = 75\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 150$ (кв.ед.).

Пример 2. Даны координаты вершин пирамиды $SABC$: $S(4; 5; 1)$, $A(3;\ 1; 0)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-1; 0; -5)$. Найти:

а) площадь грани ABC;

б) объем пирамиды $SABC$.

Решение. а) Площадь грани ABC (рис. 2) найдем с помощью векторного произведения по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|. \tag{3}$$

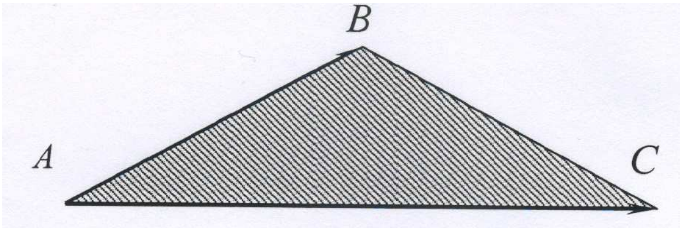

Рис. 2

Определим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (0-3;\ 1-1;\ 2-0) = (-3;\ 0;\ 2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1-3;\ 0-1;\ -5-0) = (-4;\ -1;\ -5).$$

Найдем координаты векторного произведения $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(0+2) - \vec{j}(15+8) + \vec{k}(3-0) = 2\vec{i} - 23\vec{j} + 3\vec{k}.$$

Таким образом, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (2; -23; 3)$. Находим длину этого вектора: $|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{2^2 + (-23)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 529 + 9} = \sqrt{542}$.

По формуле (3) находим искомую площадь грани:

$$S_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{542} \quad \text{(кв.ед.)}.$$

б) Объем пирамиды $SABC$ (рис. 3) находим с помощью смешанного произведения:

$$V_{\text{пир.}} = \pm\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS}.$$

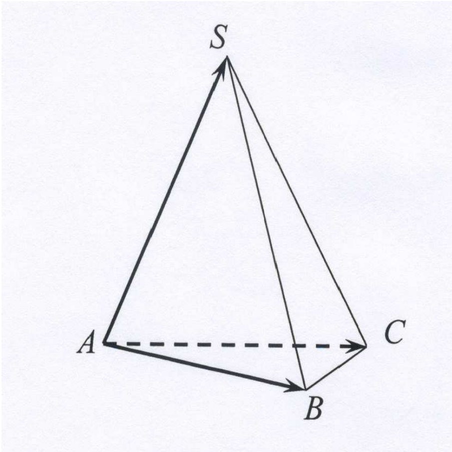

Рис. 3

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AS} = (4-3;\, 5-1;\, 1-0) = (1;\, 4;\, 1)$. Тогда

$$V_{\text{пир.}} = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\,(3 - 32 + 0 + 2 - 60 - 0) = 14,5(\text{куб.ед.}).$$

Раздел IV. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Различные виды уравнения прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости. Линии второго порядка. Различные виды уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей. Различные виды уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Поверхности второго порядка.

Пример 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A (16; 15), B (0; 2), C (12; -7). Найти:

а) длины сторон треугольника;

б) уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты, координаты направляющих и нормальных векторов;

в) угол BAC;

г) уравнение высоты BH и ее длину;

д) уравнение медианы AM и ее длину;

е) координаты точки K пересечения высоты BH и медианы AM треугольника;

ж) уравнение прямой, проходящей через точку C, параллельно стороне AB.

Решение. а) Найдем длины сторон треугольника, используя формулу расстояния между точками:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{4}$$

Подставляем вместо $(x_1,\ y_1)$ и $(x_2,\ y_2)$ координаты точек, получаем:
$AB = \sqrt{(0-16)^2 + (2-15)^2} = \sqrt{256+169} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$;
$AC = \sqrt{(12-16)^2 + (-7-15)^2} = \sqrt{16+484} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$;
$BC = \sqrt{(12-0)^2 + (-7-2)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$.

б) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{5}$$

Подставляя в формулу (5) координаты точек $A(16; 15)$ и $B(0; 2)$, находим уравнение стороны AB:

$$\frac{x-16}{0-16} = \frac{y-15}{2-15}, \quad -13(- 16) = -16(y-15),$$

$$-13x+16y-32=0, \quad y=(13/16)x+2,$$

при этом $k_1 = 13/16$ - угловой коэффициент, $\overrightarrow{p_1} = (-16;\ -13)$ - направляющий вектор, $\overrightarrow{n_1} = (-13;\ 16)$ - нормальный вектор прямой AB.

Подставляя в (5) координаты точек $A(16;15)$, $C(12;-7)$, получаем уравнение стороны AC:

$$\frac{x-16}{12-16} = \frac{y-15}{-7-15}, \quad -11x+2y+146=0, \quad y=5,5x-73.$$

Здесь $k_2 = 5,5$; $\overrightarrow{p_2} = (-2;\ -11)$, $\overrightarrow{n_2} = (-11;\ 2)$.

Аналогично находим уравнение стороны BC:

$$\frac{x-0}{12-0} = \frac{y-2}{-7-2}, \quad -3x-4y+8=0, \quad y=-0,75x+2.$$

Здесь $k_3 = -0,75$; $\overrightarrow{p_3} = (4;\ -3)$, $\overrightarrow{n_3} = (-3;\ -4)$.

в) Воспользуемся формулой для нахождения угла между двумя прямыми:

$$\text{tg}\ \varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1},$$

k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых AB и AC. Получаем:

$$\text{tg}\ \angle BAC = \frac{\frac{11}{2}-\frac{13}{16}}{1+\frac{11}{2}\cdot\frac{13}{16}} = \frac{75}{16}\cdot\frac{32}{175} = \frac{6}{7} \quad \Rightarrow \quad \angle BAC = \text{arctg}\,\frac{6}{7}.$$

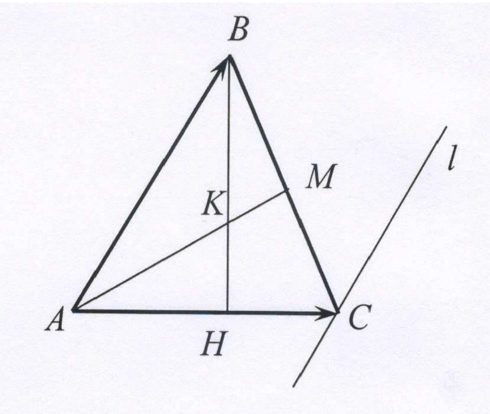

Рис. 4

г) Нормальный вектор прямой BH (рис. 4) есть вектор $\vec{n} = \overrightarrow{AC} = (-4;-22)$. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку $B(0;\ 2)$ с заданным нормальным вектором, имеет вид: $-4(x-0)-22(y-2)=0$ или $-4x-22y+44=0$ – общее уравнение прямой BH.

Длину высоты BH найдем по формуле расстояния от точки до прямой:

$$\delta = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{6}$$

Используя уравнение прямой AC и координаты точки B, находим из (6):

$$BH = \frac{|-11 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 146|}{\sqrt{(-11)^2 + 2^2}} = \frac{150}{\sqrt{125}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}.$$

д) Точка $M(x, y)$ – середина BC, так как AM – медиана ΔABC. Координаты точки M находим по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

Подставляем координаты точек B $(0; 2)$, $C(12; -7)$, получаем:

$$x = \frac{0 + 12}{2} = 6, \quad y = \frac{2 - 7}{2} = -2,5;$$

то есть $M(6; -2,5)$.

Уравнение прямой найдем, используя формулу (5). Получаем:

$$\frac{x - 16}{6 - 16} = \frac{y - 15}{-2,5 - 15}, \quad -17,5x + 10y + 130 = 0-$$

общее уравнение прямой AM.

Для нахождения длины медианы AM воспользуемся формулой расстояния между точками (4):

$$= \sqrt{(6 - 16)^2 + (-2,5 - 15)^2} = \sqrt{100 + 306,25} = \sqrt{406,25} = 2,5\sqrt{65}.$$

е) Найдем координаты точки K пересечения высоты BH и медианы AM ΔABC. Так как искомая точка лежит на каждой из двух прямых, то координаты этой точки удовлетворяют каждому из уравнений. Таким образом, координаты точки пересечения прямых находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} -4x & -22y & +44 & = 0, \\ -17,5x & +10y & +130 & = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим, что $K(132/17,\ 10/17)$ – искомая точка.

