

Беданокон М.К., Мамадалиева Л.Н.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И
ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ
230700.62 ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА

Майкоп, 2014

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Майкопский государственный технологический университет»
Инженерно-экономический факультет

УДК 330.44 (07)
ББК 22.18
М 22

*Печатается по решению кафедры высшей математики и
системного анализа*

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук, доцент **Паланджянц Л.Ж.**
кандидат физико-математических наук, доцент **Шевякова О.П.**

Беданок М.К., Мамадалиева Л.Н. Математическое и имитационное моделирование экономических процессов: Учебно-методическое пособие для направления подготовки бакалавров 230700.62 Прикладная информатика. – Майкоп: ИП Кучеренко В.О., 2014 – 98 с.

Учебно-методическое пособие предназначено студентам очной и заочной форм обучения направления подготовки бакалавров 230700.62 Прикладная информатика для изучения дисциплины «Математическое и имитационное моделирование экономических процессов».

Пособие содержит краткие теоретические сведения о стохастических методах моделирования, образцы решений задач, задачи для самостоятельного решения и варианты расчетно-графической работы.

© Беданок М.К., 2014
© Мамадалиева Л.Н., 2014

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Понятие и классификация рядов динамики	5
1.1. Виды временных рядов	5
1.2. Показатели изменения уровней ряда динамики.....	6
Глава 2. Статистические методы нахождения тенденции развития показателя во времени	13
2.1. Типы трендовых моделей	13
2.2. Выявление наличия тренда	20
2.2.1. Метод разности средних	20
2.2.2. Метод Фостера-Стьюарта	23
2.3. Аналитическое нахождение параметров тренда.....	25
2.4. Проверка адекватности модели	29
2.5. Проверка точности модели.....	35
2.6. Расчет доверительного интервала в точке прогноза.....	37
Глава 3. Системы массового обслуживания	39
3.1. Построение вероятностных моделей систем массового обслуживания.....	39
3.2. Построение вероятностных моделей при изучении марковских случайных процессов.....	42
3.3. Процессы в системах массового обслуживания. Функционирование систем, приводящее к уравнениям Колмогорова.	49
3.4. Процессы «гибели и размножения».....	53
3.5. СМО с отказами.....	56
3.6. СМО с ожиданием.....	61
Глава 4. Имитационное моделирование	68
4.1. Основные понятия.....	68
4.2. Имитационное моделирование в системах массового обслуживания.....	79
4.3. Имитационное моделирование в теории управления запасами	80
Задачи к главе 1	83
Задачи к главе 2	86
Задачи к главе 3	89
Задачи к главе 4	91
Задачи к расчетно-графической работе.....	92
Библиографический список.....	94
Приложения.....	95

Введение

Целью математического моделирования исследуемых процессов является их изучение математическими методами и предсказание поведения процессов в будущем.

Математическое моделирование изучаемых процессов подразумевает создание исследователем его описания с помощью математических объектов (графиков, стохастических матриц, функций, уравнений и т.д.) для упрощения его исследования, получения о нем новых знаний, анализа и оценки возможностей принятия производственных решений. Построение математической модели необходимо для исследования характеристик системы математическими методами.

В пособии рассмотрены ряды числовых показателей, характеризующие изменение размеров общественных явлений во времени. Даны понятия видов рядов динамики. Рассмотрены показатели, характеризующие эти ряды, такие как: абсолютный прирост, ускорение, цепные и базисные показатели – темпы роста и прироста, средние показатели.

Также рассмотрены вопросы построения математических моделей рядов динамики, виды трендовых моделей, методики выявления наличия трендовой зависимости, даны рекомендации по построению математических моделей, по проверке полученных моделей на адекватность, точность, по нахождению доверительных интервалов в точке прогноза.

На примерах показано, как рассчитываются характеристики рядов динамики.

В связи с важностью всестороннего изучения работы систем массового обслуживания в пособии рассмотрены марковские случайные процессы, процессы «гибели и размножения», функционирование одноканальных и многоканальных систем с отказами и ожиданием.

В пособии содержатся подробные методические указания к решению задач прогнозирования, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для расчетно-графической работы.

Глава 1. Понятие и классификация рядов динамики

1.1. Виды временных рядов

Изучением изменения во времени числовых показателей различных явлений занимается раздел статистики, называемый «Ряды динамики». Если расположить наблюдаемые данные в хронологической последовательности, можно получить временной динамический ряд, в котором каждому моменту или периоду времени соответствует статистический показатель, характеризующий изучаемый объект.

Динамический ряд называется *интервальным*, если он характеризует величину наблюдаемого явления за какой-то промежуток (период, интервал) времени.

Примером интервального ряда служат данные о жилищном строительстве в 2002-2006 годах (в млн.кв.м.):

Таблица 1. - Данные о жилищном строительстве

01.01.2002- 31.12.2002	01.01.2003- 31.12.2003	01.01.2004- 31.12.2004	01.01.2005- 31.12.2005	01.01.2006- 31.12.2006
4,3	4,1	4,7	4,9	5,2

Динамический ряд называется *моментным*, если он характеризует величину наблюдаемого явления на определенный момент времени.

Например, данные об остатках материалов производственного предприятия на конец каждого месяца (в кг):

Таблица 2. - Данные об остатках материалов предприятия

31 января	28 февраля	31 марта	30 апреля	31 мая	30 июня
465	398	317	290	356	372

Моменты или периоды времени обозначаются через t , а числовые показатели, характеризующие изучаемое явление – называют уровнем ряда (обозначают y).

Рассмотрим показатели, характеризующие ряды динамики.

Цепные показатели характеризуют скорость роста уровня от периода к периоду. Базисные показатели характеризуют окончательный результат всех изменений в уровнях ряда от периода, к которому относится базисный уровень, до данного периода.

1.2. Показатели изменения уровней ряда динамики

Абсолютный прирост Δ_i показывает, на сколько данный уровень ряда изменился по сравнению с предыдущим или базовым.

Ускорение – разность между абсолютным изменением за данный период и абсолютным изменением за предыдущий период.

Рассчитывается только для цепных показателей. Отрицательная величина ускорения показывает на замедление роста.

Темпы роста характеризуют скорость изменения показателя в единицу времени, выраженную в процентах.

Темпы прироста показывают, на сколько процентов один уровень больше или меньше другого уровня.

$$T_n^u = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100\%, \quad T_n^\delta = \frac{y_i - y_0}{y_0} \cdot 100\%$$

или
$$T_n = T_p - 100\%.$$

Сравнение показывает, что замедление темпов прироста не всегда сопровождается уменьшением абсолютных приростов. Чтобы правильно оценить значение полученного темпа прироста, его сравнивают с показателем абсолютного прироста. Результат выражают **абсолютным значением 1% прироста**:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{T_n} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i-1}} \cdot 100\%} = 0,01y_{i-1}.$$

Таблица 3. – Цепные и базисные показатели

Показатели	Абсолютный прирост	Ускорение	Темп роста	Темп прироста
Цепные	$\Delta_i^u = y_i - y_{i-1}$	$\Delta_i^l = \Delta_i - \Delta_{i-1}$	$T_p^u = \frac{y_i}{y_{i-1}} \cdot 100\%$	$T_i^\delta = \dot{O}_\delta^\delta - 100\%$
базисные	$\Delta_i^\delta = y_i - y_0$	-	$T_p^\delta = \frac{y_i}{y_0} \cdot 100\%$	$T_n^\delta = T_p^\delta - 100\%$

где y_i - уровень сравниваемого периода, y_{i-1} - уровень непосредственно предшествующего периода, y_0 - уровень базисного периода.

Пример. По данным таблицы вычислить основные показатели ряда динамики.

Таблица 4. – Данные о количестве телефонных разговоров

Годы	2003	2004	2005	2006
Количество телефонных разговоров региональной сети сотовой связи (млн.)	76	88	98	105

Покажем, как получены числа в таблице 5 на примере 2005 года.

Абсолютный цепной прирост Δ_i^u : $98-88=10$ (млн.);

абсолютный базисный прирост Δ_i^b : $98-76=22$ (млн.);

ускорение Δ_i^l : $10-12=-2$ (сравниваются цепные показатели за 2005 и 2004 годы);

темп роста цепной T_p^u : $(98:88) \cdot 100\%=111,4$;

темп роста базисный T_p^b : $(98:76) \cdot 100\%=128,9$;

темп прироста цепной T_n^u : $111,4-100=11,4(\%)$;

темп прироста базисный T_n^b : $128,9-100=28,9(\%)$;

абсолютное значение 1% прироста: $0,1 \cdot 88=8,8$.

Таблица 5. -Расчет показателей динамического ряда

Год	Количество телефонных разговоров региональной сети сотовой связи (млн.)	Абсолютный прирост		Ускорение Δ_i^l	Темп роста, %		Темп прироста, %		Абсолютное значение 1% прироста
		По сравнению с предыдущим годом (цепной) Δ_i^u	По сравнению с 2003 годом (базисный) Δ_i^b		По сравнению с предыдущим годом (цепной) T_p^u	По сравнению с 2003 годом (базисный) T_p^b	По сравнению с предыдущим годом (цепной) T_n^u	По сравнению с 2003 годом (базисный)	
2003	76	-	-	-	-	100	-	-	-
2004	88	12	12	-	115,8	115,8	15,8	15,8	7,6
2005	98	10	22	-2	111,4	128,9	11,4	28,9	8,8
2006	105	7	29	-3	107,1	138,2	7,1	38,2	9,8

Из таблицы видим, что каждый год количество телефонных разговоров увеличивалось по сравнению с предыдущим годом. Отрицательное ускорение показывает, что

этот рост замедлялся. Цепные темпы прироста показывают, что в 2004 году количество увеличилось на 15,8% по сравнению с 2003 годом, в 2005 – на 11,4% по сравнению с 2004, в 2006 – на 7,1% по сравнению с 2005 годом. По сравнению с 2003 годом количество разговоров увеличилось на 29 млн., что составляет 38,2% от начального уровня.

При изучении двух взаимосвязанных явлений используют показатели, называемые **коэффициентами опережения**, которые вычисляются как отношения темпов роста или темпов прироста за одинаковый промежуток времени:

$$k_{on} = \frac{T'_p}{T''_p} = \frac{T'_n}{T''_n}.$$

Таблица 6. – Темпы роста

Год	Количество проданных сотовых телефонов, (тыс. шт.)	Количество телефонных разговоров региональной сети сотовой связи (млн.)	Темп роста количества сотовых телефонов, % (базисный) T'_p	Темп роста телефонных разговоров, % (базисный) T''_p	коэффициент опережения k_{on}
2003	570	76	100	100	-
2004	690	88	121,0	115,8	1,04
2005	780	98	136,8	128,9	1,06
2006	920	105	161,4	138,2	1,17

Для 2004 года базисный темп роста количества сотовых телефонов $T'_p = \frac{690}{570} \cdot 100\% = 121,0\%$,

базисный темп роста количества телефонных разговоров $T''_p = \frac{88}{76} \cdot 100\% = 115,8\%$,

коэффициент опережения $k_{on} = \frac{121,0}{115,8} = 1,04$.

Оба рассматриваемых явления получили значительное развитие, но так как коэффициент опережения больше единицы, то базисные темпы роста количества сотовых телефонов больше базисных темпов роста количества телефонных разговоров. Поэтому рост числа разговоров отставал от роста количества телефонов.

Средние показатели динамических рядов

Для **интервального ряда** **средний уровень** рассчитывается как среднее арифметическое:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n},$$

где n – число уровней ряда.

Например, среднее количество телефонных разговоров за период с 2003 по 2006 год:

$$\bar{y} = \frac{76 + 88 + 98 + 105}{4} = 92 \text{ (млн.)}$$

Средний уровень моментного ряда характеризует его среднее между начальным и конечным моментами. Начальный и конечный уровни находятся на границе изучаемого интервала, они наполовину относятся к предыдущему и последующему интервалам; и наполовину к изучаемому. Уровни, относящиеся к моментам внутри рассматриваемого интервала, относятся только к нему. Отсюда **формула хронологической средней для моментного ряда с равномерными интервалами** :

$$\bar{y}_{xp} = \frac{\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}}{n-1}.$$

Из примера об остатках материалов производственного предприятия на конец каждого месяца найдем хронологическую среднюю моментного ряда:

$$\bar{y}_{xp} = \frac{\frac{465}{2} + 398 + 317 + 290 + 365 + \frac{372}{2}}{5} = 358 \text{ (кг)}.$$

Чтобы найти **средний уровень моментного ряда с неравномерными интервалами** между исследуемыми датами, воспользуемся формулой

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i},$$

где t_i – время, в течение которого уровень оставался без изменения.

Например, на 1 января количество подписчиков было 215 тыс. человек. На 1 марта подписалось еще 10 тыс. человек, на

1 июня – еще 5 тыс. человек, на 1 июля число подписчиков уменьшилось на 10 тыс. человек, на 1 августа подписались еще 15 тыс. человек и на 1 октября добавилось 8 тысяч подписчиков. Определим среднемесячное количество подписчиков.

Таблица 7. - Среднемесячное количество подписчиков

Даты времени	Количество подписчиков (тыс. человек)	Число месяцев, в течение которых количество не изменялось, t_i	$y_i t_i$
01.01.	215	2	430
01.03.	225	3	675
01.06.	230	1	230
01.07.	220	1	220
01.08.	235	2	470
01.10	243	3	729
Итого		12	2754

$$\bar{y} = \frac{2754}{12} = 229,5 \text{ тыс. человек.}$$

Средний абсолютный прирост показывает, на сколько в среднем за единицу времени должен измениться уровень ряда, чтобы от начального уровня достигнуть конечный уровень.

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^u}{n-1},$$

где n – число уровней ряда.

Покажем, что $\bar{\Delta} = \frac{y_n - y_0}{n-1}$.

Действительно, так как $\bar{\Delta}_i^u = y_i - y_{i-1}$, то

$$\bar{\Delta} = \frac{(y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{n-1} - y_{n-2}) + (y_n - y_{n-1})}{n-1} = \frac{y_n - y_0}{n-1}.$$

Если цепные абсолютные приросты примерно одинаковы, то это говорит о линейном характере развития ряда. При этом средний абсолютный прирост можно использовать для прогноза значения ряда в момент времени $n+1$.

$$y_{n+1} = y_n + \bar{\Delta}.$$

Пример.

Таблица 8. - Количество почтовых переводов

Год	Количество почтовых переводов, тыс.	цепные абсолютные приросты
1989	83	-
1990	98	15
1991	111	13
1992	123	12
1993	137	14

Цепные абсолютные приросты приблизительно равны между собой. Тогда

$$\bar{\Delta} = \frac{137 - 83}{5 - 1} = 13,5.$$

В 1994 году ожидается $137 + 13,5 = 150,5$ тыс. почтовых переводов.

Средний темп роста служит сводной обобщающей характеристикой интенсивности изменения уровней ряда динамики. Он показывает, во сколько раз в среднем за единицу времени изменился уровень динамического ряда. Нахождение среднего темпа роста полезно, так как темпы роста в каждом году разные. Так же его рассчитывают, когда есть данные об уровне в начале периода и в конце его, а промежуточные данные отсутствуют.

$$\bar{T}_p = \bar{k} \cdot 100\%,$$

где $\bar{k} = \sqrt[n-1]{k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{n-1}}$, $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{n-1}$ - коэффициенты роста по сравнению с уровнем предшествующего периода, n - число уровней ($k_i = \frac{y_i}{y_{i-1}}$)

или

$$\bar{k} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}}.$$

Средний темп роста можно использовать для прогнозирования уровней динамического ряда, если цепные темпы роста примерно одинаковы. Тогда

$$y_{n+1} = y_n \cdot \bar{T}_p.$$

Пример.

Таблица 9. - Количество писем

Год	Количество писем, тыс.	цепные темпы роста
1989	356	-
1990	361	101,4
1991	368	102
1992	379	103
1993	390	102,9

Цепные темпы роста примерно равны.

$$\bar{T}_p = \sqrt[4]{\frac{390}{356}} \cdot 100\% = 131,5$$

В 1994 году ожидаемое количество писем $390 \cdot 131,5 = 51285$.