ж) Направляющим вектором прямой l, проходящей через точку C, параллельно стороне AB является вектор $\vec{p} = \overrightarrow{AB} = (-16,\ -13)$. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку $C(12;-7)$ с заданным направлением, имеет вид:

$$\frac{x-12}{-16}=\frac{y+7}{-13}, \quad -13x+16y+268=0.$$

Пример 2. Даны координаты вершин пирамиды $SABC$ (рис. 5) с вершиной в точке S: $S(1;4;3)$, $A(2;2;0)$, $B(1;2;5)$, $C(-3;3;1)$. Найти:

а) уравнения ребер SA, SB, указав координаты направляющих векторов;

б) уравнения граней ABC и SAB, указав координаты их нормалей;

в) длину высоты SH;

г) угол между плоскостью основания ABC и боковым ребром SA;

д) угол между плоскостью основания ABC и боковой гранью SAB;

е) уравнение плоскости, проходящей через вершину S параллельно основанию ABC;

ж) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно ребру SA;

з) уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости основания ABC;

и) угол между боковыми ребрами SA, SB.

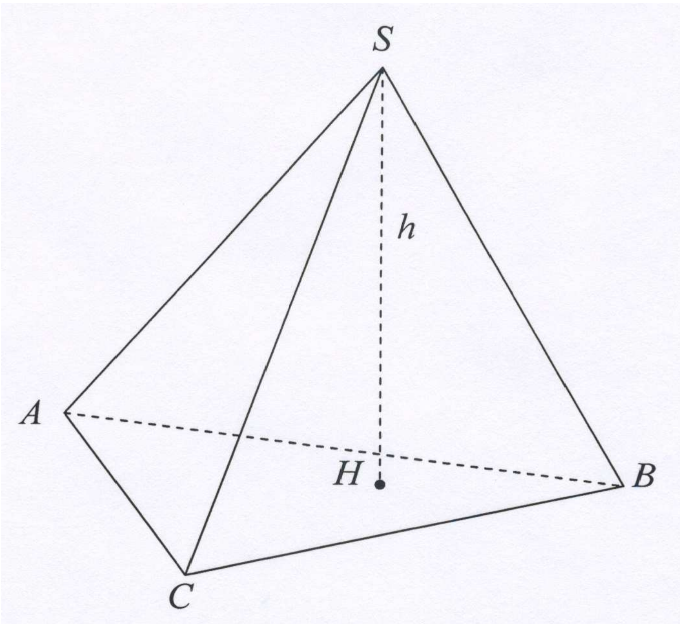

Рис. 5

Решение. а) Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки $S(1;4;3)$ и $A(2;2;0)$, имеет вид:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-4}{2-4}=\frac{z-3}{0-3} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-3}{-3}.$$

В качестве направляющего вектора этой прямой $\vec{p_1}$ можно взять вектор $\overrightarrow{SA}=(1;\,-2;\,-3)$.

Аналогично запишем уравнение прямой SB:

$$\frac{x-1}{1-1}=\frac{y-4}{2-4}=\frac{z-3}{5-3}, \quad \frac{x-1}{0}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-3}{2}.$$

Данная прямая лежит в плоскости $x=1$, то есть для всех точек прямой $x-1=0$, при этом направляющий вектор прямой $\vec{p_2}=\overrightarrow{SB}=(0;\,-2;\,2)$.

б) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Найдем уравнение плоскости ABC. Для этого подставим в уравнение (8) координаты точек $A(2;2;0)$, $B(1;2;5)$, $C(-3;3;1)$. Получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-0 \\ 1-2 & 2-2 & 5-0 \\ -3-2 & 3-2 & 1-0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 5 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки. Имеем:

$$(x-2)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)(0-5)-(y-2)(-1+25)+z(-1+0)=0,$$

$$-5(x-2)-24(y-2)-z=0, \quad -5x-24y-z+58=0.$$

Плоскость ABC задается уравнением $-5x-24y-z+58=0$, нормальный вектор этой плоскости $\vec{n}_1=(-5;\,-24;\,-1)$.

Аналогично находим уравнение плоскости SAB:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-0 \\ 1-2 & 2-2 & 5-0 \\ 1-2 & 4-2 & 3-0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразовав, получим уравнение плоскости SAB: $-10x-2y-2z+$ $+24=0$, нормальный вектор этой плоскости $\vec{n}_2=(-10;\,-2;\,-2)$.

в) Длину высоты пирамиды SH найдем как расстояние от точки S до плоскости ABC, то есть

$$SH=\frac{|-5\cdot 1-24\cdot 4-3+58|}{\sqrt{(-5)^2+(-24)^2+(-1)^2}}=\frac{46}{\sqrt{602}}.$$

г) Угол между прямой $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле:

$$\sin\alpha=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Найдем угол между плоскостью основания ABC и боковым ребром SA:

$$\sin\alpha=\frac{|-5\cdot 1-24\cdot(-2)-1\cdot(-3)|}{\sqrt{(-5)^2+(-24)^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}}=\frac{46}{\sqrt{602}\sqrt{14}}=$$

$$=\frac{23}{7\sqrt{43}}\Rightarrow \alpha=\arcsin\frac{23}{7\sqrt{43}}.$$

д) Угол между плоскостями, задаваемыми уравнениями A_1x+B_1y+ $C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, вычисляется как угол между нормальными векторами этих плоскостей:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}. \qquad (9)$$

Так как $\vec{n}_1=(-5;\,-24;\,-1)$, $\vec{n}_2=(-10;\,-2;\,-2)$, то скалярное произведение $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=-5\cdot(-10)+(-24)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-2)=100$.

Найдем длины векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$:

$$|\vec{n}_1|=\sqrt{(-5)^2+(-24)^2+(-1)^2}=\sqrt{602},$$

$$|\vec{n}_2|=\sqrt{(-10)^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}.$$

Подставив полученные значения в формулу (9), получим:

$$\cos\varphi=\frac{100}{\sqrt{602}\cdot 6\sqrt{3}}=\frac{50}{3\sqrt{1806}}\quad\Rightarrow\quad \varphi=\arccos\,\frac{50}{3\sqrt{1806}}.$$

е) Нормальным вектором искомой плоскости является вектор $\vec{n}_1 = (-5;\ -24;\ -1)$ плоскости ABC, так как эти плоскости параллельны.

Уравнение плоскости, проходящей через вершину $S(1;4;3)$, параллельно основанию ABC имеет вид: $-5(x-1)-24(y-4)-1(z-3)=0$ или $-5x-24y-z+104=0$.

ж) В качестве направляющего вектора прямой, проходящей через точку C параллельно ребру SA можно взять вектор $\overrightarrow{SA}=(1;\ -2;\ -3)$, тогда искомое уравнение прямой имеет вид: $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-1}{-3}$.

з) Направляющим вектором прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости основания ABC, является нормальный вектор $\vec{n}_1=(-5;\ -24;\ -1)$ плоскости ABC. Запишем искомое уравнение в следующем виде: $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-2}{-24}=\dfrac{z}{-1}$.

и) Угол между боковыми ребрами SA и SB вычислим как угол между направляющими векторами $\overrightarrow{SA}=(1;\ -2;\ -3)$ и $\overrightarrow{SB}=(0;\ -2;\ 2)$ по формуле (9), получаем:

$$\cos\,\psi=\frac{1\cdot 0+(-2)\cdot(-2)+(-3)\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{8}}=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{7}}\quad\Rightarrow\psi=\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{7}}\right).$$

Пример 3. Привести уравнение кривой $3x^2+4y^2+12x-8y-32=0$ к каноническому виду и построить ее. Указать координаты вершин и фокусов. Написать уравнения директрис и асимптот, если они есть. Вычислить эксцентриситет кривой.

Решение. Преобразуем данное уравнение кривой. Так как

$$\begin{aligned}&3x^2+4y^2+12x-8y-32=3(x^2+4x)+4(y^2-2y)-32=\\&=3(x^2+4x+4)+4(y^2-2y+1)-32-12-4=\\&3(x+2)^2+4(y-1)^2-48,\end{aligned}$$

то уравнение можно переписать в виде $3(x+2)^2+4(y-1)^2=48$, разделив обе части на 48, имеем

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{12}=1.$$

Получили уравнение эллипса, его центр симметрии O_1 имеет координаты $(x_0;y_0)$, то есть $(-2;1)$.

Из канонического уравнения находим: $a^2 = 16,\ a = 4$ и $b^2 = 12,\ b = 2\sqrt{3}$, $a > b$. Поэтому половина расстояния между фокусами

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = 2,$$

фокусы эллипса лежат на оси параллельной оси Ox.