Средний темп прироста $\bar{T}_{np} = \bar{T}_p - 100\%$.

$$\bar{T}_{np} = 111,3\% - 100\% = 11,3\%.$$

Глава 2. Статистические методы нахождения тенденции развития показателя во времени

2.1. Типы трендовых моделей

В рядах динамики при их изучении может быть выявлена некоторая закономерность. На процессы, изменяемые во времени, влияют несколько факторов. Это могут быть конъюнктурные и сезонные колебания; изменения, вызванные природными катаклизмами и различные незначительные факторы. Однако можно выделить основную тенденцию развития, которую называют трендом. Тренд – это функция, зависящая от времени. Прогнозирование с помощью трендовых моделей включает в себя следующие этапы:

- 1) выявление наличия трендовой зависимости;
- 2) выбор одной или нескольких кривых, форма которых соответствует динамике временного ряда;
- 3) нахождение параметров выбранных кривых;
- 4) проверка адекватности и точности выбранных моделей и окончательный выбор кривой;
- 5) расчет прогнозируемого значения временного ряда;
- 6) расчет доверительного интервала в точке прогноза.

Предположить, к какому типу трендовых моделей относится исследуемый ряд динамики, можно, проанализировав его графическое изображение. При построении нужно строго соблюдать масштаб, чтобы не исказить наглядности. Далее можно применить метод сглаживания или укрупнения динамических интервалов, который заключается в механическом выравнивании уровней ряда с использованием соседних уровней. Расчет трехдневных скользящих сумм: 1-я скользящая сумма равна объему продаж за 1, 2 и 3 дни недели; 2-я – за 2, 3 и 4 дни и т.д. Аналогично выполняется расчет пятидневных скользящих сумм. Скользящая средняя по трехдневным скользящим суммам будет относиться ко 2-му дню каждой трехдневки, по пятидневным- к 3-му дню каждой пятидневки.

Пример.

Таблица 10. – Расчет скользящих средних

Дни месяца, <i>t</i>	Объем продаж, <i>y</i>	Скользящие суммы		Скользящие средние	
		трехдневные	пятидневные	трехдневные	пятидневные
1	21	-	-	-	-
2	17	59	-	19,7	-
3	21	62	110	20,7	22
4	24	72	119	24	23,8
5	27	81	128	27	25,6
6	30	83	131	27	26,2
7	26	80	133	25	26,6
8	24	76	140	28	28
9	26	84	137	29	27,4
10	34	87	141	30	28,2
11	27	91	154	31	30,8
12	30	94	168	35,7	33,6
13	37	107	165	36	33
14	40	108	173	35,3	34,6
15	31	106	181	34,7	36,2
16	35	104	181	36,7	36,2
17	38	110	176	36,7	35,2
18	37	110	181	36	36,2
19	35	108	-	-	-
20	36	-	-	-	-

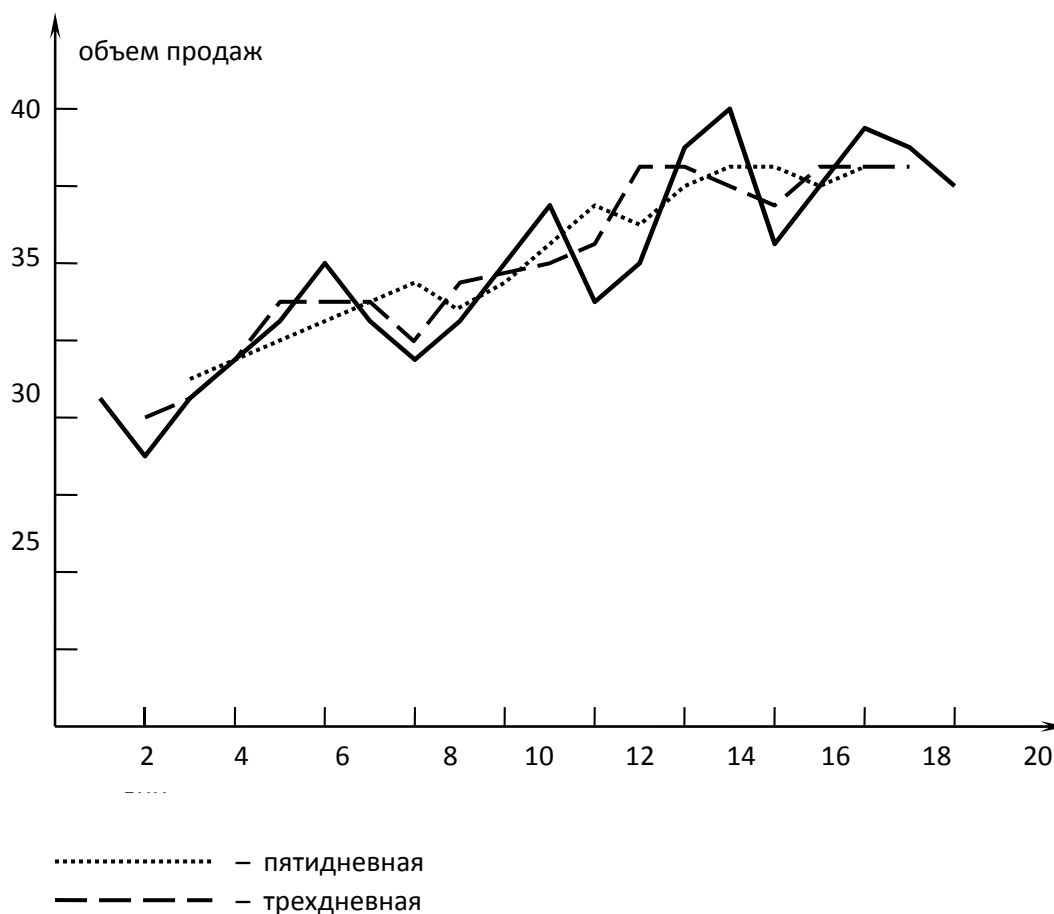


Рисунок 1. – Эмпирический график протекания процесса

По виду графика можно предположить, что здесь имеется линейная зависимость.

Кривые роста могут подразделяться на 3 группы.

К *первой группе* отнесем кривые, описывающие процессы с монотонным развитием без пределов роста. Такой процесс может быть описан одной из функций:

- $\hat{y}_t = a_0 + a_1t$,
- $\hat{y}_t = a_0 + a_1t + a_2t^2$,
- $\hat{y}_t = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$,
- $\hat{y}_t = ab^t$,

Ко *второй* – кривые, имеющие предел роста в исследуемом периоде. Такие кривые называют кривыми насыщения.

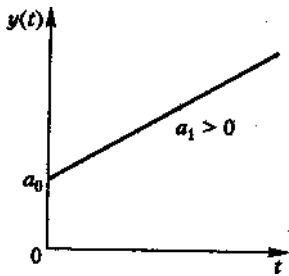
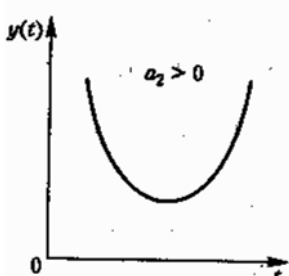
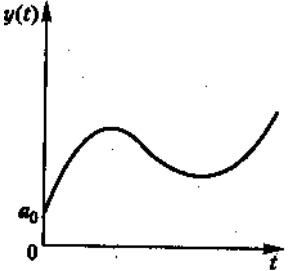
- $\hat{y}_t = k + ab^t$

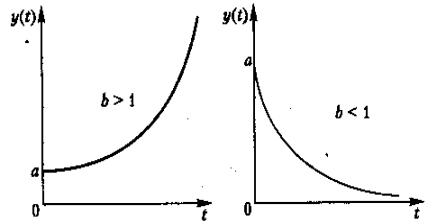
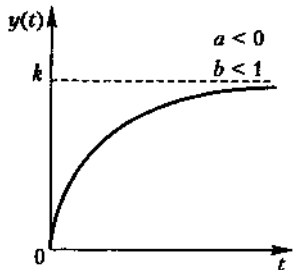
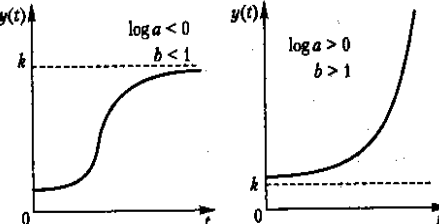
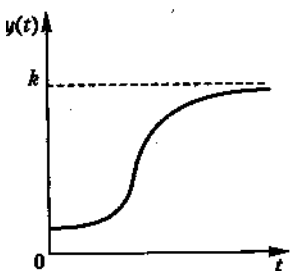
Здесь k – горизонтальная асимптота (см. таблицу 16).

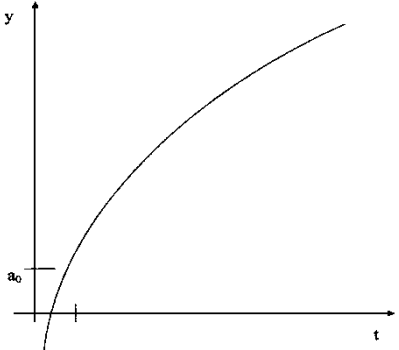
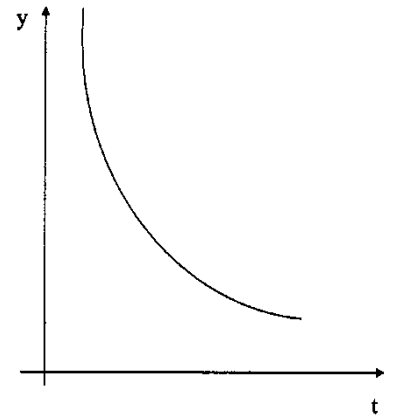
К *третьей* – кривые насыщения, имеющие точки перегиба. Это S-образные кривые.

- $\hat{y}_t = ka^{b^t}$,
- $\frac{I}{y_t} = ka^{b^t}$.

Таблица 11. - Виды трендовых моделей.

Функция	Аналитическое выражение	График	Выбор функции	Значение коэффициентов	Применение (примеры)
Линейная	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$		Примерно постоянное абсолютное ускорение	a_0 – начальный уровень тренда в момент или период, принятый за начало отсчета времени t ; a_1 – среднегодовой абсолютный прирост (среднее изменение за единицу времени); константа тренда	Урожайность для области, республики, региона
Парабола второго порядка	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$		Ускоренное или замедленное изменение уровней при постоянном ускорении	a_0, a_1 – те же, a_2 – квадратический параметр, равный половине ускорения; константа тренда	Для равноускоренных процессов: прогрессирующее поступление нового высокопроизводительного оборудования, увеличение среднесуточного прироста живого веса с возрастом; при снятии ограничений (в распределении доходов, в уровне оплаты труда, при повышении цены на продукцию); а так же производство устаревшей продукции, ликвидируемой отрасли с/х
Кубическая парабола	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$		Постоянные третьи разности	a_0, a_1, a_2 – те же, a_3 – изменение ускорения роста	

Экспонента	$\widehat{y}_t = ab^t$		Абсолютный прирост пропорционален достигнутому уровню или постоянные темпы роста и прироста	a - характеризует начальные условия, b – постоянный темп изменения в разгах, константа тренда. Если $b > 1$ - тенденция ускоряющегося возрастания уровней; $b < 1$ – замедляющееся снижение уровней	Размножение организмов при отсутствии ограничений со стороны среды: кормов, пространства, хищников, болезней
Модифицированная экспонента	$\widehat{y}_t = k + ab^t$		Рост уровней ряда замедляется и стремится к некоторому пределу	k определяется свойствами прогнозируемого процесса или задается экспертным путем	
Кривая Гомперца	$\widehat{y}_t = ka^{b^t}$		Наличие экстремальных значений	$y = k$ – асимптота функции, $a > 0, 0 < b < 1$	
Логистическая кривая	$\frac{1}{y_t} = ka^{b^t}$		Имеет два перегиба – от ускоряющегося роста к равномерному и от равномерного роста к замедлению. Точка симметрии совпадает с точкой перегиба	a и b параметры тренда	Развитие нового производства, процесс насыщения рынка новыми товарами

логарифмическая	$\hat{y}_t = a_0 + a_1 \log t$		Замедляющийся рост уровней при достаточно большом t . Кривая не имеет экстремума		Рост спортивных достижений, повышение продуктивности животных
гиперболическая	$\hat{y}_t = a_0 + \frac{a_1}{t}$			$a_1 > 0$ – замедление снижения уровней, $a_1 < 0$ – медленно возрастающая функция	Для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции, зависимости времени обращения товаров от величины товарооборота

Рассмотрим методы, позволяющие выявить наличие тренда, определить вид функциональной зависимости, проверить его на адекватность.

2.2. Выявление наличия тренда

2.2.1. Метод разности средних

1. Количество уровней ряда делится на две примерно равные части:

$$n_1 \approx n_2, \quad n_1 + n_2 = n.$$

Находим средние уровни каждой части: $\bar{y}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} y_i$,

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^{n_2} y_i$$

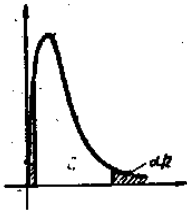
2. Находим дисперсии σ_1^2 и σ_2^2 :

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (y_i - \bar{y}_1)^2; \quad \sigma_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=n_1+1}^{n_2} (y_i - \bar{y}_2)^2$$

3. Проверяем гипотезу о равенстве дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 с помощью F -критерия Фишера. В качестве нулевой гипотезы берем $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. В качестве альтернативных гипотез одну из H_1 . Для уровня значимости $\alpha=0,05$ из таблицы Приложения 1 находим $F_{кр}$. Тогда $F_{расч} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \cdot F_{кр}$.

Таблица 12. – Выбор гипотезы

H_0	H_1	$F_{кр}$	график	Выбор гипотезы
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	Для $F_{кр}^{np}$: $l=n_1-1; k=n_2-1$		$H_0: F_{расч} < F_{кр}^{np}$ $H_1: F_{расч} > F_{кр}^{np}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	Для $F_{кр}^{лев}$: $l=n_2-1; k=n_1-1$		$H_0: F_{расч} > F_{кр}^{лев}$ $H_1: 0 < F_{расч} < F_{кр}^{лев}$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	Для $F_{кр}^{np}$: $l=n_1-1; k=n_2-1$, для $F_{кр}^{лев}$: $l=n_2-1; k=n_1-1$ при уровне значимости $\alpha/2$.		$H_0: F_{кр}^{лев} < F_{расч} < F_{кр}^{np}$ $H_1: 0 < F_{расч} < F_{кр}^{лев}$ или $F_{расч} > F_{кр}^{np}$
---------------------------	------------------------------	---	--	--

4. Если с помощью F -критерия Фишера установлено равенство дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 , вычисляем S -средневзвешенное значение среднеквадратичных отклонений σ_1 и σ_2 относительно \bar{y}_1 и \bar{y}_2 :

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)^2 \sigma_1^2 + (n_2 - 1)^2 \sigma_2^2}{n - 2}}$$

5. Воспользуемся критерием Стьюдента для проверки гипотезы о равенстве средних \bar{y}_1 и \bar{y}_2 :

$$t_{расч} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$t_{теор}$ находим из таблицы Приложения 2 при $\nu = n - 2$.

Если $t_{расч} \geq t_{теор}$, то считается, что между первой и второй частями динамического ряда существует зависимость, а значит, существует тенденция развития исследуемой системы. При $t_{расч} < t_{теор}$ тенденция развития отсутствует.

Пример.