Укажем координаты вершин эллипса: $A_1(x_0 - a; y_0)$, $A_2(x_0 + a; y_0)$, $B_1(x_0; y_0 - b)$, $B_2(x_0; y_0 + b)$, то есть $A_1(-6; 1)$, $A_2(2; 1)$, $B_1(-2; 1 - 2\sqrt{3})$, $B_2(-2; 1 + 2\sqrt{3})$.

Фокусы эллипса $F_1(x_0 - c; y_0)$, $F_2(x_0 + c; y_0)$, то есть $F_1(-4; 1)$ и $F_2(0; 1)$.

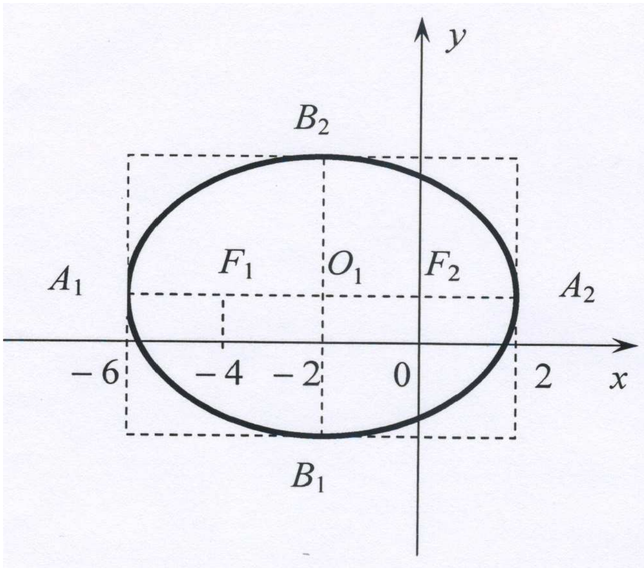

Рис. 6

Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon = c/a = 2/4 = 0,5$.

Директрисы эллипса параллельны малой оси эллипса и отстоят от неч на расстоянии равном $a/\varepsilon = 4/0,5 = 8$, тогда уравнения директрис $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$, то есть $x = -2 \pm 8$. Значит, прямые $x = -10$ и $x = 6$ - директрисы заданного эллипса.

Эллипс асимптот не имеет.

Раздел V. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Понятие множества. Операции над множествами. Действия над комплексными числами в алгебраической и показательной форме. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме, извлечение корня. Многочлены. Разложение на множители. Теорема Безу. Числовые последовательности (основные понятия). Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Предел числовой последовательности. Функциональная зависимость. Основные характеристики функций. Графики основных элементарных функций. Применение функций в экономике. Паутинные модели рынка. Понятие окрестности точки. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Предел функции при $x \to \infty$. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей различных типов. Сравнение бесконечно малых функций. Применение эквивалентных бесконечно малых функций при вычислении пределов и в приближенных вычислениях. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.

Пример 1. Даны универсальное множество U и множества X, Y, Z (рис. 7). Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна множества: а) $\overline{X} \cup \overline{Y}$; б) $X \cap Y \cap Z$; в) $(X \cap Y) \cup \overline{Z}$; г) $(Y \cap Z) \setminus X$.

а) $\overline{X} \cup \overline{Y}$.

Решение. Множество $\overline{X}$ есть дополнение множества X, $\overline{Y}$ – дополнение множества Y,$\overline{X} \cup \overline{Y}$ – объединение множеств $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ (рис. 8).

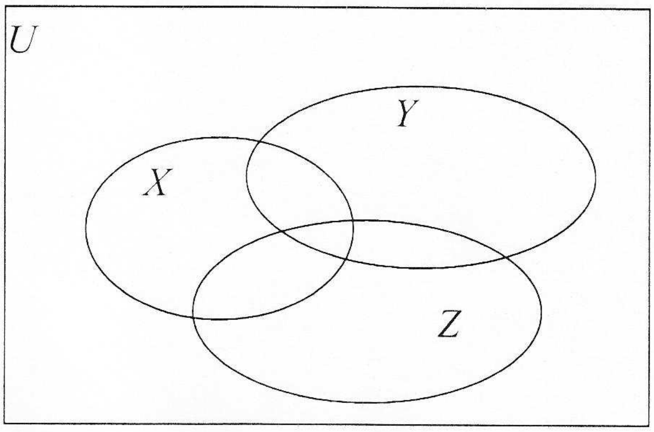

Рис. 7

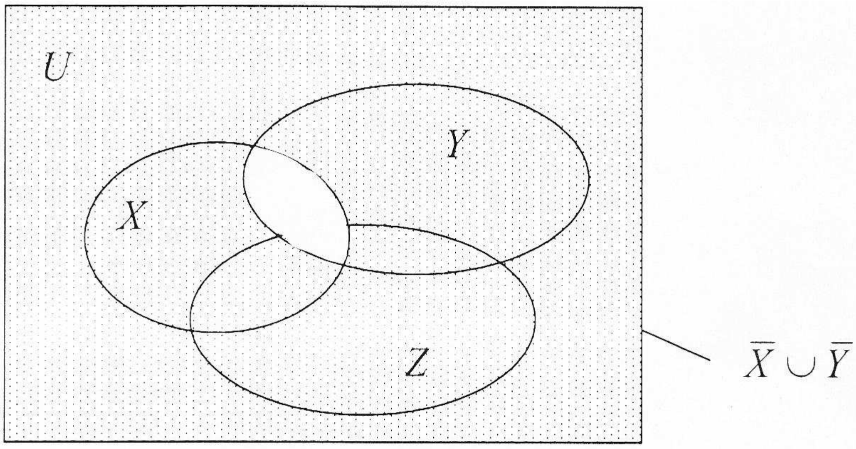

Рис. 8

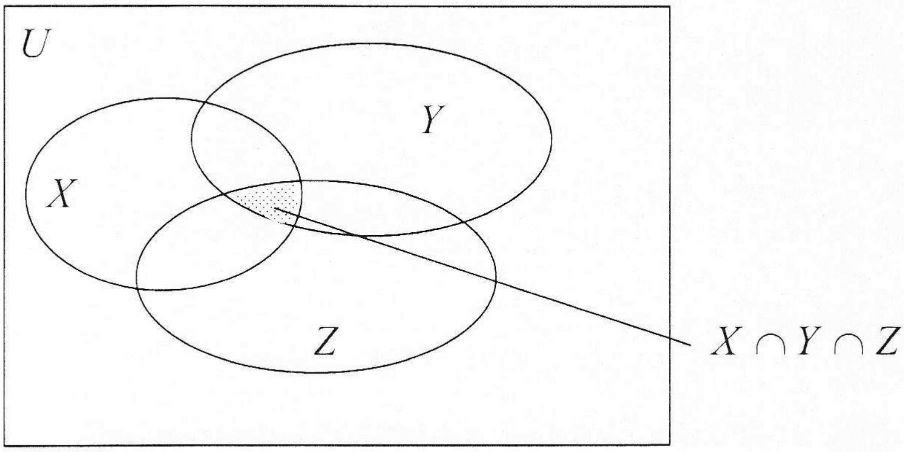

Рис. 9

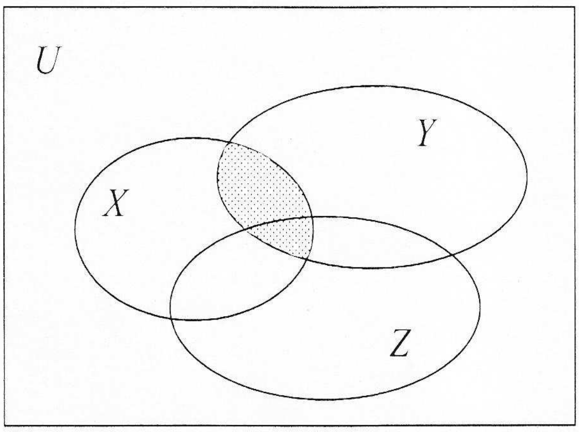

Рис. 10

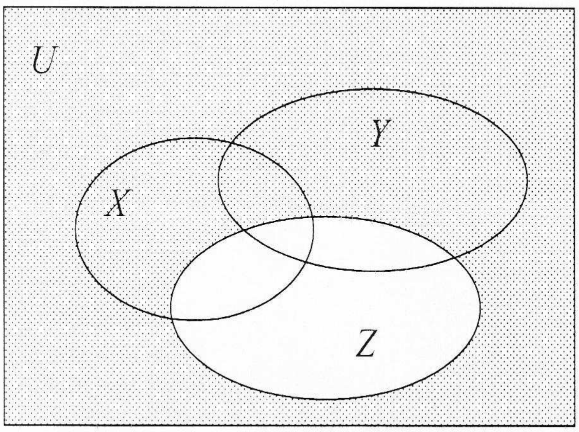

Рис. 11

б) $X \cap Y \cap Z$.