Таблица 13. - Пятидневные скользящие средние

Год	Душевое потребление масла за месяц, г	Сумма пяти членов ряда, отнесенная к третьему члену ряда	Пятидневные скользящие средние
1971	249	-	-
1972	230	-	-
1973	320	1559	311,8
1974	460	1549	309,8
1975	300	1734	346,8

1976	239	1930	386
1977	415	1999	399,8
1978	516	2242	448,4
1979	529	2573	514,6
1980	543	2675	535
1981	570	2671	-
1982	517	2639	-

Проверка методом разности средних исходного ряда не показывает наличие связи, поэтому, сначала выровняем ряд по пятидневной скользящей средней и по выровненному ряду проверим наличие тренда.

1. $n=8, n_1=n_2=4$.

$$\bar{y}_1 = \frac{311,8+309,8+346,8+386}{4} = 339,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{399,8+448,4+514,6+535}{4} = 477,5.$$

2.

$$\sigma_1^2 = \frac{(311,8-339)^2 + (309,8-339)^2 + (346,8-339)^2 + (386-339)^2}{4-1} = 1287$$

Аналогично находим σ_2^2 :

$$\sigma_2^2 = 1220.$$

3. Проверим гипотезу H_0 : можно ли при уровне значимости $\alpha=0,05$ (или с вероятностью 95%) считать статистически незначимым различие между оценками

$\sigma_1^2 = 1287$ и $\sigma_2^2 = 1220$? В качестве альтернативной гипотезы H_1 берем гипотезу $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. $L=k=4-1=3$. Из таблицы значений F -критерия Фишера при уровне значимости 0,05 $F_{кр}^{np} = 9,28$. $F_{расч} = \frac{1287}{1220} = 1,06$. Так как $1,06 < 9,28$, то $F_{расч} < F_{кр}^{np}$. Значит, принимается гипотеза H_0 о равенстве дисперсий, то есть с вероятностью 95% можно считать, что различия между дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 незначимые.

4. Найдем S :

$$S = \sqrt{\frac{(4-1)^2 \cdot 1287 + (4-1)^2 \cdot 1220}{8-2}} = 61,3.$$

$$5. \quad t_{расч} = \frac{339 - 474,5}{61,3\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = 3,125.$$

Из таблицы значений t -критерия Стьюдента при $\nu=8-2=6$ при уровне значимости $\alpha=0,05$ $t_{теор}=2,447$. Итак, $t_{расч} > t_{теор}$, поэтому существует тенденция развития динамического ряда.

2.2.2. Метод Фостера-Стьюарта

Для проверки существования тренда к слабо проявляющимся тенденциям можно применить более чувствительный метод – метод Фостера-Стьюарта, который считается более надежным и не требует дополнительных проверок.

Основу метода составляют характеристики:

$$W = \sum_{t=1}^n w_t \text{ и } D = \sum_{t=1}^n d_t,$$

где $w_t = u_t + v_t$, $d_t = u_t - v_t$, а параметры u_t и v_t находятся по формулам:

$$u_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t > y_{t-1}, \dots, y_1; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (*)$$

$$v_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t < y_{t-1}, \dots, y_1; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Из приведенных формул следует, что $0 \leq W \leq n-1$. Если $y_1 = y_2 = \dots = y_n$, то $W = 0$. Если $y_1 < y_2 < \dots < y_n$, то $W = n-1$. Аналогично $-(n-1) \leq D \leq n-1$.

Показатель D применяется для определения тенденции изменения во времени \hat{y}_t . По t -критерию Стьюдента проверяется гипотеза об отсутствии тенденции в дисперсии (W). Находим

$$t_{расч1} = \frac{D}{\sigma_2}$$

(значение σ_2 берем из таблицы Приложения 6). Теоретическое значение t -критерия Стьюдента определяют по таблице Приложения 2. Если $|t_{расч1}| \geq t_{теор}$, то гипотеза об отсутствии

тенденции развития в средней (об отсутствии тренда) отклоняется. Другими словами, *тренд существует*. Показатель W применяется для определения тенденции изменения во времени дисперсии S_t . Находим

$$t_{расч2} = \frac{W - \bar{W}}{\sigma_1},$$

\bar{W} - среднее значение параметра W ; σ_1 и σ_2 - средние квадратичные отклонения величин соответственно W и D - находятся из таблицы Приложения 6.

Если $|t_{расч2}| \geq t_{теор}$, то гипотеза об отсутствии тенденции в дисперсии отклоняется.

Пример. Проверим динамический ряд: 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20 на наличие трендовой зависимости методом Фостера-Стьюарта. Составим таблицу:

Таблица 14.

t	y_t	u_t	v_t	w_t	d_t
1	2	0	0	0	0
2	4	1	0	1	1
3	6	1	0	1	1
4	8	1	0	1	1
5	10	1	0	1	1
6	12	1	0	1	1
7	14	1	0	1	1
8	16	1	0	1	1
9	18	1	0	1	1
10	20	1	0	1	1
Σ	-	-	-	9	9

$$W = \sum w_t = 9; D = \sum d_t = 9, \bar{W} = 3,86; \sigma_1 = 1,29, \sigma_2 = 1,96.$$

$$t_{расч1} = \frac{D}{\sigma_2}; t_{расч1} = \frac{9}{1,96} = 4,59.$$

$$t_{расч2} = \frac{W - \bar{W}}{\sigma_1}; t_{расч2} = \frac{9 - 3,86}{1,29} = 3,98;$$

$$t_{теор} = 2,31 \text{ (см. Приложение 6 при } n=10, v=n-2).$$

Ниже приведем системы уравнений, с помощью которых вычисляются параметры моделей по методу наименьших квадратов.

Для линейного уравнения вида $\hat{y} = a_0 + a_1 t$ система примет вид:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum yt. \end{cases}$$

Для параболы $\hat{y} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum yt; \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2. \end{cases}$$

Для гиперболы $\hat{y} = a_0 + \frac{a_1}{t}$:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum \frac{1}{t} = \sum y; \\ a_0 \sum \frac{1}{t} + a_1 \sum \frac{1}{t^2} = \sum \frac{y}{t}. \end{cases}$$

Для логарифмической зависимости $\hat{y} = a_0 + a_1 \ln t$:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum \ln t = \sum y; \\ a_0 \sum \ln t + a_1 \sum (\ln t)^2 = \sum y \ln t. \end{cases}$$

Для экспоненты $\hat{y} = ab^t$ после ее приведения к линейному виду:

$$\begin{cases} n \ln a + \ln b \sum t = \sum \ln y; \\ \ln a \sum t + \ln b \sum t^2 = \sum t \ln y. \end{cases}$$

Для модифицированной экспоненты $\hat{y} = k + ab^t$ метод наименьших квадратов непосредственно не используется. Можно применить метод трех сумм. Ряд $y_t, t = \overline{1, n}$, разбивается на 3 равные части: $\sum_1 y_t, \sum_2 y_t, \sum_3 y_t$. Пусть m – число уровней в каждом отрезке. Тогда имеем 3 уравнения относительно 3-х неизвестных a, b , и k :

$$\begin{aligned} \sum_1 y_t &= \sum_{t=0}^{m-1} (k + ab^t) = mk + a \frac{b^m - 1}{b - 1}; \\ \sum_2 y_t &= \sum_{t=m}^{2m-1} (k + ab^t) = mk + ab^m \frac{b^m - 1}{b - 1}; \\ \sum_3 y_t &= \sum_{t=2m}^{3m-1} (k + ab^t) = mk + ab^{2m} \frac{b^m - 1}{b - 1}. \end{aligned}$$

Вычитая из второго уравнения первое и из третьего – второе, получим:

$$\sum_2 y_t - \sum_1 y_t = a \frac{(b^m - 1)^2}{b - 1};$$

$$\sum_3 y_t - \sum_2 y_t = ab^m \frac{(b^m - 1)^2}{b - 1}.$$

Откуда

$$a = \left(\sum_2 y_t - \sum_1 y_t \right) \frac{b - 1}{(b^m - 1)^2};$$

$$b = \sqrt[m]{\frac{\sum_3 y_t - \sum_2 y_t}{\sum_2 y_t - \sum_1 y_t}};$$

$$k = \frac{1}{n} \left(\sum_1 y_t - \frac{b^m - 1}{b - 1} a \right).$$

Замечание. Приведенные системы для линейной, параболической и гиперболической зависимости можно упростить, если перенести начало координат в середину ряда динамики. Если до переноса $t=1, 2, 3, \dots$, то после переноса:

- для четного числа членов $t = \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots$;
- для нечетного числа членов $t = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

При этом $\sum t = \sum t^3 = \sum \frac{1}{t} = 0$ и количество слагаемых в уравнениях уменьшается.

Пример. По данным наблюдений за количеством среднесуточных междугородных разговоров на одном переговорном пункте за 21-28 декабря рассчитать:

- 1) коэффициенты a_0 и a_1 линейного тренда $y = a_0 + a_1 t$ и прогноз на 29 декабря;
- 2) коэффициенты a_0 , a_1 и a_2 параболического тренда $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ и прогноз на 29 декабря.

Таблица 15. – Данные наблюдений

Дни	Среднесуточный междугородный обмен (количество)	Дни	Среднесуточный междугородный обмен (количество)
21	7	25	37
22	1	26	50
23	17	27	66
24	26	28	84

Решение. Число членов ряда $n=8$ – четное. Перенесем начала координат в середину ряда. Вычисления оформим в таблице.

Таблица 15. - Линейный тренд

Дни	№	t	y	t^2	yt
21	1	-7	7	49	-49
22	2	-5	11	25	-55
23	3	-3	17	9	-51
24	4	-1	26	1	-26
25	5	1	37	1	37
26	6	3	50	9	150
27	7	5	66	25	330
28	8	7	84	49	588
Σ	-	0	298	168	924

Подставим полученные значения в систему:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t = \sum y; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum yt. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a_0 = 298; \\ 168a_1 = 924; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 37,3; \\ a_1 = 5,5. \end{cases}$$

Итак, $y_t = 37,3 + 5,5t$.

29 декабря $t=9, y_t(9) = 37,3 + 5,5 \cdot 9 \approx 87$ (телефонных разговоров).

Таблица 16. - Параболический тренд

Дни	№	t	y	t^2	t^3	t^4	yt	yt^2
21	1	-7	7	49	-343	2401	-49	343
22	2	-5	11	25	-125	625	-55	275
23	3	-3	17	9	-27	81	-51	153
24	4	-1	26	1	-1	1	-26	26
25	5	1	37	1	1	1	37	37
26	6	3	50	9	27	81	150	450
27	7	5	66	25	125	625	330	1650
28	8	7	84	49	343	2401	588	4116
Σ	-	0	298	168	0	6216	924	7050

Подставим полученные значения в систему:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum yt; \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum yt^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a_0 + 168a_2 = 298; \\ 168a_1 = 924; \\ 168a_0 + 6216a_2 = 7050; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 37,25 - 21a_2; \\ a_1 = \frac{924}{168}; \\ 168(37,25 - 21a_2) + 6216a_2 = 7050; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 37,25 + 21a_2; \\ a_1 = 5,5; \\ 2688a_2 = 792; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 31,1; \\ a_1 = 5,5; \\ a_2 = 0,29. \end{cases}$$

$$y_2 = 31,1 + 5,5t + 0,29t^2.$$

Подставив значение $t=9$ в y_2 , получим $y_2(9) = 31,1 + 5,5 \cdot 9 + 0,29 \cdot 9^2 \approx 104$ (телефонных разговора).

Какой же из прогнозов более точный: вычисленный по линейной модели тренда или по параболической? Для ответа на этот вопрос нужно проверить модели на адекватность и точность.

2.4. Проверка адекватности модели

Качество модели определяется ее адекватностью исследуемому процессу. Адекватность характеризуется наличием определенных статистических свойств. Модель прогнозирования считается адекватной, если она учитывает существенную закономерность исследуемого процесса. Закономерность исследуемого процесса находит отражение в

наличии определенных статистических свойств остаточной компоненты. Остаточная компонента получается после выделения из исследуемого ряда тренда u_t и периодической составляющей e_t :

$$y_t = u_t + e_t.$$

Составляющая e_t находится по формуле:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t,$$

где y_t - фактические уровни, \hat{y}_t - расчетные.

Компонента u_t найдена правильно тогда и только тогда, когда случайная компонента e_t удовлетворяет следующим условиям, доказывающим, что она носит случайный характер:

- 1) *случайность,*
- 2) *соответствие распределения остаточной компоненты нормальному закону распределения,*
- 3) *равенство нулю математического ожидания,*
- 4) *независимость значений ряда остатков.*

1) *Проверка на случайность* предполагает проверку независимости величины e_t от времени. Производится с помощью критерия «пиков» и «впадин»: значения e_t сравниваются с двумя соседними с ним. Если оно больше или меньше их ($e_{t-1} > e_t < e_{t+1}$ или $e_{t-1} < e_t > e_{t+1}$), то точка считается поворотной. Далее подсчитывается сумма поворотных точек P . Если $P > (\bar{p} - 1,96\sqrt{s^2})$, то ряд остатков является случайным.

$\bar{p} = \frac{2n-4}{3}$ - математическое ожидание числа пиков,

$s^2 = \frac{16n-29}{90}$ - дисперсия.

Таким образом, $P > \left(\frac{2n-4}{3} - 1,96\sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right)$. Учитывается целая

часть числа в скобках.

2) *Проверка соответствия распределения остаточной компоненты нормальному закону распределения.* Основными свойствами ряда остатков являются их симметричность относительно тренда и преобладание малых по абсолютной величине ошибок над

большими. В этой связи определяются коэффициенты асимметрии A_c (мера «скошенности») и эксцесса - \mathcal{E}_k (мера «скученности») наблюдений около моды.

$$A_c = \frac{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^3 \right]}{\left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2} \right)^3};$$

$$\mathcal{E}_k = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 \right)^2} - 3.$$

Если коэффициент асимметрии отрицателен, то либо большая часть значений случайной величины, либо мода находятся левее математического ожидания, и наоборот, если асимметрия положительна, то правее.

Эксцесс случайной величины - величина, характеризующая степень островершинности или плосковершинности распределения, т.е. степень так называемого «выпада».

Далее вычисляется среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики асимметрии:

$$S_A = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}$$

и среднеквадратическая ошибка выборочной характеристики эксцесса:

$$S_{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}.$$

Если $|A_c| \leq 1,5 S_A$;
 $|\mathcal{E}_k| \leq 1,5 S_{\mathcal{E}}$, то распределение ряда остатков

не противоречит нормальному закону.

Если $|A_c| \geq 2 S_A$;
 $|\mathcal{E}_k| \geq 2 S_{\mathcal{E}}$, то данные не являются

нормальными. Их применение в дальнейшем не рекомендуется.

Если $1,5 S_A < |A_c| < 2 S_A$ и $1,5 S_\Theta < |\Theta_k| < 2 S_\Theta$, то можно воспользоваться RS-критерием:

$$RS = \frac{e_{max} - e_{min}}{S},$$

где e_{max} и e_{min} - максимальный и минимальный уровни ряда остатков, S - среднее квадратическое отклонение остатков.

Если значение критерия попадает между табулированными границами с заданным уровнем значимости (Приложение 3), то гипотеза о нормальном распределении ряда остатков принимается.

3) Проверка равенства нулю математического ожидания производится на основе t -критерия Стьюдента:

$$t_{расч} = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i \right| \frac{\sqrt{n}}{S},$$

где S - среднее квадратическое отклонение остатков.

Гипотеза о равенстве нулю принимается, если $t_{расч} < t_{таб}$ с $k = n - 1$ степенями свободы.

4) Проверка независимости значений ряда остатков подразумевает выявление отсутствия автокорреляции. Под автокорреляцией последовательности значений понимается корреляция между членами этой последовательности, передвинутой, в данном случае, на одну единицу. Последствия, вызываемые автокорреляцией остатков:

- недооценка дисперсии остатков функции регрессии;
- наличие ошибки при оценке выборочной дисперсии параметров регрессии, которая препятствует применению метода наименьших квадратов для нахождения трендовой модели динамического ряда.