Решение. Решение представлено на рис. 9.

в) $(X \cap Y) \cup \overline{Z}$.

Решение. Пересечение множеств $X \cap Y$ – это есть общая часть этих множеств (рис. 10). $\overline{Z}$ – это часть множества U, которая не входит в Z (рис. 11). На рис. 12 изображено объединение этих множеств.

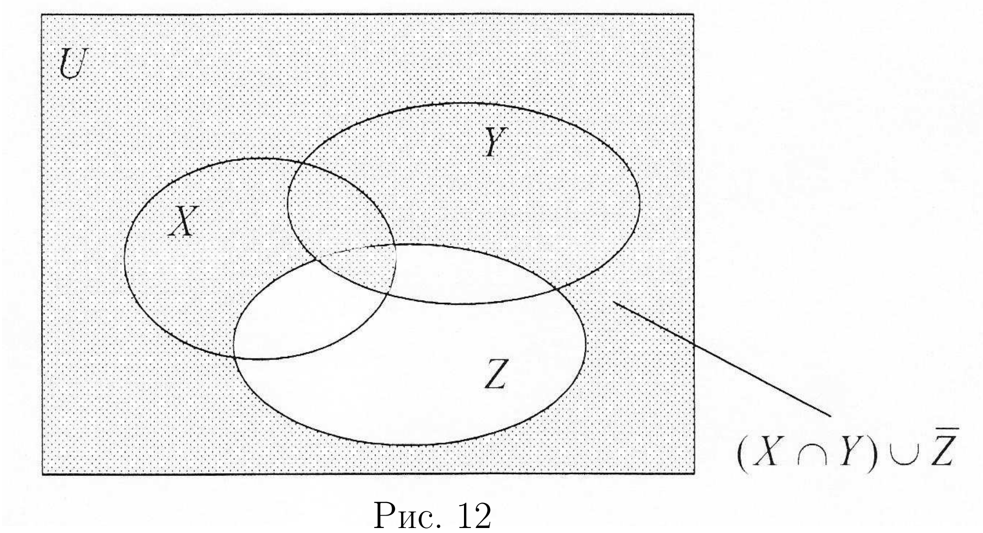

Рис. 12

г) $(Y \cap Z) \backslash X$.

Решение. Из общей части множеств Y и Z нужно удалить элементы, которые принадлежат множеству X (рис. 13).

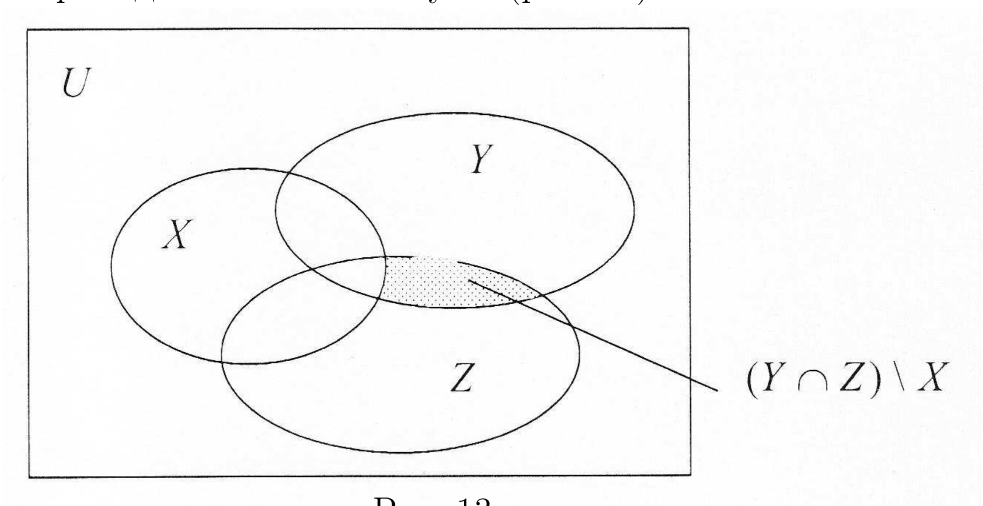

Рис. 13

Пример 2. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Решение. 1. Здесь $a = -2$, $b = 2\sqrt{3}$. Следовательно,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4.$$

2. Изобразим число z геометрически (рис. 14).

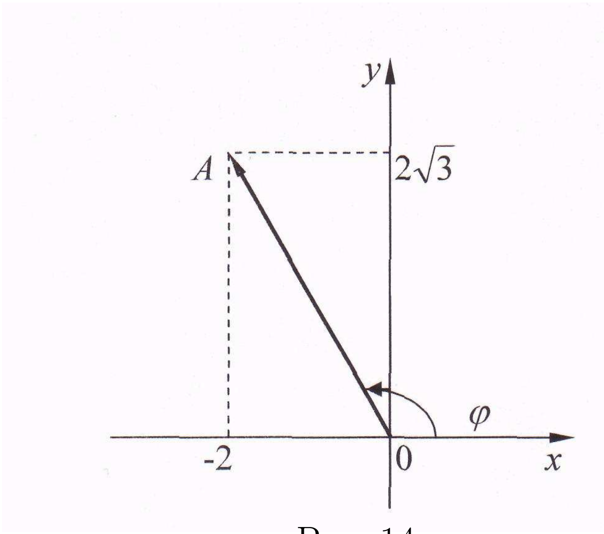

Рис. 14

Мы видим, что числу z соответствует точка A , лежащая во II четверти.

3. Находим

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Этим соотношениям соответствует угол $\varphi = \pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

4. Запишем данное число в тригонометрической форме

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Пример 3. Записать число $z = 3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$ в показательной форме.

Решение. Здесь $r = 3$, $\varphi = 3\pi/2$. Следовательно, показательная форма числа имеет вид $z = 3e^{\frac{3\pi}{2}\,i}$.

Пример 4. Записать число $z = -5i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Чтобы представить число z в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z = re^{i\varphi}$, нужно найти модуль и аргумент числа z. Здесь $a = 0$, $b = -5$, тогда $r = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$, так как точка z лежит на мнимой оси комплексной плоскости. Зная r и φ, получим $z = 5\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$ и $z = 5e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

Пример 5. Записать число $z = 4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$ в алгебраической и показательной формах.

Решение. Так как аргумент φ данного числа равен $\dfrac{4\pi}{3}$, то числу z соответствует на комплексной плоскости точка, расположенная в III четверти. Используя формулы приведения, находим

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставим в тригонометрическую форму числа полученные значения и раскроем скобки:

$$z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) =$$

$$= -4\cdot\frac{1}{2} + 4i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 - 2i\sqrt{3}.$$

Итак, алгебраическая форма данного числа: $z = -2 - 2i\sqrt{3}$, показательная форма: $z = 4e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

Пример 6. Даны комплексные числа $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 5-7i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$.

Решение. а) $z_1 + z_2 = (2+3i) + (5-7i) = (2+5) + (3i-7i) = 7-4i$;
б) $z_1 - z_2 = (2+3i) - (5-7i) = (2-5) + (3i+7i) = -3+10i$;
в) $z_1 z_2 = (2+3i)(5-7i) = 2\cdot 5 + 2\cdot(-7i) + 3i\cdot 5 + 3i\cdot(-7i) =$
$= 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 + i + 21 = 31 + i$.

Пример 7. Выполнить деление $\dfrac{2+3i}{5-7i}$.

Решение. Имеем

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)} = \frac{-11+29i}{25+49} = \frac{-11+29i}{74} = -\frac{11}{74} + \frac{29}{74}i.$$

Пример 8. Найти $\dfrac{3+5i}{2+6i}$.

Решение. Имеем

$$\frac{3+5i}{2+6i} = \frac{(3+5i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)} = \frac{36-8i}{4+36} = \frac{36-8i}{40} = \frac{9}{10} - \frac{1}{5}i.$$

Пример 9. Выполнить действия: а) $(2+3i)^2$; б) $(5+3i)^3$; в) $(3-4i)(3+4i)$

Решение. а) $(2+3i)^2 = 4+2\cdot 2\cdot 3i+(3i)^2 = 4+12i-9 = -5+12i$.
б) $(5+3i)^3 = 125+3\cdot 5^2\cdot 3i+3\cdot 5\cdot(3i)^2+(3i)^3$; так как $i^2=-1$, а $i^3=-i$, то получим $(5+3i)^3 = 125+225i-135-27i = -10+198i$.
в) $(3-4i)(3+4i) = 9-16i^2 = 9+16 = 25$.