Критерием, позволяющим установить наличие автокорреляции, является критерий Дарбина-Уотсона:

$$d = \frac{\sum (e_i - e_{i-1})^2}{\sum e_i^2}.$$

Значения критерия d находятся в интервале $[0,4]$ и сравниваются со значениями d_n и d_b , взятыми из таблицы Приложения 4. Здесь $\alpha=5\%$ - уровень значимости, n - объем выборки.

Вывод:

- 1) $d < d_n$ - автокорреляция есть;
- 2) $d > d_g$ - автокорреляции нет;
- 3) $d_n < d < d_g$ - при выбранном уровне значимости нельзя прийти к определенному выводу.

Если $2 < d < 4$, то для проверки нужно найти $d' = 4 - d$.

Замечание. При объеме выборки меньше 15 для d не существует критических значений d_n и d_g . В этом случае можно использовать коэффициент автокорреляции

$$r_a = 1 - \frac{d}{2},$$

где d – статистика Дарбина-Уотсона. Расчетное значение r_a сравнивают с табличным r_{am} (Приложение 5). Критическое значение коэффициента автокорреляции r_{am} имеет одну степень свободы, т.е. $f = n$. Если $r_a \leq r_{am}$, то автокорреляция отсутствует и уровни динамического ряда независимы.

Заключение. По результатам проверки всех свойств в целом можно сделать вывод о соответствии (адекватности) модели исследуемому процессу и возможности ее использования для прогнозирования.

Пример.

- 1) **Проверим на случайность остаточную компоненту** полученного ранее параболического тренда $\hat{y}_2 = 31,1 + 5,5t + 0,29t^2$

Таблица 17.–Проверка остаточной компоненты на случайность

№	t	y_t	\hat{y}_t	$y_t - \hat{y}_t = e_t$	P	e_t^2	e_t^3	e_t^4	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$
1	-7	7	6,81	0,19	-	0,036	0,007	0,001	-	-
2	-5	11	10,85	0,15	0	0,023	0,003	0,001	-0,04	0,002
3	-3	17	17,21	-0,21	1	0,044	-	0,002	-0,36	0,130
4	-1	26	25,89	0,11	0	0,012	0,001	0,000	0,32	0,102
5	1	37	36,89	0,11	0	0,012	0,001	0,000	0,00	0,000
6	3	50	50,21	-0,21	1	0,044	-	0,002	-0,32	0,102
7	5	66	65,85	0,15	0	0,023	0,003	0,001	0,36	0,130
8	7	84	83,81	0,19	-	0,036	0,007	0,001	0,04	0,002
Σ		298		0,48	2	0,230	0,004	0,008	0	0,468

$$\frac{2n-4}{3} - 1,96\sqrt{\frac{16n-29}{90}} = \frac{2 \cdot 8 - 4}{3} - 1,96\sqrt{\frac{16 \cdot 8 - 29}{90}} = 1,94$$

$2 > 1$, значит, ряд остатков является случайным (он не зависит от времени).

2) **Проверим соответствие распределения остаточной компоненты нормальному закону распределения.** Найдем значения коэффициентов асимметрии и эксцесса:

$$A_c = \frac{\left[\frac{0,004}{8} \right]}{\left(\sqrt{\frac{0,23}{8}} \right)^3} = 0,10 ; \quad \mathfrak{A}_\kappa = \frac{0,008}{\left(\frac{0,23}{8} \right)^2} - 3 = -1,79 ;$$

$$S_A = \sqrt{\frac{6(8-2)}{(8+1)(8+3)}} = 0,6 ; \quad S_\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{24 \cdot 8(8-2)(8-3)}{(8+1)^2(8+3)(8+5)}} = 0,71$$

$$0,1 < 1,5 \cdot 0,6 \Leftrightarrow 0,1 < 0,9 ;$$

$$\text{но } |-1,79| > 1,5 \cdot 0,71 \Leftrightarrow 1,79 > 1,07$$

$$2S_\mathfrak{A} = 2 \cdot 0,71 = 1,41 ;$$

$$1,5S_\mathfrak{A} < |\mathfrak{A}_\kappa| < 2S_\mathfrak{A} ;$$

коэффициент \mathfrak{A}_κ попадает в зону неопределенности, поэтому мы не можем сделать определенный вывод о соответствии нормальному закону распределения остаточной компоненты.

3) **Проверка гипотезы о равенстве нулю математического ожидания:**

математическое ожидание остаточной компоненты

$$M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = \frac{1}{8} \cdot 0,48 = 0,06 ;$$

$$\text{дисперсия } S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 - M^2 = \frac{1}{8} \cdot 0,23 - (0,06)^2 = 0,025 ;$$

$$\text{среднеквадратическое отклонение } S = \sqrt{S^2} = \sqrt{0,025} = 0,159 .$$

$$t_{\text{расч}} = \frac{0,48}{8} \cdot \frac{\sqrt{8}}{0,159} = 1,067 ;$$

$$t_{\text{таб}} = 2,365 \text{ с вероятностью } 95\% (\alpha=0,95) \text{ и } k=8-1=7$$

(Приложение 2).

$t_{\text{расч}} < t_{\text{таб}}$, поэтому гипотеза о равенстве нулю математического ожидания принимается.

4) Проверка независимости значений ряда остатков:

$$d = \frac{0,468}{0,23} = 2,035;$$

так как объем выборки $n = 8 < 15$, то найдем коэффициент автокорреляции:

$$r_a = 1 - \frac{1,035}{2} = 0,0175;$$

$$r_{am} = -0,674;$$

$$r_{am} < r_a,$$

значит, автокорреляция отсутствует и уровни динамического ряда независимы.

Вывод: по результатам проверки заключаем, что параболическая модель исследуемого тренда в целом адекватна исследуемому процессу.

2.6. Проверка точности модели

Проводится с целью оценки ошибки в подборе аппроксимирующей функции.

- 1) **Оценка стандартной ошибки** (среднее квадратическое отклонение):

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n e_i^2},$$

где n – число наблюдений, k – число коэффициентов модели.

- 2) **Средняя относительная ошибка аппроксимации:**

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{e_i}{y_i} \right|.$$

- 3) **Коэффициент сходимости:**

$$\phi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

- 4) **Коэффициент детерминации:**

$$D = 1 - \phi^2.$$

- 5) **Коэффициент корреляции:**

$$R = \sqrt{D}.$$

Вывод: модели, для которых S_y, \bar{e}, ϕ^2 минимальны, а D и R - максимальны, точнее отображают исследуемый процесс.

Пример. Найдем значения S_y, \bar{e}, ϕ^2, D и R для полученных ранее линейной зависимости $y_1 = 37,3 + 5,5t$ и параболы $y_2 = 31,1 + 5,5t + 0,29t^2$.

Таблица 18. – Проверка точности модели

№	t	y_i	\bar{y}_1	\bar{y}_2	e_1	e_2	e_1^2	e_2^2	$ e_{i1}/y_i $	$ e_{i2}/y_i $	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$y_2 - \bar{y}$	$(y_2 - \bar{y})^2$
1	-7	7	-1,2	6,81	8,2	0,19	67,24	0,036	1,17	0,03	-38,5	1482,3	-30,48	929,0
2	-5	11	9,8	10,85	1,2	0,15	1,44	0,023	0,11	0,01	-27,5	756,3	-26,45	699,6
3	-3	17	20,8	17,21	-3,8	-0,21	14,44	0,044	0,22	0,01	-16,5	272,3	-20,09	403,7
4	-1	26	31,8	25,89	-5,8	0,11	33,64	0,012	0,22	0,01	-5,5	30,3	-11,41	130,2
5	1	37	42,8	36,89	-5,8	0,11	33,64	0,012	0,16	0	5,5	30,3	-0,41	0,2
6	3	50	53,8	50,21	-3,8	-0,21	14,44	0,044	0,08	0	16,5	272,3	12,91	166,7
7	5	66	64,8	65,85	1,2	0,15	1,44	0,023	0,02	0	27,5	756,3	28,55	815,1
8	7	84	75,8	83,81	8,2	0,19	67,24	0,036	0,10	0	38,5	1482,3	46,51	2163,2
Σ		298	298,4	297,52	-0,4	0,48	233,52	0,230	2,08	0,06		5082,4		5307,7

1) Рассчитаем теоретические значения \bar{y}_1 и \bar{y}_2 , подставляя $t_i (i = \overline{1,8})$ в уравнения $\bar{y}_1 = 37,3 + 5,5t$ и $\bar{y}_2 = 31,1 + 5,5t + 0,29t^2$:

при $t = -7 \bar{y}_1 = 37,3 + 5,5 \cdot (-7) = -1,2$ и т.д.

2) Рассчитаем значения e_1 и e_2 :

$$e_1 = y_i - \bar{y}_{i1} = 7 - (-1,2) = 8,2;$$

.....;

$$e_2 = y_i - \bar{y}_{i2} = 7 - 6,81 = 0,19;$$

.....

3) **Оценка стандартной ошибки:**

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{n-k}} = \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n e_i^2};$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{1}{8-2} \cdot 233,52} = 6,24;$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{1}{8-3} \cdot 0,23} = 0,21.$$

4) **Средняя относительная ошибка:**

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \bar{y}_i}{y_i} \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{e_i}{y_i} \right|$$

$$e_1 = \frac{1}{8} \cdot 2,08 = 0,26;$$

$$e_2 = \frac{1}{8} \cdot 0,06 = 0,008.$$

5) Найдем среднее значение $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{8} \cdot 298 = 37,3$

6) Найдем разности $y_1 - \bar{y}$, $y_2 - \bar{y}$ и их квадраты:

- для линейной зависимости $y_1 - \bar{y} = -1,2 - 37,3 = -38,5$; и т.д.;

- для параболы $y_2 - \bar{y} = 6,81 - 37,3 = -30,49$; и т.д.

7) **Коэффициент сходимости:** $\phi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$;

$$\phi_1^2 = \frac{233,52}{5082,4} = 0,046;$$

$$\phi_2^2 = \frac{0,23}{5307,7} = 0,00004.$$

6) **Коэффициент детерминации:** $D = 1 - \phi^2$;

$$D_1 = 1 - 0,046 = 0,954;$$

$$D_2 = 1 - 0,00004 = 0,99996.$$

7) **Коэффициент корреляции:** $R = \sqrt{D}$;

$$R_1 = \sqrt{0,954} = 0,9767;$$

$$R_2 = \sqrt{0,99996} = 0,99997.$$

Вывод: так как $S_2 < S_1$, $e_2 < e_1$, $\phi_2^2 < \phi_1^2$, а $D_2 > D_1$, $R_2 > R_1$, то параболическая функция более точно описывает исследуемый процесс.

2.6. Расчет доверительного интервала в точке прогноза

После того, как получено уравнение кривой, по которой развивается исследуемый процесс, можно спрогнозировать значение исследуемого показателя в момент времени t , подставляя соответствующее значение t в уравнение. Такой прогноз называется *точечным*.

Далее можно рассчитать, в каком интервале будет находиться полученное прогнозное значение, то есть вычислить *интервальную оценку*.

Доверительный интервал вычисляется по формуле:

$$y_t - t_\alpha \frac{S_y}{\sqrt{n}} < y_t < y_t + t_\alpha \frac{S_y}{\sqrt{n}},$$

где $S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k}}$ - среднеквадратическое отклонение

фактических наблюдений от расчетных,

n - число наблюдений,

k - число коэффициентов модели,

t_α - табличное значение t -критерия Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $\nu = n - k$.

Пример. Найти прогнозное значение y_t жилищного строительства и величину доверительного интервала для тренда, описанного уравнением $y_t = 4 + 0,6t$ при $t = 10$. Число членов динамического ряда $n = 9$. Среднее квадратическое отклонение $S_y = 0,7$. Уровень значимости α принять равным 0,05.

Решение. Найдем прогнозное значение при $t = 10$:

$$y(10) = 4 + 0,6 \cdot 10 = 10 \text{ (тыс. кв. м).}$$

Так как линейная функция $y = a_0 + a_1 t$ имеет два коэффициента a_0 и a_1 , то $k = 2$.

Тогда $t_\alpha = 2,365$ при $\alpha = 0,05$ и $\nu = 9 - 2 = 7$ (см. Приложение 2).

Подставив полученные данные в формулу, получим доверительный интервал:

$$10 - 2,365 \cdot \frac{0,7}{\sqrt{9}} < 10 < 10 + 2,365 \cdot \frac{0,7}{\sqrt{9}};$$

или

$$9,45 < 10 < 10,55.$$

Итак, с вероятностью 95% можно ожидать, что в момент времени $t = 10$ объем жилищного строительства будет не меньше 9,45 тыс. кв. м и не больше 10,55 тыс. кв. м.

Итогом работы по прогнозированию экономических процессов будет служить его обобщенная характеристика, которая включает в себя:

- 1) вид уравнения тренда;
- 2) оценки адекватности и точности модели;
- 3) точечные прогнозные оценки;
- 4) интервальные прогнозные оценки.

Глава 3. Системы массового обслуживания

3.1. Построение вероятностных моделей систем массового обслуживания

Актуальность изучения математических методов моделирования случайных процессов, протекающих в системах массового обслуживания, обосновывается тем, что с этими системами мы встречаемся каждый день в быту и на производстве.

Системы массового обслуживания (СМО) – это системы, предназначенные для обслуживания какого-либо потока заявок. Примерами этих систем могут служить ремонтные мастерские, лечебные учреждения, пункты бытового обслуживания населения. Методы изучения этих систем применяются также в биологии, медицине, физике, астрономии, технике.

Теория марковских и пуассоновских процессов – основа для описания случайных процессов, протекающих в СМО.

Сначала вводим понятие канала обслуживания.

Определение. Объект, занимающийся обслуживанием заявок, называется *каналом обслуживания*.

Когда случайный процесс длится достаточно долго, говорят о предельном поведении вероятностей системы $p_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Если поток событий является пуассоновским с интенсивностями $\lambda_{ij} = const$, то существуют *предельные вероятности состояний системы*

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t); (i = 1, \dots, n),$$

независящие от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент времени. В этом случае в системе устанавливается *предельный стационарный режим*, при котором система переходит из состояния в состояние с вероятностями, которые не меняются со временем. Физический смысл этих предельных вероятностей таков: это *среднее относительное время* пребывания системы в данном состоянии.

Если предельные вероятности принимают конкретные значения, то есть $p_i = const$, то вычисление этих вероятностей, например для СМО, имеющей граф состояний, показанный на рисунке 2, производится с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} p_0(\lambda_{01} + \lambda_{02} + \lambda_{03}) = p_1\lambda_{10} + p_2\lambda_{20} + p_3\lambda_{30}; \\ p_1(\lambda_{10} + \lambda_{13}) = p_0\lambda_{01} + p_3\lambda_{31}; \\ p_2(\lambda_{20} + \lambda_{23}) = p_0\lambda_{02} + p_3\lambda_{32}; \\ p_3(\lambda_{30} + \lambda_{31} + \lambda_{32}) = p_0\lambda_{03} + p_1\lambda_{13} + p_2\lambda_{23}; \\ \sum_{i=0}^3 p_i = 1. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

В данной системе в левой части уравнений находится произведение предельной вероятности состояния на сумму интенсивностей потоков, выходящих из этого состояния, а в правой части – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в это состояние на предельные вероятности состояний, из которых идут эти потоки. Систему уравнений (3.1.1) легко составить непосредственно по размеченному графу состояний.

Пример. Станция технического обслуживания автомобилей (СМО) имеет два канала обслуживания: на первом ремонтируют двигатели, на втором - карбюраторы.

Рассмотрим упрощенную схему работы станции. Пусть состояния этой системы обслуживания такие:

- оба канала свободны (обозначим это состояние S_0),
- первый занят, второй свободен (S_1),
- второй занят, первый свободен (S_2),
- оба заняты (S_3).