Пример 10. Решить уравнение $x^2-6x+13=0$.

Решение. Найдем дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$. Так как $a=1$, $b=-6$, $c=13$, то $D=-16$, $\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=4i$. Тогда корни уравнения

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{6-4i}{2} = 3-2i, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{6+4i}{2} = 3+2i.$$

Пример 11. Найти z^6, если $z=-\sqrt{3}+i$.

Решение. Запишем число z в тригонометрической форме, учитывая, что $a=-\sqrt{3}$, $b=1$. Найдем $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+1}=2$.

Составим отношения

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что точка z расположена во II четверти, находим

$$\arg z = \varphi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi.$$

Следовательно, $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Согласно формулам возведения в степень, имеем $\left|z^6\right| = 2^6 = 64$, $\arg(z^6) = \dfrac{5\pi}{6}\cdot 6 = 5\pi$, поэтому

$$z^6 = 64(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 64(\cos\pi + i\sin\pi) = 64(-1+i\cdot 0) = -64.$$

Пример 12. $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$, $z_2 = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$. Найти: а) z_1z_2, б) z_1/z_2, в) z_1^5, г) $\sqrt{z_1}$.

Решение. а) Имеем $|z_1z_2| = 3\cdot 5 = 15$; $\arg(z_1z_2) = \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{4}$. Значит, $z_1z_2 = 15\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$.

б) Находим $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{3}{5}$, $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \dfrac{5\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$, следовательно, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3}{5}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

в) Имеем $z_1^5 = \left[3\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)\right]^5$. Так как $\left|z_1^5\right| = 3^5 = 243$, $\arg(z_1^5) = \dfrac{5\pi}{4}\cdot 5 = \dfrac{25\pi}{4}$, то $z_1^5 = 243\left(\cos\dfrac{25\pi}{4} + i\sin\dfrac{25\pi}{4}\right)$.

г) Корень n-й степени из комплексного числа z имеет ровно n значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{10}$$

где k принимает значения: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Для извлечения квадратного корня из числа

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

воспользуемся формулой (1):

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi k}{2}\right),$$

где k принимает два значения: 0 и 1. При $k = 0$ получим

$$u_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\frac{5}{4}\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{5}{4}\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{8}\pi + i\sin\frac{5}{8}\pi\right),$$

при $k = 1$ имеем

$$u_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi}{2}\right) = \sqrt{3}\left(\cos\frac{13}{8}\pi + i\sin\frac{13}{8}\pi\right).$$

Пример 13. Найти $\sqrt[3]{z}$, если $z = 1 - i$.

Решение. Запишем комплексное число z в тригонометрической форме. Найдем $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Составим отношения

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Аргумент $\varphi = 2\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{7}{4}\pi$, так как точка z расположена в IV четверти. Теперь воспользуемся формулой (10):

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi k}{3}\right),$$

где k принимает значения 0, 1, 2. Получим, если $k = 0$, то

$$u_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right);$$

если $k = 1$, то

$$u_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15}{12}\pi + i\sin\frac{15}{12}\pi\right);$$

если $k = 2$, то

$$u_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi + 4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi + i\sin\frac{23}{12}\pi\right).$$

Пример 14. Решить уравнение $z^6 - 1 = 0$.

Решение. Определим модуль и аргумент числа 1: $r = 1$, $\varphi = 0$.

При полученных значениях r и φ записываем формулу (10):

$$z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}\right),\ k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Заметим, что справа стоит $\sqrt[6]{1}$ – арифметический корень, его единственное значение равно 1.

Придавая k последовательно значения от 0 до 5, выписываем решения уравнения:

$$z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \qquad z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad z_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$z_5 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 15. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2 + 3n - 5}{3n^2 - n + 6}$.

Решение. При $n \to \infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, применять свойство о пределе частного нельзя, так как оно предполагает существование конечных пределов последовательностей. Преобразуем данную последовательность, разделив числитель и знаменатель на n^2. Затем применим свойства о пределе частного, пределе суммы, разности и снова о пределе частного, последовательно найдем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{3n^2-n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3/n-5/n^2}{3-1/n+6/n^2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+3/n-5/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(3-1/n+6/n^2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}(3/n)-\lim\limits_{n\to\infty}(5/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)+\lim\limits_{n\to\infty}(6/n^2)}=\frac{1+0-0}{3-0+0}=\frac{1}{3}.$$

Пример 16. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$.

Решение. Чтобы применить теорему о пределе частного, сначала проверим, не равен ли нулю предел делителя при $x=4$.

Так как $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)=4-3=1\neq 0$, то в данном случае можно воспользоваться указанной теоремой:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(x^2-2x)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-3)}=\frac{4^2-2\cdot 4}{4-3}=\frac{8}{1}=8.$$

Пример 17. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, так как поведение числителя и знаменателя при $x\to\infty$ определяется членами с наибольшими показателями степеней. Разделим числитель и знаменатель на x^4, то есть на x с наибольшим показателем степени. Используя теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x-2x^4}{4x^4+3x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7}{x^3}-2}{4+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}=\frac{0-2}{4+0+0}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2},$$

так как $\dfrac{7}{x^3}$, $\dfrac{3}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^4}$ – бесконечно малые при $x\to\infty$.

Пример 18. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3x^2}{5x^3+9}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Наибольшая степень среди всех слагаемых – третья. Разделим числитель и знаменатель на x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3x^2}{5x^3+9}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x}}{5+\dfrac{9}{x^3}}=\frac{0-0}{5+0}=\frac{0}{5}=0,$$

так как $\dfrac{2}{x^2}$, $\dfrac{3}{x}$, $\dfrac{9}{x^3}$ – бесконечно малые при $x\to\infty$.

Пример 19. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x+1}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на x^3 и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^3}}{\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\infty,$$

так как числитель последней дроби стремится к пределу, отличному от нуля, а знаменатель – к нулю.

Пример 20. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4x}$.

Решение. При $x=4$ числитель и знаменатель данной функции обращаются в нуль. Получена неопределенность $\dfrac{0}{0}$, которую нужно раскрыть. Преобразуем данную функцию, разлагая числитель с помощью формулы

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+px+q=0$; в знаменателе вынесем общий множитель x за скобку.

Так как уравнение $x^2-6x+8=0$ имеет корни $x_1=2$ и $x_2=4$, то $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$. Подставляя это выражение в заданную функцию и сокращая на общий множитель $x-4\neq 0$, получим

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x-2)(x-4)}{x(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x}=\frac{4-2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Пример 21. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$.

Решение. При $x=1$ числитель и знаменатель функции обращаются в нуль, имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Преобразуем данную функцию, разлагая на множители числитель и знаменатель по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Подставляя соответствующие выражения и сокращая на общий множитель $x-1\neq 0$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}{4(x-1)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)}{4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+2}{4x-1}=\frac{3\cdot 1+2}{4\cdot 1-1}=\frac{5}{3}.$$

Пример 22. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+4x+4}$.

Решение. Непосредственная подстановка $x=-2$ показывает, что имеет место неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Разложив числитель на множители, в знаменателе применив формулу квадрата суммы, сократив дробь, находим

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{x^2+4x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2}.$$

Здесь знаменатель дроби стремится к нулю, а числитель приближается к -1. Значит, вся дробь неограниченно растет, что условно записывают так: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+4x+4}=\infty$.

Пример 23. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$.

Решение. Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на выражение , сопряженное числителю, получим

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{2+x})^2-(\sqrt{2-x})^2}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2+x-(2-x)}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$=\frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$
$$=\frac{2}{5(\sqrt{2+0}+\sqrt{2-0})}=\frac{2}{10\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Пример 24. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{6-x})^2}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{x+2-(6-x)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{2(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x})}{2}=\frac{(2+2)(\sqrt{2+2}+\sqrt{6-2})}{2}=8.$$

Пример 25. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3x^2}$.

Решение. Преобразуем числитель к виду $1-\cos 4x = 2\sin^2 2x$. Далее найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{3x^2}=\frac{2\cdot 4}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=$$
$$=\frac{8}{3}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=\frac{8}{3}\cdot 1=\frac{8}{3}.$$

Пример 26. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{x+9}-3}$.