Руководству станции необходимо оценить эффективность обслуживания клиентов с точки зрения того, достаточно ли двух каналов обслуживания или нужно открыть еще, чтобы не создавалась очередь на обслуживание. Для этого за интенсивностью перехода станции из состояния в состояние велись наблюдения. В результате этих наблюдений оказалось, что $\lambda_{01}=1$, $\lambda_{02}=2$, $\lambda_{03}=2$, $\lambda_{10}=2$, $\lambda_{13}=1$, $\lambda_{20}=3$, $\lambda_{23}=2$, $\lambda_{30}=1$, $\lambda_{31}=3$, $\lambda_{32}=1$.

Вообще говоря, для марковского случайного процесса с дискретным состоянием и непрерывным временем

интенсивность потока λ - это среднее число событий, приходящихся на единицу времени.

Начертим граф состояний этой системы:

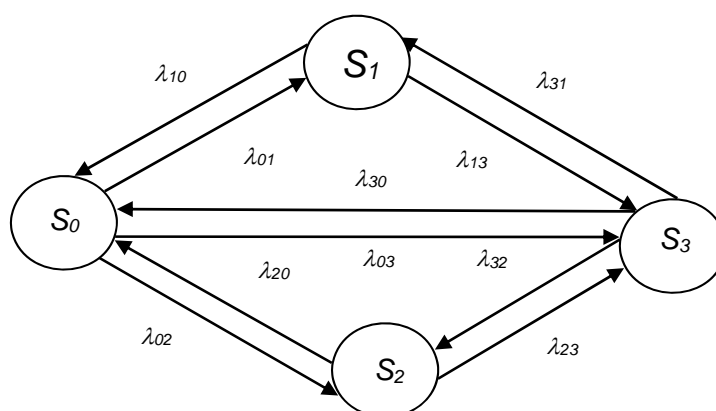


Рисунок 2. - Граф состояний системы массового обслуживания

Стрелками обозначены переходы из состояния в состояние. λ_{ij} – интенсивность, с которой система переходит из состояния S_i в S_j . Например, под действием λ_{13} система переходит из состояния S_1 в состояние S_3 . p_i – вероятность того, что СМО в момент времени t находится в состоянии S_i .

Далее составим систему уравнений по правилу (3.1.1). Вместо одного «лишнего» уравнения добавляют нормировочное условие

$$\sum_{i=0}^3 p_i = 1.$$

$$\begin{cases} 5p_0 = 2p_1 + 3p_2 + p_3; \\ 3p_1 = p_0 + 3p_3; \\ 5p_2 = 2p_0 + p_3; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим вероятности состояний:

$p_0=0,27$ (оба канала свободны),

$p_1=0,33$ (первый занят, второй свободен),

$p_2=0,16$ (второй занят, первый свободен),

$p_3=0,24$ (оба заняты).

Далее определим: чтобы обслужить без очереди автомобиль, нуждающийся в ремонте двигателя,

необходимо, чтобы система находилась в одном из состояний – S_0 или S_2 . Вероятность этого равна

$$p_0+p_2=0,27+0,16=0,43.$$

Вероятность обслужить без очереди автомобиль, нуждающийся в ремонте карбюратора, равна

$$p_0+p_1=0,27+0,33=0,60.$$

На основании полученных результатов приходим к выводу: поскольку вероятность обслуживания без очереди автомобиля, нуждающегося в ремонте двигателя, относительно мала, то руководству станции нужно открыть еще один такой канал обслуживания, чтобы клиенты не ждали обслуживания в очереди.

3.2. Построение вероятностных моделей при изучении марковских случайных процессов

Примером марковского случайного процессом может служить детская настольная игра с такими правилами: фишка игрока должна пройти некоторое число пунктов от 1 до n . Переход из одного пункта в другой каждый раз определяется исходом бросания игральной кости. Фишка проходит столько пунктов, сколько очков выпало на игральной кости. Из любого пункта i фишка с некоторой вероятностью p_{ij} переходит в один из пунктов j независимо от попадания в пункт i . Победителем становится игрок, первым достигший пункта n .

Марковские случайные процессы описываются с помощью матриц вероятностей перехода. С матрицами мы знакомимся в курсе алгебры, а о вероятности состояний – в курсе теории вероятностей. Здесь понятие «матрица» рассматривается с вероятностной точки зрения.

Определение. Пусть в момент времени n система находится в состоянии S_k . Условную вероятность p_{jk} будем называть вероятностью перехода из состояния S_j в состояние S_k . Вероятности перехода p_{jk} могут быть записаны в виде *матрицы вероятностей перехода*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца. P – квадратная матрица с неотрицательными элементами, причем сумма элементов каждой строки равна единице. Такие матрицы называют стохастическими. Они вполне описывают марковский случайный процесс.

Возникает вопрос о способе связи элементов матрицы с вероятностями состояний системы. Рассмотрим на конкретном примере последовательность построения матрицы вероятностей перехода. Опишем простейшую ситуацию: электрическая лампочка имеет два состояния: горит или потухла. Обозначим состояние лампочки «горит» через S_1 , «не горит» – через S_2 . Через равные промежутки времени проверяется состояние лампочки. Вероятность того, что в момент времени проверки лампочка горит, равна 0,7. Вероятность того, что она не горит – 0,3. Необходимо отметить известный факт: сумма вероятностей состояния должна равняться единице. В нашем примере это условие выполняется: $0,7+0,3=1$. Опишем вероятности состояния S_2 : если при проверке оказалось, что лампочка не горит, то вероятность того, что ее включат, равна 0,6, а вероятность, что не включат – 0,4.

Рассмотрим схему работы этой динамической системы (под динамической системой понимают любое устройство или совокупность устройств, подвергающихся воздействию факторов случайного характера):

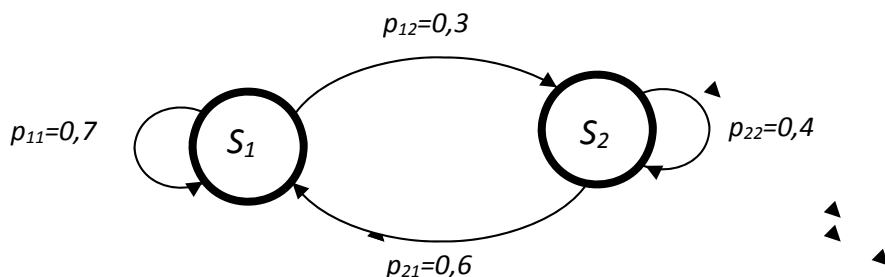


Рисунок 3. - Граф состояний динамической системы

Такую схему, в которой изображены состояния системы, переходы из состояния в состояние и указаны вероятности переходов будем называть *графом состояний*.

Обратим внимание на тот факт, что каждая вероятность состояния имеет два нижних индекса. В алгебре при записи элемента матрицы принято первым индексом обозначать номер строки, в которой находится этот элемент, а вторым – номер столбца. При записи матрицы вероятностей перехода руководствуемся тем же правилом. Только здесь первый индекс означает, в каком состоянии система находится в момент проверки, а второй индекс – в какое состояние она переходит.

Таким образом, в нашем примере вероятность p_{12} находится над стрелкой, соединяющей состояния S_1 и S_2 , и количественно описывает возможность перехода из S_1 в S_2 . Матрица вероятностей перехода в общем виде будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

а конкретно для нашего примера:

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

В первой строке находятся вероятности перехода из первого состояния, а во второй – из второго. Сумма вероятностей по строкам должна равняться единице.

Приведем классификацию случайных процессов по времени и состоянию.

Таблица 19. - Классификация случайных процессов по времени и состоянию

	<i>по времени</i>	примеры
<i>дискретные</i>	Система, в которой протекает процесс, меняет свои состояния только в моменты t_1, t_2, \dots, t_n , число которых конечно	Перевод студента из курса на курс производится 1 раз в году по итогам летней сессии

<i>непрерывные</i>	Переходы системы из состояния в состояние происходят в любой момент времени в течение наблюдаемого периода	Число элементов, отказавших в системе за время от начала работы устройства до момента времени t
<i>по состоянию</i>		примеры
<i>дискретные</i>	Множество значений случайной величины в сечении конечно (счетное)	30 суток подряд непрерывно фиксируется температура воздуха. Сечение – температура в 12 часов каждых суток
<i>непрерывные</i>	Множество значений случайных величин в сечении непрерывно (несчетное)	Напряжение в электрической сети в момент времени t

Пример марковского случайного процесса с дискретным состоянием и дискретным временем.

Известно, что сток рек имеет 4 состояния: первое – самый низкий уровень воды, четвертое – самый высокий, второе и третье – средние между ними. А также известно, что первое и четвертое состояния никогда не следуют по годам друг за другом, а остальные переходы возможны. Переходы из состояния в состояние имеют вероятности:

- из первого состояния снова в первое (за засушливым годом снова следует засушливый) $p_{11}=0,2$; из первого во второе - $p_{12}=0,4$; аналогично $p_{13}=0,4$ и $p_{14}=0$;
- из второго состояния: $p_{21}=0,2$; $p_{22}=0,4$; $p_{23}=0,3$; $p_{24}=0,1$;
- из третьего состояния: $p_{31}=0,1$; $p_{32}=0,4$; $p_{33}=0,4$; $p_{34}=0,1$;
- из четвертого состояния: $p_{41}=0$; $p_{42}=0,4$; $p_{43}=0,5$; $p_{44}=0,1$.

Если вода в реке достигает самого высокого уровня, то объявляются чрезвычайные меры. Пусть в первый год

наблюдался самый низкий уровень воды. Следует ли готовиться к объявлению чрезвычайных мер через два года?

Этап формализации: создадим математическую модель ситуации, описанной в задаче. Определим, что необходимо исследовать марковский случайный процесс с дискретным состоянием и дискретным временем.

Этап внутримодельного решения: выразим взаимосвязи и закономерности наблюдаемого случайного процесса математическим языком: вычерчивая граф состояний системы, дерево решений, составляя стохастическую матрицу вероятностей перехода из состояния в состояние. Абстрагируясь от природного явления, исследуем свойства и характеристики случайного процесса с помощью математических методов.

Изобразим условие задачи в виде графа, в котором обозначим через S_1 – первое состояние, через S_2, S_3 и S_4 – второе, третье и четвертое состояния соответственно. Над каждой стрелкой запишем вероятности перехода из состояния в состояние, осуществляемого по стрелке.

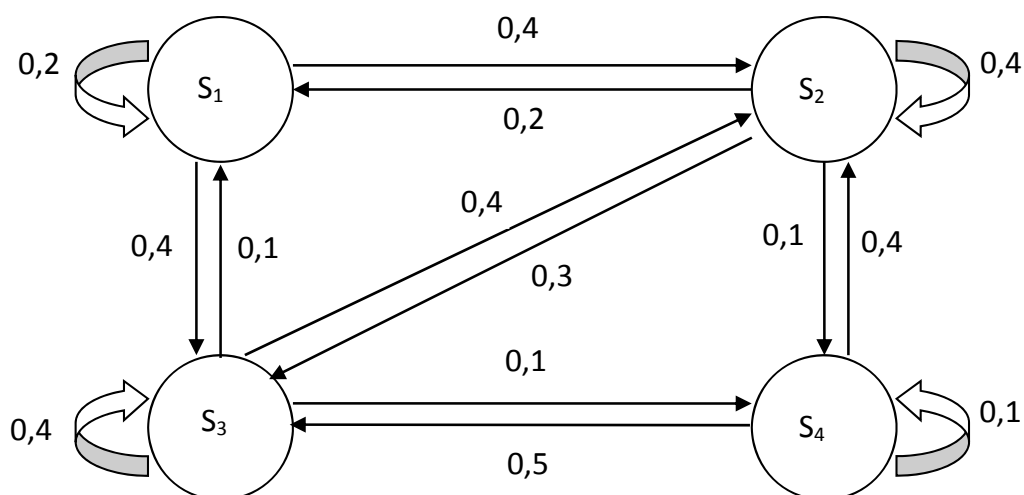


Рисунок 4. - Граф состояний системы

Составим матрицу вероятностей перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

В первой строке запишем вероятности перехода из первой градации в первую (0,2), во вторую (0,4), в третью (0,4) и в четвертую (0). Аналогично записываются вероятности перехода из второго состояния – вторая строка, из третьего – третья строка и из четвертого – четвертая строка.

Для облегчения поиска искомой вероятности построим дерево решений. Опишем принцип его построения. В первой строке записывается исходное состояние, с которого начинается наблюдение – состояние S_1 (в первый наблюдаемый год зафиксирован самый низкий уровень воды); во второй строке – все возможные состояния во втором году, которые могут наблюдаться после состояния S_1 ; в третьей строке – все возможные состояния в третьем году.

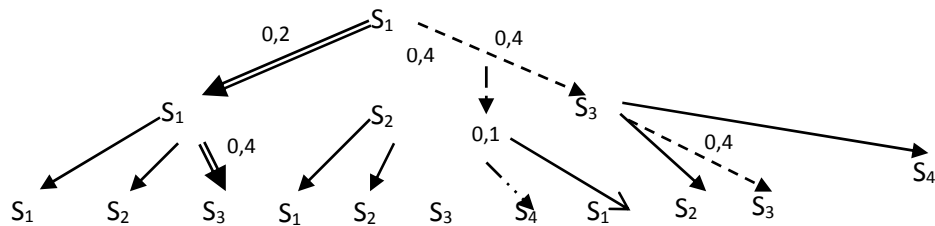


Рисунок 5. - Дерево решений

Из схемы видно, что из состояния S_1 в состояние S_3 за два года от начала наблюдений можно прийти тремя путями:

- 1) $S_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_3$;
- 2) $S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow S_3$;
- 3) $S_1 \rightarrow S_3 \rightarrow S_3$.

Выделим эти три пути разными стрелками и над каждой из них подпишем, чему равна вероятность соответствующего перехода. Теперь по этим стрелкам вычислим условные вероятности состояний.

Условная вероятность того, что в первый год наблюдался самый низкий уровень воды и через два года после этого можно наблюдать уровень воды, равный S_3 ,

- по первому пути $p(S_1 / S_1)p(S_3 / S_1) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$;

- по второму пути $p(S_2/S_1)p(S_3/S_2)=0,4 \cdot 0,1=0,04$;
- по третьему пути $p(S_3/S_1)p(S_3/S_3)=0,4 \cdot 0,4=0,16$.

Полная вероятность того, что если в начале наблюдения уровень воды находился в состоянии S_1 и через два года после этого он стал равен S_3 , равна сумме трех вычисленных условных вероятностей, то есть

$$p(S_1/S_1)p(S_3/S_1)+p(S_2/S_1)p(S_3/S_2)+p(S_3/S_1)p(S_3/S_3)=0,08+0,04+0,16=0,28.$$

Итак, мы определили, что вероятность наблюдать самый высокий уровень воды через два года после наблюдения самого низкого уровня равна 0,28.

Этап интерпретации: переведем полученные в решении задачи числовые характеристики на язык, применяемый в производственной деятельности. Вывод: так как мала вероятность того, что через два года сток воды в реке будет самым высоким, не стоит готовиться к объявлению чрезвычайных мер.

Переход из S_j в S_k ровно за n шагов может быть осуществлен различными путями $S_j \rightarrow S_{j_1} \rightarrow S_{j_2} \rightarrow \dots \rightarrow S_{j_{k-1}} \rightarrow S_{j_k}$. Условная вероятность того, что переход совершился по некоторому фиксированному пути при условии, что в какой-то момент система находилась в состоянии S_j , равна

$$p(S_{j_1}/S_j)p(S_{j_2}/S_{j_1})\dots p(S_{j_k}/S_{j_{k-1}}).$$

Сумма условных вероятностей для всех возможных путей равна вероятности того, что система в момент $r+n$ находится в состоянии S_k при условии, что в момент r она находилась в состоянии S_j .

Будем обозначать эту вероятность $p_{jk}^{(n)}$.

В частности,

$$p_{jk}^{(1)} = p(S_k/S_j);$$

$$p_{jk}^{(2)} = \sum_v p(S_v/S_j)p(S_v/S_k).$$

По индукции найдем рекуррентную формулу

$$p_{jk}^{(n+1)} = \sum_v p(S_v/S_j)p^n(S_v/S_k);$$

индукция по n показывает, что

$$P_{jk}^{(m+n)} = \sum_v P^m(S_v / S_j) P^n(S_v / S_k). \quad (3.2.1)$$

Равенство (3.2.1) показывает, что за первые m шагов система переходит из S_j в некоторое промежуточное состояние, а за последующие n шагов – из S_v в S_k . Выполнение этого равенства есть характерное свойство цепи Маркова.

3.3. Процессы в системах массового обслуживания. Функционирование систем, приводящее к уравнениям Колмогорова.

Определение. Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система, предназначенная для обслуживания какого-либо потока заявок.

Определение. Объект, занимающийся обслуживанием заявок, называется каналом обслуживания.

Например, приемная врача – СМО, канал обслуживания – врач, принимающий больных.

Пример. Автозаправочная станция (СМО) имеет две бензозаправочные колонки – два канала обслуживания. Рассмотрим упрощенную схему работы станции. Пусть состояния этой системы обслуживания такие:

- обе колонки свободны (обозначим это состояние S_0),
- первая занята, вторая свободна (S_1),
- вторая занята, первая свободна (S_2),
- обе заняты (S_3).

Нарисуем граф состояний этой системы:

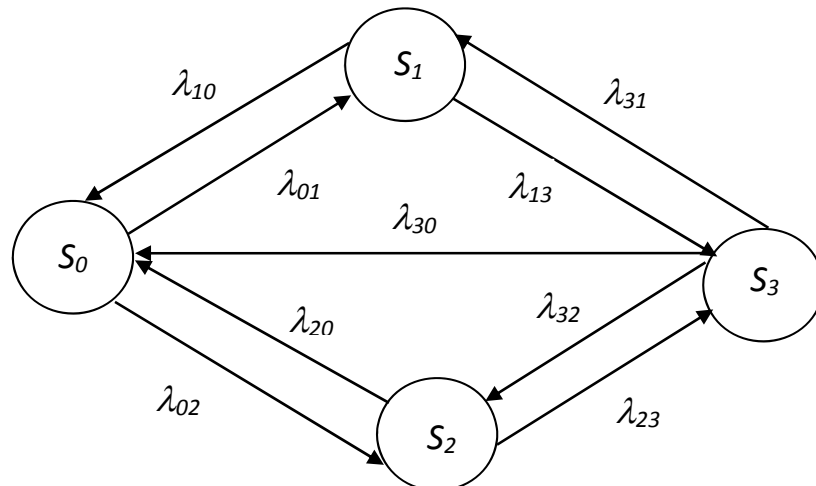


Рисунок 6. - Граф состояний СМО – автозаправочной станции

Здесь стрелками обозначены переходы из состояния в состояние. λ_{ij} - интенсивность, с которой система переходит из состояния S_i в S_j . Например, под действием λ_{13} автозаправочная станция переходит из состояния: S_1 - первая колонка занята, вторая свободна в состояние S_2 - обе колонки заняты.

p_i - вероятность того, что автозаправочная станция (СМО) в момент времени t находится в состоянии S_i .

$$\sum_{i=0}^3 p_i = 1.$$

Пусть в момент времени t СМО находится в состоянии S_0 , то есть обе колонки свободны. Пусть с момента времени t прошел малый промежуток времени Δt . Найдем вероятность того, что через время Δt СМО снова находится в состоянии S_0 . Это произойдет, если:

- а) система не вышла из состояния S_0 ;
- б) она находилась в одном из состояний S_1 , S_2 или S_3 и вернулась в состояние S_0 .

Рассмотрим случай а). Система выйдет из состояния S_0 под действием λ_{01} в состояние S_1 с вероятностью $\lambda_{01} \Delta t$ (см. формулу (1.6)), или под действием λ_{02} в состояние S_2 с вероятностью $\lambda_{02} \Delta t$. Вероятность противоположного события – система не выйдет из состояния S_0 равна

$$1 - (\lambda_{01} \Delta t + \lambda_{02} \Delta t) = 1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) \Delta t.$$

Итак, вероятность того, что система находилась в состоянии S_0 и не вышла из него, по формуле произведения вероятностей равна

$$p_0(t) [1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02}) \Delta t].$$

Рассмотрим случай б). Вероятность того, что система находилась в состоянии S_1 , равна $p_1(t)$ и вероятность того, что она из S_1 перейдет в S_0 , равна $\lambda_{10} \Delta t$. Т.о., вероятность того, что через промежуток времени Δt система окажется в состоянии S_0 , равна

$$p_1(t) \lambda_{10} \Delta t.$$

Аналогично, вероятность того, что система окажется в состоянии S_0 после того, как она была в состоянии S_2 , равна

$$p_2(t) \lambda_{20} \Delta t.$$

И, наконец, вероятность того, что система окажется в состоянии S_0 после того, как она была в состоянии S_3 , равна

$$p_3(t)\lambda_{30}\Delta t.$$

В совокупности случай а) и случай б) дадут нам искомую вероятность того, что через время Δt СМО снова находится в состоянии S_0 . Согласно формуле сложения вероятностей

$$p_0(t+\Delta t) = p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t + p_3(t)\lambda_{30}\Delta t + p_0(t)[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t];$$

$$p_0(t+\Delta t) = p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t + p_3(t)\lambda_{30}\Delta t + p_0(t) - p_0(t)(\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t;$$

$$p_0(t+\Delta t) - p_0(t) = p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t + p_3(t)\lambda_{30}\Delta t - p_0(t)(\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t.$$

Разделим обе части равенства на Δt :

$$\frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = p_1(t)\lambda_{10} + p_2(t)\lambda_{20} + p_3(t)\lambda_{30} - p_0(t)(\lambda_{01} + \lambda_{02}).$$

Пусть $\Delta t \rightarrow 0$, тогда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = p_1(t)\lambda_{10} + p_2(t)\lambda_{20} + p_3(t)\lambda_{30} - p_0(t)(\lambda_{01} + \lambda_{02}).$$

Так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = p'_0(t)$, то

$$p'_0 = p_1\lambda_{10} + p_2\lambda_{20} + p_3\lambda_{30} - p_0(\lambda_{01} + \lambda_{02}).$$

Получено *дифференциальное уравнение Колмогорова* для нахождения вероятности p_0 состояния СМО.

Аналогично получим уравнения для вероятностей того, что СМО находится в состоянии S_1, S_2, S_3 .

Получим систему:

$$\begin{cases} p'_0 = p_1\lambda_{10} + p_2\lambda_{20} + p_3\lambda_{30} - p_0\lambda_{01} - p_0\lambda_{02}; \\ p'_1 = p_0\lambda_{01} + p_3\lambda_{31} - p_1\lambda_{13} - p_1\lambda_{10}; \\ p'_2 = p_0\lambda_{02} + p_3\lambda_{32} - p_2\lambda_{20} - p_2\lambda_{23}; \\ p'_3 = p_1\lambda_{13} + p_2\lambda_{23} - p_3\lambda_{30} - p_3\lambda_{31} - p_3\lambda_{32}. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Для нахождения неизвестных вероятностей к системе необходимо добавить нормировочное условие:

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 1.$$

Правило составления уравнений Колмогорова: в левой части каждого уравнения стоит производная p'_i вероятности i -го состояния, а в правой – столько членов, сколько стрелок

связано с этим состоянием. Если стрелка *входит* в состояние, то член со знаком «+», если стрелка *выходит* из состояния, то знак «-». Каждый член равен интенсивности потока, переводящей систему по данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого выходит эта стрелка.

Чтобы решить систему (3.3.1), необходимо задать начальные условия. В нашем примере – это вероятности состояния системы в начальный момент времени $t=0$. Пусть при $t=0$ обе колонки свободны, тогда $p_0(0)=1, p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0$.

Когда случайный процесс длится достаточно долгое время, говорят о предельном поведении вероятностей $p_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Если поток событий является пуассоновским с интенсивностями $\lambda_{ij} = const$, то существуют *предельные вероятности состояний*

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t); (i = 1, \dots, n),$$

не зависящие от того, в каком состоянии система находилась в начальный момент времени. В этом случае в системе устанавливается *предельный стационарный режим*, при котором система переходит из состояния в состояние с вероятностями, которые не меняются со временем. Физический смысл этих предельных вероятностей таков: это *среднее относительное время* пребывания системы в данном состоянии.

Например, если в задаче об автозаправочной станции предельная вероятность $p_0=0,25$, это значит, что в состоянии S_0 (обе колонки свободны) автозаправочная станция находится примерно одну четверть всего времени работы.

Если предельные вероятности принимают конкретные значения, то есть $p_i = const$, то в системе (3.3.1) $p'_i = 0$. Тогда система (3.3.1) примет вид:

$$\begin{cases} p_0(\lambda_{01} + \lambda_{02}) = p_1\lambda_{10} + p_2\lambda_{20} + p_3\lambda_{30}; \\ p_1(\lambda_{13} + \lambda_{10}) = p_0\lambda_{01} + p_3\lambda_{31}; \\ p_2(\lambda_{20} + \lambda_{23}) = p_0\lambda_{02} + p_3\lambda_{32}; \\ p_3(\lambda_{31} + \lambda_{32}) = p_1\lambda_{13} + p_2\lambda_{23} - p_3\lambda_{30}; \\ \sum_{i=0}^3 p_i = 1. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Нетрудно заметить, что в полученной системе в левой части уравнений находится произведение предельной вероятности состояния на сумму интенсивностей потоков, выходящих из этого состояния, а в правой части – сумма произведений интенсивностей всех потоков, входящих в это состояние на предельные вероятности состояний, из которых идут эти потоки. Систему уравнений (3.3.2) легко составить непосредственно по размеченному графу состояний.

3.4. Процессы «гибели и размножения»

Процессы, протекающие в системах массового обслуживания, являются процессами «гибели и размножения».

Определение. Процессы «гибели и размножения» - это марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Термин происходит от биологических задач, связанных с изучением численности популяций, и изображается размеченным графом состояний:

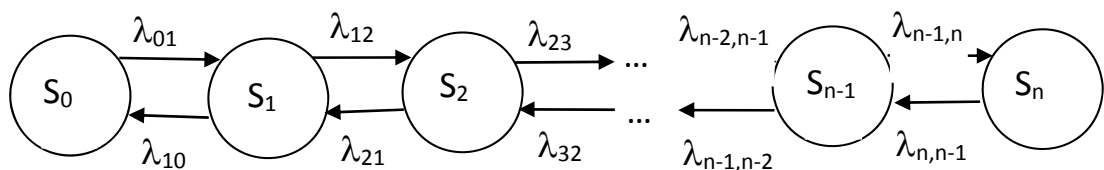


Рисунок 7. – Граф состояний процесса гибели и размножения

Здесь каждое из состояний, кроме первого и последнего, связано с соседними состояниями прямой и обратной связью.

В соответствии с системой уравнений (3.3.2), имеем систему для предельных вероятностей состояний:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 \lambda_{01} = p_1 \lambda_{10}; \\ p_1 (\lambda_{12} + \lambda_{10}) = p_0 \lambda_{01} + p_2 \lambda_{21}; \\ p_2 (\lambda_{21} + \lambda_{23}) = p_1 \lambda_{12} + p_3 \lambda_{32}; \\ \dots\dots\dots; \\ p_{n-1} \lambda_{n-1,n} = p_n \lambda_{n,n-1}; \\ \sum_{i=0}^n p_i = 1. \end{array} \right. \quad (3.4.1)$$

Раскроем скобки во втором уравнении полученной системы:

$$p_1 \lambda_{12} + p_1 \lambda_{10} = p_0 \lambda_{01} + p_2 \lambda_{21}.$$

Заменим в соответствии с первым уравнением в правой части второго уравнения $p_0 \lambda_{01}$ на $p_1 \lambda_{10}$, получим:

$$p_1 \lambda_{12} + p_1 \lambda_{10} = p_1 \lambda_{10} + p_2 \lambda_{21}.$$

Сократим в обеих частях уравнения слагаемое $p_1 \lambda_{10}$:

$$p_1 \lambda_{12} = p_2 \lambda_{21}.$$

Проведя аналогичные преобразования в остальных уравнениях системы (3.4.1), получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 \lambda_{01} = p_1 \lambda_{10}; \\ p_1 \lambda_{12} = p_2 \lambda_{21}; \\ \dots\dots\dots; \\ p_{n-1} \lambda_{n-1,n} = p_n; \\ \sum_{i=0}^n p_i = 1. \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

Выразим в системе (3.4.2) все вероятности через p_0 :

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{21} \lambda_{10}} p_0, \quad \dots, \quad p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21} \lambda_{10}} p_0$$

Легко заметить, что числители коэффициентов при p_0 содержат произведения всех интенсивностей, переводящих из состояния p_0 к данному состоянию слева направо, а знаменатели - произведения всех интенсивностей, переводящих от данного состояния к состоянию p_0 справа налево.

Подставим полученные значения в выражение $\sum_{i=0}^n p_i = 1$:

$$p_0 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0 + \frac{\lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{21} \lambda_{10}} p_0 + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21} \lambda_{10}} p_0 = 1$$

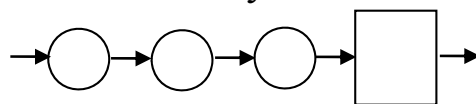
Выразим p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{21} \lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21} \lambda_{10}}} \quad (3.4.3)$$

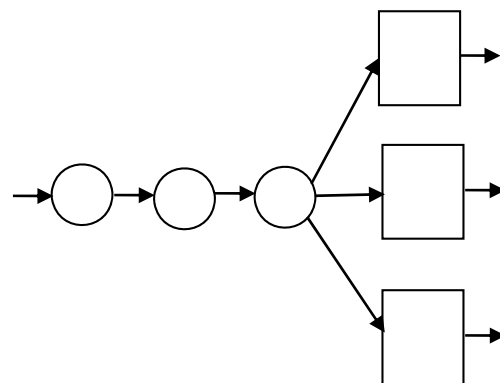
Т.о., получена система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{21} \lambda_{10}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21} \lambda_{10}}}; \\ p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0; \\ p_2 = \frac{\lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{21} \lambda_{10}} p_0; \\ \dots; \\ p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12} \lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21} \lambda_{10}} p_0. \end{array} \right. \quad (3.4.4)$$

Системы массового обслуживания различаются по числу каналов обслуживания.



Одноканальная



Многоканальная

Рисунок 8. – Одноканальные и многоканальные системы массового обслуживания

Пример одноканальной системы: терминал для оплаты услуг сотовой связи, банкомат. Здесь клиенты в порядке

очереди обслуживаются одним каналом обслуживания и после обслуживания покидают систему.

Пример многоканальной системы: очередь в регистратуру поликлиники с несколькими пунктами обслуживания. Больные из общей очереди обращаются в освободившееся окно.

Системы массового обслуживания делятся на системы с отказами и системы с ожиданиями.

В системе с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы с обслуживаниями заняты, получает отказ и покидает систему.

Пример процесса в системах с отказами. Пусть автомойка для автомобилей имеет два канала обслуживания. Если машина приезжает на автомойку в момент, когда оба канала заняты, машина уезжает необслуженной.

В системе с ожиданиями заявка становится в очередь и ждет, когда какой-нибудь канал освободится.

Пример процесса в системах с ожиданиями: касса аэрофлота – клиенты, обращаясь в кассу для покупки билетов, ждут момента обслуживания в очереди.

3.5. СМО с отказами

Рассмотрим одноканальную СМО с отказами. Пусть состояния системы: S_0 – система свободна, S_1 – система занята. λ - интенсивность потока, переводящего систему из состояния S_0 в состояние S_1 . Среднее время, когда система занята обслуживанием

$$\bar{t}_{об} = \frac{1}{\mu}.$$

Тогда μ - интенсивность потока, переводящего систему из состояния S_1 в состояние S_0 (или среднее число обслуживаемых элементов в единицу времени).