Решение. При $x = 0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональность. Освободимся от иррациональности и применим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+9}-3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x(\sqrt{x+9}+3)}{(x+9)-9} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+9}+3) = 2\cdot 1\cdot 6 = 12.$$

Пример 27. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\mathrm{ctg}3x$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0} x\mathrm{ctg}3x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{tg}3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\mathrm{tg}3x} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 28. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x - \sin 2x}{\arcsin 3x}$.

Решение. Используя формулу разности синусов

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x - \sin 2x}{\arcsin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cos 4x}{\frac{\arcsin 3x}{3x}\,3x} =$$

$$= \frac{2\cdot 2}{3}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos 4x}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{3x}}\,\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

Пример 29. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{3x^2}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^∞, так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{2+0}{2-0} = 1, \quad \lim_{x\to\infty}3x^2 = \infty.$$

Выделим целую часть дроби

$$\frac{2x^2+3}{2x^2-1} = \frac{(2x^2-1)+4}{2x^2-1} = \frac{2x^2-1}{2x^2-1} + \frac{4}{2x^2-1} = 1 + \frac{4}{2x^2-1}.$$

Функция $\alpha(x) = \dfrac{4}{2x^2-1}$ является бесконечно малой величиной при $x \to \infty$. Домножим показатель степени на $\left(\alpha(x) \cdot \dfrac{1}{\alpha(x)}\right)$, это действие не нарушает знака равенства. Получим

$$P = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{4}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{4}\cdot\frac{4}{2x^2-1}\cdot 3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{4}{2x^2-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{4}}\right)^{\frac{12x^2}{2x^2-1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2-1}},$$

так как $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0} (1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$. Теперь найдем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{12x^2}{2x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{12}{2-\dfrac{1}{x^2}} = \frac{12}{2-0} = 6.$$

Значит, $P = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2}{2x^2-1}} = e^6$.

Пример 30. Исследовать на непрерывность функцию $y = 16^{1/x}$. Сделать схематический чертеж.

Решение. Функция $y = 16^{1/x}$ не определена в точке $x = 0$. Найдем односторонние пределы функции в этой точке

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 16^{1/x} = 16^{\lim\limits_{x\to 0-} 1/x} = 0;$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 16^{1/x} = 16^{\lim\limits_{x\to 0+} 1/x} = +\infty.$$

Так как один из односторонних пределов равен бесконечности, то $x = 0$ – точка разрыва второго рода. Во всех остальных точках области определения функция $y = 16^{1/x}$ является непрерывной.

Чтобы построить схематический чертеж (рис. 15), вычислим пределы функции на бесконечности:

$$\lim_{x\to-\infty} 16^{1/x} = 16^{\lim\limits_{x\to-\infty} 1/x} = 16^0 = 1; \quad \lim_{x\to+\infty} 16^{1/x} = 16^{\lim\limits_{x\to+\infty} 1/x} = 16^0 = 1.$$

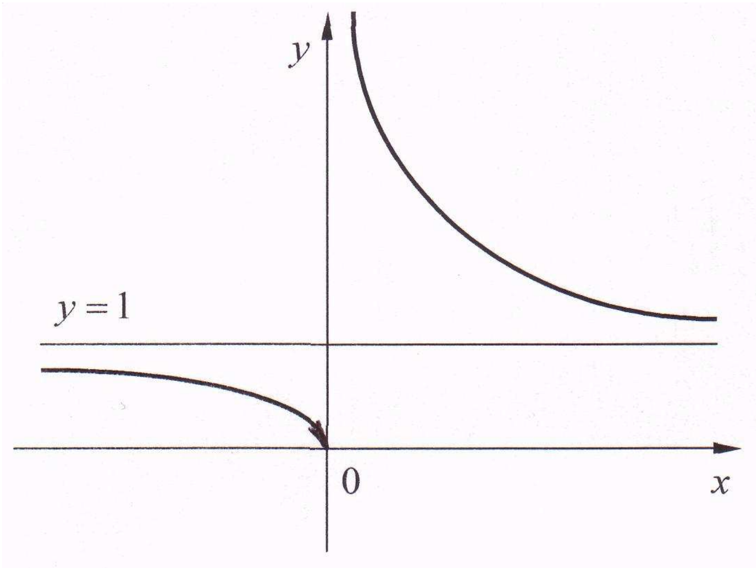

Рис. 15

Пример 31. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \le -2; \\ x^2-4, & \text{если } -2 < x < 1; \\ 4-2x, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$$

Сделать схематический чертеж.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на интервалах $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ и $(1, +\infty)$. При $x = -2$ и $x = 1$ меняется аналитическое выражение функции, только в этих точках функция может иметь разрыв.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2-0} f(x) = \lim_{x \to -2-0} (x+2) = 0; \quad \lim_{x \to -2+0} f(x) = \lim_{x \to -2+0} (x^2-4) = 0.$$

Односторонние пределы совпадают и равны значению функции в этой точке. Следовательно, функция непрерывна в точке $x = -2$.

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (x^2-4) = -3; \quad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (4-2x) = 2.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x = 1$ конечны и не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода.

График функции показан на рис. 16.

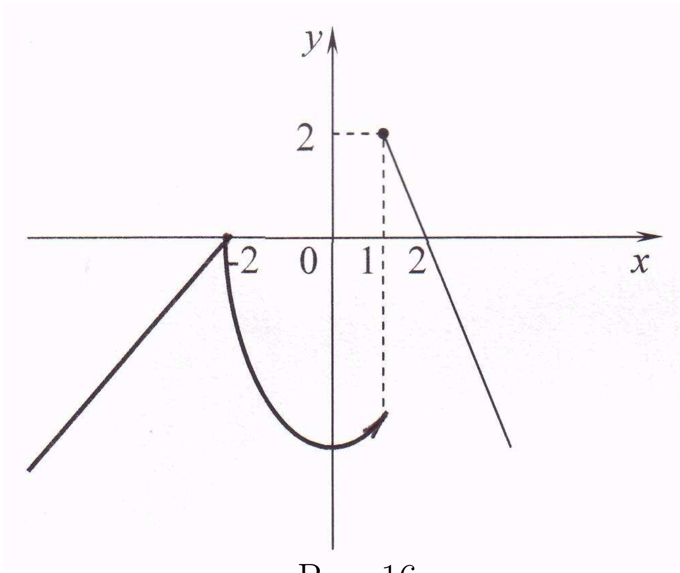

Рис. 16

Пример 32. Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1}, & x < -1; \\ \sqrt{1-x^2}, & -1 \le x \le 0; \\ 1 - x, & x > 0. \end{cases}$$

Сделать схематический чертеж.

Решение. Так как данная функция определена на всей числовой прямой, то «подозрительными на разрыв» являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, это точки $x = -1$ и $x = 0$. Вычислим односторонние пределы функции в этих точках.

Для $x = -1$ имеем:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{|x+1|}{x+1} = \lim_{x\to -1-0} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \sqrt{1-x^2} = 0.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = -1$ существуют, но не равны между собой. Следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода.

Для $x = 0$ получаем:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \sqrt{1-x^2} = 1; \quad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (1-x) = 1.$$

Односторонние пределы равны между собой и равны значению функции в точке: $f(0) = 1$. Следовательно, исследуемая точка является точкой непрерывности.

График функции приведен на рис. 17.

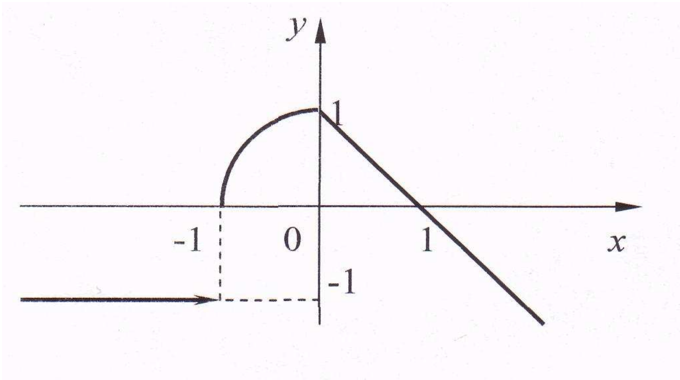

Рис. 17

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами, их свойства.

2. Определители квадратных матриц, свойства определителей.

3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).

4. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы.

5. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц.

6. Системы линейных уравнений (основные понятия).

7. Системы линейных уравнений: матричная запись и матричное решение систем.

8. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

10. Исследование систем линейных уравнений на совместность.

11. Линейная модель многоотраслевой экономики. Продуктивные модели Леонтьева.

12. Понятие линейного пространства. Примеры линейных пространств. Понятие n-мерного линейного векторного пространства.

13. Понятие линейной зависимости и независимости системы векторов.

14. Базис линейного пространства. Размерность линейного пространства. Понятие ранга системы векторов.

15. Координаты вектора в базисе. Связь между координатами вектора в различных базисах.

16. Евклидовы пространства. Свойства длины вектора.

17. Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора.

18. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

19. Характеристический многочлен линейного оператора.

20. Линейная модель обмена (модель международной торговли).

21. Квадратичные формы.

22. Определение вектора. Линейные операции над векторами, их свойства.

23. Декартовая система координат. Нахождение координат вектора. Прямоугольно-декартовая система координат.

24. Деление отрезка в данном отношении.

25. Проекция вектора на ось, свойства проекций.

26. Скалярное произведение векторов, его свойства.

27. Векторное произведение векторов, его свойства.

28. Смешанное произведение векторов, его свойства.

29. Полярные координаты.

30. Понятие об уравнении линии. Основные задачи аналитической геометрии.

31. Различные виды уравнения прямой на плоскости.

32. Исследование общего уравнения прямой.

33. Взаимное расположение прямых на плоскости.

34. Линии второго порядка.

35. Уравнения поверхности и линии.

36. Различные виды уравнения плоскости.

37. Исследование общего уравнения плоскости.

38. Взаимное расположение плоскостей

39. Различные виды уравнения прямой в пространстве.

40. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

41. Взаимное расположение прямой и плоскости.

42. Поверхности второго порядка.

43. Множества (основные понятия). Операции над множествами.

44. Числовые множества. Числовые промежутки, окрестность точки.

45. Комплексные числа (основные понятия), геометрическое изображение комплексных чисел.

46. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.

47. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

48. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме, извлечение корня.

49. Действия над комплексными числами в показательной форме.

50. Многочлены. Разложение на множители. Теорема Безу.

51. Числовые последовательности (основные понятия).

52. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

53. Предел числовой последовательности. Предельный переход в неравенствах.

54. Монотонные последовательности.

55. Понятие функции. Способы задания функции. Основные характеристики функций. Понятия обратной функции и сложной функции.

56. Элементарные функции, классификация функций.

57. Применение функций в экономике. Паутинные модели рынка.

58. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Предел функции при $x \to \infty$.

59. Бесконечно большие и бесконечно малые функции.

60. Основные теоремы о пределах.

61. Замечательные пределы.

62. Раскрытие неопределенностей различных типов.

63. Непрерывность функции в точке.

64. Основные теоремы о непрерывных функциях. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

65. Классификация точек разрыва функции.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку. Необходимо оставить поля шириной 2-3 см для замечаний преподавателя. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы.

2. В работу должны быть включены все задачи, указанные в контрольном задании.

3. Перед решением каждой задачи нужно полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, им еют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

4. Решение задачи следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все свои действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

5. Студент выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

6. Контрольные работы должны быть сданы на проверку не позднее, чем за две недели до начала сессии.

7. Контрольные работы, проверенные преподавателем, вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления проверенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена. При необходимости (по требованию преподавателя) студент должен давать на экзамене устные пояснения ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этих работах.

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Найти: а) $AB - BA$; б) $2A - 4B$.
2. Найти: а) $AC - CA$; б) $3C - 3A$.
3. Найти: а) ABC; б) $4A - 2B$.
4. Найти: а) BAC; б) $3B - C$.
5. Найти: а) $CB - BC$; б) $-5B + 2A$.
6. Найти: а)$A^2 - AB$; б) $-2A + 3C$.
7. Найти: а) CBA; б) $2C - 3A$.
8. Найти: а)CAB; б) $-A + 4B$.
9. Найти: а) $B^2 - AC$; б) $-3B - 4A$.
10. Найти: а) $BC - C^2$; б) $-4C + 5B$.

Задание 2. Вычислить определители.

1. а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

3. а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. а) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -8 \\ 1 & -3 & 27 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -8 \\ 1 & -3 & 9 & 27 \\ -1 & 4 & -16 & -64 \end{vmatrix}$.

5. а) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & -5 & 7 \\ 5 & -7 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 \\ 3 & -5 & 7 & -1 \\ 5 & -7 & 1 & -3 \\ 7 & -1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$.

6. а) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

7. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

8. а) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

9. а) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

10. а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$.

Задание 3. Вычислить ранг матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -3 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -3 & -5 \\ 4 & -1 & -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & -7 \\ 2 & 5 & 5 & 8 & -2 \end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & -1 & 10 \\ 5 & -1 & -4 & -7 & 8 \\ 1 & -2 & -5 & 7 & -4 \end{pmatrix}$.

9. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -5 & 10 \\ 1 & -1 & 5 & -15 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 25 & -5 \\ 5 & 4 & -5 & 9 & -19 \\ 1 & 4 & -2 & 25 & -4 \end{pmatrix}$.

Задание 4. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решить систему: а) методом Крамера; б) в матричной форме; в) методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x_1 - 10x_2 + 6x_3 = -1, \\ 6x_1 + 5x_2 - x_3 = 17, \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 31. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 30, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -5. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 25, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 37. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -15, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 14, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 32. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7, \\ -6x_1 + 3x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 22, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 23, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -9, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 18. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -17, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -7. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 20. \end{cases}$

Задание 5. Решить систему методом Гаусса. Записать общее решение и выделить два частных решения.

1. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$

Задание 6. Даны координаты вершин треугольника ABC.

Найти:

а) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, их разложение по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и их модули;

б) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;

в) направляющие косинусы векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$;

г) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;

д) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ как на сторонах.

1. $A(1;2), B(-11;11), C(-9;-3)$. 2. $A(-7;2), B(5;11), C(3;-3)$.
3. $A(0;-1), B(12;8), C(10;-6)$. 4. $A(11;20), B(-5;7), C(7;-2)$.
5. $A(-5;0), B(7;9), C(5;-5)$. 6. $A(-6;-2), B(6;7), C(4;-7)$.
7. $A(-4;-1), B(8;8), C(6;-6)$. 8. $A(-1;0), B(11;9), C(9;-5)$.
9. $A(3;0), B(-9;9), C(-7;-5)$. 10. $A(-7;1), B(5;-8), C(3;6)$.

Задание 7. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

а) длины сторон треугольника;

б) уравнения сторон треугольника, указать их угловые коэффициенты, координаты направляющих и нормальных векторов;

в) угол ACB;

г) уравнение высоты AH и ее длину;

д) уравнение медианы BM и ее длину;

е) координаты точки K пересечения высоты AH и медианы BM треугольника;

ж) уравнение прямой, проходящей через точку C, параллельно стороне AB.

1. $A(15;8), B(5;3), C(17;-6)$.
2. $A(3;15), B(-7;10), C(5;1)$.
3. $A(18;14), B(2;1), C(14;-8)$.
4. $A(15;19), B(-1;6), C(11;-3)$.
5. $A(0;10), B(-10;5), C(2;-4)$.
6. $A(12;23), B(-4;10), C(8;1)$.
7. $A(18;18), B(2;5), C(14;-4)$.
8. $A(7;19), B(-9;6), C(3;-3)$.
9. $A(16;15), B(0;2), C(12;-7)$.
10. $A(6;22), B(-10;9), C(2;0)$.

Задание 8. Даны координаты вершин пирамиды $SABC$ с вершиной в точке S. Найти:

а) площадь грани ABC;

б) объем пирамиды $SABC$;

в) уравнения ребер SA, SB, указав координаты направляющих векторов;

г) уравнения граней ABC и SAB, указав координаты их нормалей;

д) длину высоты SH;

е) угол между плоскостью основания ABC и боковым ребром SA;

ж) угол между плоскостью основания ABC и боковой гранью SAB;

з) уравнение плоскости, проходящей через вершину S параллельно основанию ABC;

и) уравнение прямой, проходящей через точку параллельно ребру SA;

к) уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости основания ABC;

л) угол между боковыми ребрами SA, SB.

1. $S(-4;4;0)$, $A(-4;2;-1)$, $B(0;6;-3)$, $C(-2;13;-11)$.
2. $S(0;6;4)$, $A(0;4;3)$, $B(4;8;1)$, $C(2;15;-7)$.
3. $S(-2;2;-1)$, $A(-2;0;-2)$, $B(2;4;-4)$, $C(0;11;-12)$.