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}}. \quad (3.5.1)$$

λ и μ - простейшие потоки. Поэтому СМО описывается марковскими процессами. Размеченный граф состояний:

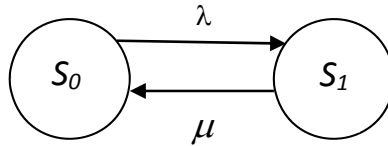


Рисунок 9. – Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Замечание. Здесь и далее λ имеет размерность – количество поступающих заявок в единицу времени; μ – количество обслуживаемых заявок в единицу времени.

Найдем предельные вероятности системы p_0 и p_1 . Согласно (3.4.4):

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu};$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Определение. Назовем предельную вероятность того, что система свободна $p_0 = Q$, *относительной пропускной способностью* (это отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступивших за это время заявок) и $P_{отк} = p_1$ – *вероятностью отказа*.

Т.о., относительная пропускная способность одноканальной СМО с отказами

$$Q = p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}. \quad (3.5.2)$$

Вероятность отказа

$$P_{отк} = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (3.5.3)$$

Определение. *Абсолютная пропускная способность* выражает интенсивность потока обслуженных системой заявок в единицу времени и вычисляется так:

$$A = \lambda Q. \quad (3.5.4)$$

Пример работы одноканальной СМО с отказами. В ремонтной мастерской имеется один телефонный аппарат для принятия заявок. Вызовы приходят с интенсивностью 42

вызова в час. Средняя продолжительность разговора 2 мин. Определить вероятность отказа $P_{отк}$, а так же показатели эффективности работы СМО: относительную и абсолютную пропускную способность.

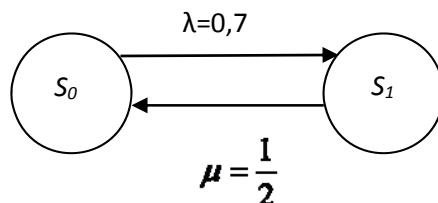


Рисунок 10. - Граф состояний одноканальной системы с отказами

Здесь S_0 – линия свободна, S_1 – линия занята, $\lambda=42$ (вызовов/час)=0,7 (вызовов/мин) – интенсивность потока, переводящего систему из состояния «линия свободна» в состояние «линия занята», $\bar{t}_{об}=2$ мин. В соответствии с (3.5.1),

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{2}.$$

По формуле (3.5.3) вероятность отказа

$$P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{0,7}{0,7 + 0,5} = 0,58.$$

Согласно (3.5.2), относительная пропускная способность

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0,5}{0,7 + 0,5} = 0,42.$$

Абсолютную пропускную способность вычислим по формуле (3.5.4):

$$A = \lambda Q = 0,7 \cdot 0,42 = 0,29 \text{ (выз./мин)} = 17 \text{ (выз./час)}.$$

Т.о., 58% абонентов не дозвонятся; 42% абонентов будут обслужены, что составит в среднем 17 вызовов в час. Из этого следует, что одного телефонного аппарата для принятия заявок в мастерской не хватает, т.к. больше половины клиентов получают отказ в обслуживании и уходят в другую мастерскую.

Рассмотрим **многоканальную СМО с отказами**.

Граф состояний соответствует процессу гибели и размножения:

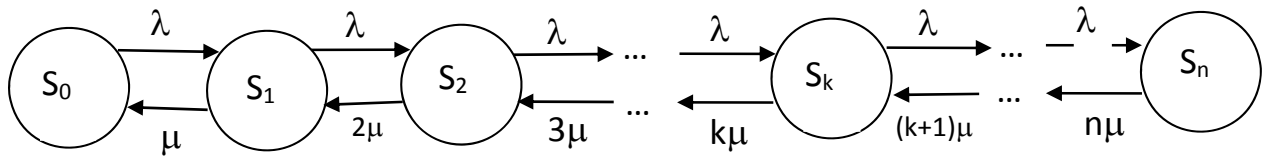


Рисунок 11. – Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Здесь - n каналов обслуживания. Состояние S_n – занято ровно n каналов. Так как рассматривается СМО с отказами, то число каналов n совпадает с числом заявок. λ - интенсивность потока, переводящая систему из любого левого состояния в любое правое. Интенсивность потока, переводящая систему из правого состояния в левое, меняется в зависимости от состояния системы. Из S_1 в S_0 (канал занят \rightarrow канал свободен) система переходит с интенсивностью μ . Если система находится в состоянии S_2 (два канала заняты), то состояние «один канал свободен» наступит, когда освободится либо первый канал (с интенсивностью μ), либо второй канал (с той же интенсивностью μ). Т.о., из S_2 в S_1 система перейдет с интенсивностью $\mu + \mu = 2\mu$. И т. д.

Согласно формуле (3.4.3):

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}.$$

Обозначим

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

ρ показывает, сколько заявок в единицу времени поступает при среднем времени обслуживания $\bar{t}_{обс}$.

Тогда, учитывая (3.4.4), получим систему уравнений для нахождения предельных вероятностей состояний, называемую формулами Эрланга, основоположника теории массового обслуживания:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!}}; \\ p_1 = \rho p_0; \\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0; \\ \dots\dots\dots; \\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \end{array} \right. \quad (3.5.5)$$

Вероятность отказа - вероятность состояния системы S_n , когда все каналы заняты:

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (3.5.6)$$

Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda Q.$$

Средне число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu}.$$

Пример работы многоканальной СМО с отказами.
Телевизионная передача ведется в прямом эфире. Телезрителям предлагается задавать вопросы по многоканальному телефону. Телефон имеет 4 канала. В среднем на этот телефонный номер звонят 7 человек в минуту. Средняя продолжительность разговора – 1 минута. Телезритель, позвонивший в момент, когда все операторы телефонной связи заняты, не дозванивается. Найти:

- 1) среднюю долю времени, когда операторы свободны;
- 2) вероятность того, что телезритель не дозвонится.

Решение:

- число каналов обслуживания $k=4$,
- интенсивность потока заявок $\lambda=7$ чел./мин,
- среднее время обслуживания $\bar{t}_{об} = 1$ мин,

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{об}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7}{1} = 7.$$

1) Найдем среднюю долю времени, когда операторы свободны. Состояние, в котором пребывает система - S_0 . По формуле (3.5.5):

$$P_0 = \frac{1}{1 + 7 + \frac{7^2}{2!} + \frac{7^3}{3!} + \frac{7^4}{4!}} = 0,005.$$

2) Вероятность того, что телезритель не дозвонится согласно (3.5.6)

$$P_{отк} = \frac{7^4}{4!} \cdot 0,005 = 0,5.$$

Выводы: доля свободного времени операторов очень мала; примерно половина звонивших телезрителей не сможет задать свои вопросы в прямом эфире передачи, поэтому количество каналов телефона нужно увеличить.

3.6. СМО с ожиданием

Рассмотрим одноканальную систему с ожиданием. Особенность этой системы обслуживания, как было сказано выше, в том, что если канал обслуживания занят, то клиент ожидает в очереди до тех пор, пока не будет обслужен, независимо от длины очереди.

Пусть состояния системы:

S_0 – система свободна;

S_1 – канал занят, очереди нет;

S_2 – канал занят, одна заявка в очереди;

S_k - канал занят, $k-1$ заявок в очереди;

λ - интенсивность поступления заявок;

μ - интенсивность обслуживания.

В данной системе предельные вероятности существуют только, когда $\mu > \lambda$ (число клиентов, обслуживаемых в единицу времени, больше числа заявок в единицу времени), иначе очередь растет неограниченно.

Пусть $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ - параметр загрузки системы.

Тогда предельные вероятности:

$$\begin{cases} p_0 = 1 - \rho; \\ p_k = \rho^k (1 - \rho), k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.6.1)$$

Интерес представляют такие характеристики системы, как *среднее число клиентов в системе* (включая ожидающих в очереди и обслуживаемых)

$$\bar{N}_{сист} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}; \quad (3.6.2)$$

среднее число клиентов в очереди

$$\bar{N}_{оч} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}; \quad (3.6.3)$$

среднее время пребывания клиента в системе (включая время ожидания и время обслуживания)

$$\bar{T}_{сист} = \frac{1}{\mu - \lambda}; \quad (3.6.4)$$

среднее время ожидания клиента в очереди

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}. \quad (3.6.5)$$

Т.к. в этой системе любая заявка обслуживается, то вероятность отказа

$$P_{отк} = 0.$$

Относительная пропускная способность

$$Q = 1.$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda.$$

Пример работы одноканальной системы с ожиданием. Мастер по ремонту карбюраторов может отремонтировать карбюраторы у 4-х автомобилей в час. На пункт обслуживания в среднем приезжают 3 машины в час. Если мастер занят, клиенты ожидают обслуживания в очереди. Определить характеристики этой СМО:

1) среднее число машин, находящихся на пункте обслуживания,

- 2) среднее число машин в очереди,
- 3) вероятность числа машин в очереди,
- 4) вероятность того, что мастер свободен,
- 5) среднее время нахождения клиента на пункте обслуживания,
- б) среднее время ожидания в очереди.

Решение.

Имеем:

$\lambda = 3$ (число машин, поступающих в час).

$\mu = 4$ (число машин, обслуживаемых в час).

$\mu > \lambda$, поэтому предельные вероятности существуют.

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$ - параметр загруженности системы.

- 1) Согласно **(3.6.2)**, среднее число машин, находящихся на пункте обслуживания

$$\bar{N}_{сист} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4 - 3} = 3.$$

- 2) Согласно **(3.6.3)**, среднее число машин в очереди

$$\bar{N}_{оч} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3^2}{4(4 - 3)} \approx 2.$$

- 3) Вероятность того, что в очереди стоят $k-1=2$ машины, это вероятность состояния S_k - мастер занят, $k=3$. Предельная вероятность состояния S_k , согласно **(3.6.1)**

$$p_k = \rho^k (1 - \rho) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{27}{256} \approx 0,105.$$

- 4) Вероятность того, что мастер свободен, по формуле **(3.6.1)**

$$p_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

- 5) Среднее время нахождения клиента на пункте обслуживания по формуле **(3.6.4)**

$$\bar{T}_{сист} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4 - 3} = 1 \text{ (час)}.$$

- б) Среднее время ожидания в очереди по формуле **(3.6.5)**

$$\bar{T}_{оч} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{3}{4(4 - 3)} = \frac{3}{4} \text{ часа} = 45 \text{ мин.}$$

Рассмотрим **многоканальную систему с ожиданием**.

Пусть состояния системы:

n – число каналов обслуживания;

S_0 – система свободна;

S_1 – один канал занят, очереди нет;

S_k – k каналов занято, очереди нет ($1 \leq k \leq n$);

S_n – все n каналов заняты.

В состояниях S_0, S_1, \dots, S_n очереди нет.

S_{n+1} – n каналов заняты, одна заявка в очереди;

S_{n+m} – n каналов заняты, m заявок в очереди;

λ – интенсивность поступления заявок;

μ – интенсивность обслуживания;

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – параметр загрузки системы.

В данной системе предельные вероятности существуют только, когда $\rho < n$ (среднее число заявок, приходящееся на время обслуживания одной заявки, не превосходит возможностей обслуживания n -канальной системы; иначе – число заявок, стоящих в очереди, будет неограниченно возрастать). Тогда предельные вероятности:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{n}} \right)^{-1}; \\ p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (1 \leq k \leq n); \\ p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m n!} p_0 \quad (m \geq 1). \end{array} \right. \quad (3.6.6)$$

Средне число занятых каналов

$$\bar{k} = \rho = \frac{\lambda}{\mu};$$

среднее число клиентов в очереди

$$\bar{N}_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}; \quad (3.6.7)$$

среднее число клиентов в системе (включая ожидающих в очереди и обслуживаемых)

$$\bar{N}_{сист} = \bar{N}_{оч} + \rho; \quad (3.6.8)$$

среднее время пребывания клиента в системе (включая время ожидания и время обслуживания)

$$\bar{T}_{сист} = \frac{1}{\lambda} \bar{N}_{сист}; \quad (3.6.9)$$

среднее время ожидания клиента в очереди

$$\bar{T}_{оч} = \frac{1}{\lambda} \bar{N}_{оч}. \quad (3.6.10)$$

Пример работы многоканальной системы с ожиданием.
В сервисном центре по ремонту компьютеров работают 4 мастера. Скорость поступления заявок – 3 компьютера в день, скорость обслуживания одним мастером – 1 компьютер в день.

Определить:

- 1) вероятность того, что в мастерской нет компьютеров;
- 2) среднее число компьютеров в очереди;
- 3) среднее число компьютеров в мастерской;
- 4) среднее время ожидания в очереди;
- 5) среднее время, которое компьютер находится в мастерской;
- 6) вероятность того, что прибывшему компьютеру придется ждать в очереди.

Решение. $\lambda = 3$ (1/день), $t = 1$ (день), $\mu = \frac{1}{t} = 1$ (1/день) $n=4$,

$\rho = \frac{3}{1} = 3$. Здесь $\rho < n$, значит, очередь не растет неограниченно и предельный режим существует.

1) Вероятность того, что в мастерской нет компьютеров – это вероятность того, что система свободна. Воспользуемся формулой (3.6.6), получим

$$p_0 = \left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{4 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \right)^{-1} = 0,04,$$

то есть, вероятность того, что в мастерской нет компьютеров, равна 4%.

2) Среднее число компьютеров в очереди, согласно (3.6.7)

$$\bar{N}_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{nn! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}.$$

$$\bar{N}_{оч} = \frac{3^5 \cdot 0,04}{4 \cdot 4! \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2} \approx 1,62,$$

то есть, примерно 2 компьютера находятся в очереди.

3) Среднее число компьютеров в мастерской, согласно (3.6.8)

$$\bar{N}_{сист} = \bar{N}_{оч} + \rho.$$

$$\bar{N}_{сист} = 1,62 + 3 = 4,62.$$

4) Среднее время ожидания в очереди, согласно (3.6.10)

$$\bar{T}_{оч} = \frac{1}{\lambda} \bar{N}_{оч}.$$

$$\bar{T}_{оч} = \frac{1}{3} \cdot 1,62 \approx 0,54 \text{ (дня)},$$

то есть, компьютер находится в очереди примерно половину дня.

5) Среднее время, которое компьютер находится в мастерской, согласно (3.6.9)

$$\bar{T}_{сист} = \frac{1}{\lambda} \bar{N}_{сист}.$$

$$\bar{T}_{сист} = \frac{1}{3} \cdot 4,62 = 1,54,$$

то есть, примерно 1,5 дня.

6) Вероятность того, что прибывшему компьютеру придется ждать в очереди, это вероятность состояния системы, когда все мастера заняты, то есть вероятность, согласно (3.6.6)

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (k = n).$$

$$p_k = \frac{3^4}{4!} \cdot 0,04 = 0,05.$$

Эта вероятность равна 5%.

Глава 4. Имитационное моделирование

4.1. Основные понятия

Определим метод имитационного моделирования в общем виде как экспериментальный метод исследования реальной системы по ее имитационной модели, который сочетает особенности экспериментального подхода и специфические условия использования вычислительной техники.

Имитационное моделирование является машинным методом моделирования благодаря развитию информационных технологий, что привело к появлению этого вида компьютерного моделирования. В определении также говорится об экспериментальной природе имитации, применяется имитационный метод исследования (осуществляется эксперимент с моделью). В имитационном моделировании важную роль играет не только проведение, но и планирование эксперимента на модели. В чем же состоит сущность имитационного моделирования?

В процессе имитационного моделирования (рис. 12) исследователь имеет дело с четырьмя основными элементами:

- реальная система;
- логико-математическая модель моделируемого объекта;
- имитационная (машинная) модель;
- ЭВМ, на которой осуществляется имитация – направленный вычислительный эксперимент.

Исследователь изучает реальную систему, разрабатывает логико-математическую модель реальной системы. Имитационный характер исследования предполагает наличие логико - или логико-математических моделей, описываемых изучаемый процесс.