4. $S(3;5;-2)$, $A(3;3;-3)$, $B(7;7;-5)$, $C(5;14;-13)$.
5. $S(5;8;5)$, $A(-3;4;-3)$, $B(-2;2;-1)$, $C(8;6;7)$.
6. $S(4;4;1)$, $A(0;0;-1)$, $B(1;3;4)$, $C(5;0;-3)$.
7. $S(-1;3;0)$, $A(-4;1;-3)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;3;-2)$.
8. $S(1;1;4)$, $A(5;-1;2)$, $B(2;-1;2)$, $C(-1;0;-5)$.
9. $S(-1;0;-3)$, $A(-7;3;-2)$, $B(0;2;1)$, $C(4;-1;0)$.
10. $S(-1;-2;-3)$, $A(2;1;-2)$, $B(3;3;3)$, $C(1;1;2)$.

Задание 9. Привести уравнение кривой к каноническому виду и построить ее. Указать координаты вершин и фокусов. Написать уравнения директрис и асимптот, если они есть. Вычислить эксцентриситет кривой.

1. $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0$.
2. $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$.
3. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$.
4. $9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 68 = 0$.
5. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 64y - 172 = 0$.
6. $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$.
7. $4x^2 - y^2 - 16x - 6y + 11 = 0$.
8. $x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + 21 = 0$.
9. $5x^2 + 3y^2 - 10x + 12y + 2 = 0$.
10. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

Задание 10. Даны универсальное множество U и множества X, Y, Z (рис. 7). Изобразить на диаграммах Эйлера-Венна множества.

1.	а) $X \cap \overline{Y}$;	б) $(X \cap Z) \cup \overline{Y}$.
2.	а) $X \cup (Y \cap Z)$;	б) $X \backslash (Y \cup Z)$.
3.	а) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;	б) $\overline{X} \cap \overline{Y}$.
4.	а) $\overline{X \cap Y}$;	б) $(X \cup Y) \cup Z$.
5.	а) $X \cap (Y \cup Z)$;	б) $X \backslash \overline{Z}$.
6.	а) $(X \backslash Z) \cup (Y \backslash Z)$;	б) $X \cup Y$.
7.	а) $X \cup (Z \cap Y)$;	б) $\overline{X} \cup Z$.
8.	а) $(Y \cup X) \cap (Y \cup Z)$;	б) $\overline{Z} \cap \overline{Y}$.
9.	а) $\overline{X \cup Y}$;	б) $(X \cup Y) \cap Z$.
10.	а) $Z \cap (Y \cup X)$;	б) $Y \backslash \overline{X}$.

Задание 11. Даны комплексные числа z_1 и z_2, записать эти числа в тригонометрической и показательной формах. Выполнить указанные

операции в тригонометрической и показательной формах:

$$z_1 z_2, \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^3, \quad \sqrt[5]{z_1}.$$

1. $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 1 + i.$
2. $z_1 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_2 = -i.$
3. $z_1 = -3 + 3\,i, \quad z_2 = -1 - i.$
4. $z_1 = -1 + \sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 1 + i.$
5. $z_1 = -\sqrt{3} + i, \quad z_2 = -1 + i.$
6. $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 1 - i.$
7. $z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 1 - i.$
8. $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}\,i, \quad z_2 = 1 - i.$
9. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2\,i, \quad z_2 = i.$
10. $z_1 = 5 + 5\,i, \quad z_2 = \sqrt{3} + i.$

Задание 12. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{2x^2 + 10x + 12}{-2x^2 + x + 21}, \quad x_0 = 3,\ x_0 = -3,\ x_0 = \infty.$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{-3x^2 - x + 10}{x^2 + 11x + 18}, \quad x_0 = 1,\ x_0 = -2,\ x_0 = \infty.$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{-2x^2 + 5x + 12}{-2x^2 + 6x + 8}, \quad x_0 = 0,\ x_0 = 4,\ x_0 = \infty.$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 + 19x + 28}{-x^2 - 3x + 4}, \quad x_0 = -1,\ x_0 = -4,\ x_0 = \infty.$
5. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{-x^2 + x + 6}{-2x^2 + x + 15}, \quad x_0 = 1/2,\ x_0 = 3,\ x_0 = \infty.$
6. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{2x^2 + x - 3}, \quad x_0 = 2,\ x_0 = 1,\ x_0 = \infty.$
7. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{2x^2 - 7x + 6}, \quad x_0 = 1,\ x_0 = 2,\ x_0 = \infty.$
8. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{-x^2 + 4x + 5}{x^2 - 16x + 55}, \quad x_0 = 2,\ x_0 = 5,\ x_0 = \infty.$
9. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{3x^2 + 8x + 5}{3x^2 + 9x + 6}, \quad x_0 = 3,\ x_0 = -1,\ x_0 = \infty.$

10. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}\,, \qquad x_0=-1,\ x_0=1,\ x_0=\infty.$

Задание 13. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x}}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}{x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{5-x}}{x-2}$
5. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x-2}}{5-x}$
6. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{x-1}$
8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{6-x}}$
9. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}}{x-7}$
10. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x-2}-\sqrt{8-x}}$

Задание 14. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{5x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{7x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 5x \operatorname{tg} 2x}{3x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{6x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^3 x}{3x-\sin 2x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 6x \operatorname{tg} 3x}{6x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}^2 4x}{1-\cos 2x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x \operatorname{tg} 3x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 4x}{x\sin 3x}$

Задание 15. Вычислить пределы функций.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+2}\right)^{x+7}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{1+4x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$ 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{5x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x-4}{-x+1}\right)^{6-x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-3}\right)^{3x^2}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-5}\right)^{x+1}$ 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$

Задание 16. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

1. а) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & \text{если } x\le 0;\\ \cos x, & \text{если } 0<x\le \pi/2;\\ x-\pi/2, & \text{если } x>\pi/2;\end{cases}$ б) $f(x)=10^{1/(2+x)}$.

2. а) $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & \text{если } x\le 0;\\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le 2;\\ 1, & \text{если } x>2;\end{cases}$ б) $f(x)=5^{1/(3+x)}$.

3. а) $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\le 0;\\ x^2, & \text{если } 0<x\le 2;\\ x+1, & \text{если } x>2;\end{cases}$ б) $f(x)=8^{1/x}$.

4. а) $f(x)=\begin{cases} \cos x-1, & \text{если } x\le 0;\\ x^2+1, & \text{если } 0<x<1;\\ 1, & \text{если } x\ge 1;\end{cases}$ б) $f(x)=6^{1/(4+x)}$.

5. а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x\le 0;\\ x+1, & \text{если } 0<x\le 2;\\ 3x-1, & \text{если } x>2;\end{cases}$ б) $f(x)=6^{1/(5-x)}$.

6. а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x\le 0;\\ 1, & \text{если } 0<x\le 2;\\ x-2, & \text{если } x>2;\end{cases}$ б) $f(x)=7^{1/(7+x)}$.

7. а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \le 0; \\ x, & \text{если } 0 < x \le 2; \\ 2x - 2, & \text{если } x > 2; \end{cases}$ б) $f(x) = 16^{1/(6-x)}$.

8. а) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \le 0; \\ 2x, & \text{если } 0 < x < 1; \\ x, & \text{если } x \ge 1; \end{cases}$ б) $f(x) = 18^{1/(4-x)}$.

9. а) $f(x) = \begin{cases} -3x, & \text{если } x \le 0; \\ \operatorname{tg} x, & \text{если } 0 < x \le \pi/4; \\ 2, & \text{если } x > \pi/4; \end{cases}$ б) $f(x) = 10^{1/(4-x)}$.

10. а) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x \le 0; \\ -\cos x, & \text{если } 0 < x \le \pi/2; \\ x - \pi/2, & \text{если } x > \pi/2; \end{cases}$ б) $f(x) = 7^{1/(5-x)}$.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Майкопский государственный технологический университет»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
по математике

Вариант ________

Шифр ____________

Группа:

Направление:

Ф.И.О. ____

Дата поступления работы ______________________________

Оценка ________________________________

Рецензент: ____

Дата проверки контрольной работы «__» ________ 201__ г.

Подпись ____________

Дёмина Татьяна Ивановна
Шевякова Ольга Петровна

МАТЕМАТИКА
1 семестр

Методические рекомендации
по выполнению контрольной работы
для студентов направления
100400.62 «Туризм»

Подписано в печать 11.10.2014. Формат бумаги 60×84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Усл. п.л. 4,2.
Тираж 100 экз. Заказ 085

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке
оперативной полиграфии ИП Кучеренко В.О.
385008, г. Майкоп, ул. Пионерская, 411/76.
Тел. для справок 8-928-470-36-87. E-mail: slv01.maykop.ru@gmail.com