Реальная система - это совокупность взаимодействующих элементов, функционирующих во времени.

Составной характер сложной системы описывает представление ее модели в виде трех множеств:

A, S, T , где

A – множество элементов (в их число включается и внешняя среда);

S – множество допустимых связей между элементами (структура модели);

T – множество рассматриваемых моментов времени.

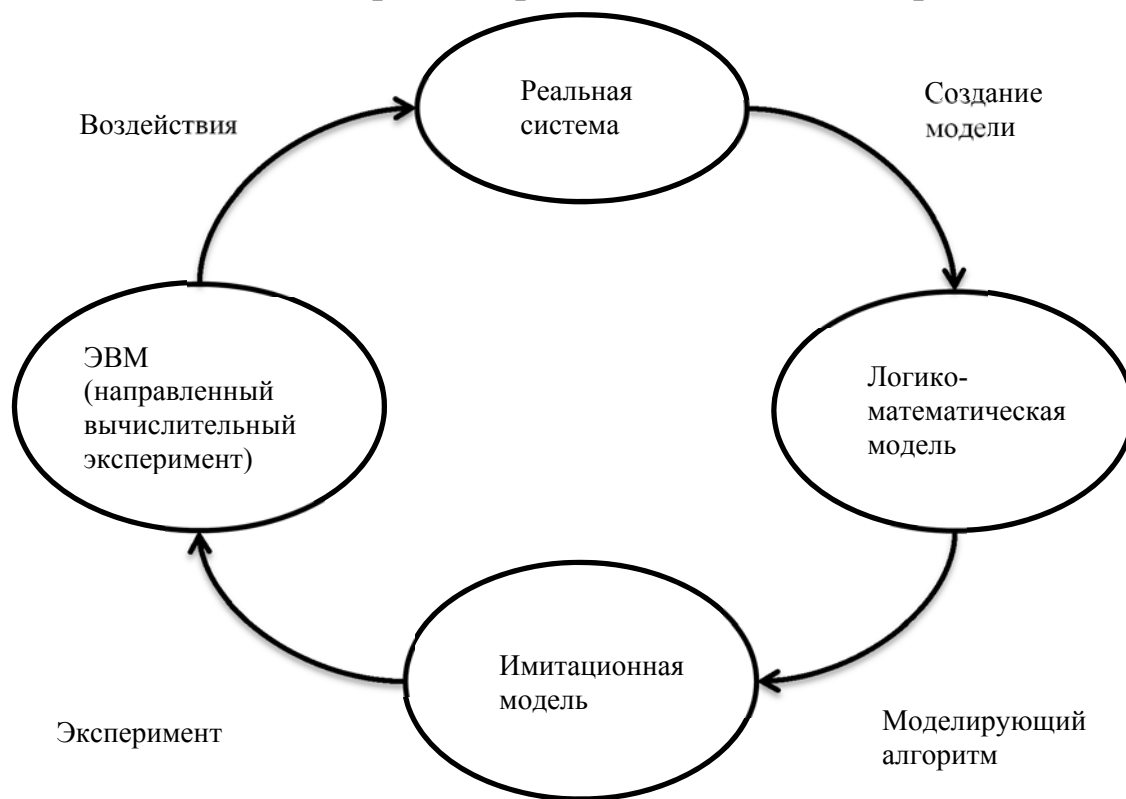


Рисунок 12.– Процесс имитационного исследования

Особенность имитационного моделирования состоит в том, что имитационная модель позволяет воспроизводить моделируемые объекты:

- с сохранением их логической структуры;
- с сохранением поведенческих свойств (последовательности чередования во времени событий, происходящих в системе), т.е. динамики взаимодействий.

При имитационном моделировании структура моделируемой системы адекватно отображается в модели, а процессы ее функционирования проигрываются (имитируются) на построенной модели. Поэтому построение имитационной модели заключается в описании структуры и процессов функционирования моделируемого объекта или системы.

В описании имитационной модели выделяют две составляющие:

- статическое описание системы, которое является описанием ее структуры: при разработке имитационной модели необходимо применять структурный анализ моделируемых процессов;

- динамическое описание системы, или описание динамики взаимодействий ее элементов: при его составлении фактически требуется построение функциональной модели моделируемых динамических процессов.

Идея метода, с точки зрения его программной реализации, состоит в следующем. Поставим в соответствие элементам системы некоторые программные компоненты, а состояния этих элементов будем описывать с помощью переменных состояний. Элементы, по определению, взаимодействуют (или обмениваются информацией), значит, может быть реализован алгоритм функционирования отдельных элементов, т.е., моделирующий алгоритм. Кроме того, элементы существуют во времени, значит надо задать алгоритм изменения переменных состояний. Динамика в имитационных моделях реализуется с помощью механизма продвижения модельного времени.

Отличительной особенностью метода имитационного моделирования является возможность описания и воспроизведения взаимодействия между различными элементами системы.

Таким образом, чтобы составить имитационную модель, надо:

- *представить реальную систему (процесс), как совокупность взаимодействующих элементов;*

- *алгоритмически описать функционирование отдельных элементов;*

- *описать процесс взаимодействия различных элементов между собой и с внешней средой.*

Ключевым моментом в имитационном моделировании является выделение и описание состояний системы. Система характеризуется набором переменных состояний, каждая

комбинация которых описывает конкретное состояние. Следовательно, путем изменения значений этих переменных можно имитировать переход системы из одного состояния в другое. Таким образом, имитационное моделирование – это представление динамического поведения системы посредством продвижения ее от одного состояния к другому в соответствии с определенными правилами. Эти изменения состояний могут происходить либо непрерывно, либо в дискретные моменты времени. Имитационное моделирование есть динамическое отражение изменений состояния системы с течением времени.

При имитационном моделировании логическая структура реальной системы отображается в модели, а также имитируется динамика взаимодействий подсистем в моделируемой системе.

Для описания динамики моделируемых процессов в имитационном моделировании реализован механизм задания модельного времени. Этот механизм встроен в управляющие программы системы моделирования.

Если бы на ЭВМ имитировалось поведение одной компоненты системы, то выполнение действий в имитационной модели можно было бы осуществить последовательно, по пересчету временной координаты.

Чтобы обеспечить имитацию параллельных событий реальной системы вводят некоторую глобальную переменную (обеспечивающую синхронизацию всех событий в системе) t , которую называют модельным (или системным) временем.

Существуют два основных способа изменения t :

- пошаговый (применяются фиксированные интервалы изменения модельного времени);
- пособытийный (применяются переменные интервалы изменения модельного времени, при этом величина шага измеряется интервалом до следующего события).

При использовании пошагового метода отсчет системного времени ведется через фиксированные интервалы времени, называемые шагом. События, произошедшие на этом

интервале времени, считаются наступившими в момент окончания интервала.

Погрешность в измерении временных характеристик системы зависит в этом случае от величины шага интегрирования. В общем виде алгоритм моделирования с постоянным шагом представлен на рис. 13, где t – текущее значение модельного времени, T_j – конечное время интервала моделирования, Δt – постоянный шаг по времени.

В случае пошагового метода продвижение времени происходит с минимально возможной постоянной длиной шага (принцип t). Эти алгоритмы не очень эффективны с точки зрения использования машинного времени на их реализацию.

Способ фиксированного шага применяется в случаях:

- если закон изменения от времени описывается интегро-дифференциальными уравнениями. Характерный пример: решение интегро-дифференциальных уравнений численным методом. В подобных методах шаг моделирования равен шагу интегрирования. Динамика модели является дискретным приближением реальных непрерывных процессов;

- когда события распределены равномерно и можно подобрать шаг изменения временной координаты;

- когда сложно предсказать появление определенных событий;

- когда событий очень много и они появляются группами.

Выбор величины шага моделирования существенным образом влияет как на точность получаемых результатов, так и на машинное время имитационного прогона. Уменьшение шага ведет к повышению точности имитации, но и требует повышенных затрат временных ресурсов.

При выборе величины шага рекомендуется:

- принимать величину шага равной средней интенсивности возникновения событий различных типов или

- выбирать величину Δt равной среднему интервалу между наиболее частыми (или наиболее важными) событиями.

В тех случаях, когда в течение каждого шага по времени наступает лишь одно событие, пошаговый метод более

целесообразен, так как преимущество пособытийного метода – большая длина шага – при этом не используются, а необходимость в обработке списков событий отпадает.

Применение пособытийного метода предпочтительно в случае, если частота наступления событий невелика, тогда большая длина шага позволяет ускорить ход модельного времени, а обработка короткого календаря событий не занимает много машинного времени.

В пособытийных методах системное время каждый раз изменяется на максимально возможную величину, равную интервалу времени до наступления очередного события.

В этом случае события обрабатываются в порядке их наступления, а одновременно наступившими являются только те из них, которые являются одновременными в действительности.

Метод моделирования по особым состояниям сложен в реализации, так как для него требуется разработка специальной процедуры планирования событий (так называемого календаря событий). Обобщенная схема алгоритма пособытийного моделирования представлена на рис.14, где $t_{\text{события}}$ обозначен прогнозируемый момент наступления будущего события.

Таким образом, при использовании пособытийного метода длина шага выбирается оптимальной, но затраты времени увеличиваются за счет обработки списков событий.

Метод постоянного шага предпочтительнее, если:

- события появляются регулярно, их распределение во времени достаточно равномерно;
- число событий велико и моменты их появления близки;
- невозможно заранее определить моменты появления событий.

Методы пособытийного моделирования целесообразно использовать, если:

- события распределяются во времени неравномерно или интервалы между ними велики;
- предъявляются повышенные требования к точности определения взаимного расположения событий во времени.

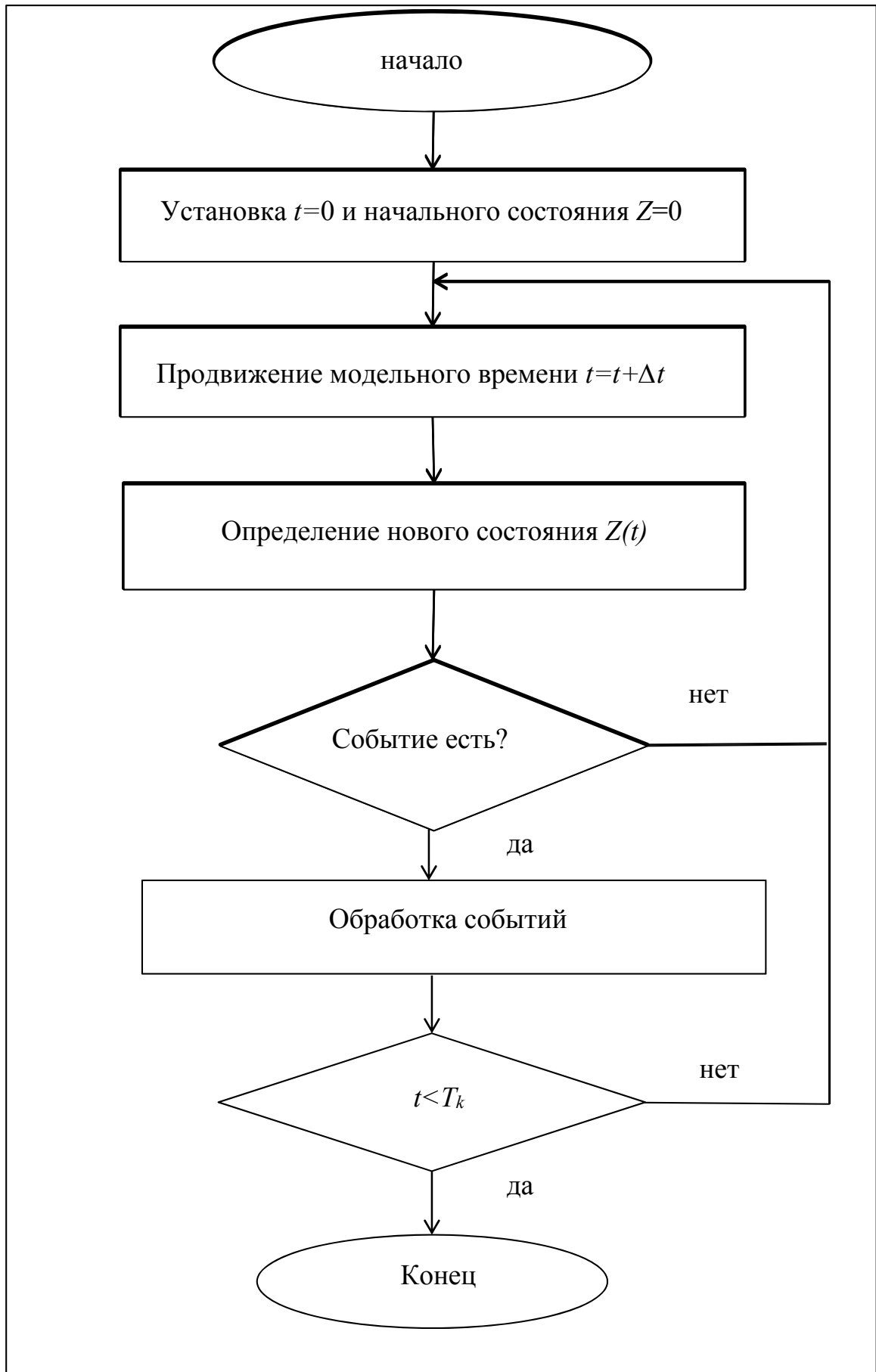


Рисунок 13. – Алгоритм моделирования с постоянным шагом



Рисунок 14. – Алгоритм пособытийного метода

В остальных случаях применяется событийный метод, например, когда события распределены неравномерно на временной оси и появляются через значительные временные интервалы.

Событийный метод (принцип «особых состояний»). В нем координаты времени меняются тогда, когда изменяется состояние системы. В событийных методах длина шага временного сдвига максимально возможная. Модельное время с текущего момента изменяется до ближайшего момента наступления следующего события. Применение событийного метода предпочтительнее в том случае, если частота наступления событий невелика. Тогда большая длина шага позволит ускорить ход модельного времени. На практике событийный метод получил наибольшее распространение.

Таким образом, вследствие последовательного характера обработки информации в ЭВМ, параллельные процессы, происходящие в модели, преобразуются с помощью рассмотренного механизма в последовательные. Такой способ представления носит название квазипараллельного процесса.

Простейшая классификация на основные виды имитационных моделей связана с применением двух этих способов продвижения модельного времени.

Различают имитационные модели:

- непрерывные;
- дискретные;
- непрерывно-дискретные.

В непрерывных имитационных моделях переменные изменяются непрерывно, состояние моделируемой системы меняется как непрерывная функция времени, и, как правило, это изменение описывается системами дифференциальных уравнений. Соответственно продвижение модельного времени зависит от численных методов решения дифференциальных уравнений.

В дискретных имитационных моделях переменные изменяются дискретно в определенные моменты имитационного времени (наступления событий). Динамика дискретных моделей представляет собой процесс перехода от

момента наступления очередного события к моменту наступления следующего события.

Поскольку в реальных системах непрерывные и дискретные процессы часто невозможно разделить, были разработаны непрерывно-дискретные модели, в которых совмещаются механизмы продвижения времени, характерные для этих двух процессов.

Имитационный характер исследования предполагает наличие логических или логико-математических моделей, описываемых изучаемый процесс (систему).

Логико-математическая модель сложной системы может быть как алгоритмической, так и неалгоритмической.

Чтобы быть машинно-реализуемой, на основе логико-математической модели сложной системы строится моделирующий алгоритм, который описывает структуру и логику взаимодействия элементов в системе.

Имитационная модель – это программная реализация моделирующего алгоритма. Она составляется с применением средств автоматизации моделирования. Подробнее технология имитационного моделирования, инструментальные средства моделирования, языки и системы моделирования, с помощью которых реализуются имитационные модели, будут рассмотрены ниже.

В общем виде технологическая схема имитационного моделирования представлена на рисунке 15:



Рисунок 15. - Технологическая схема имитационного моделирования

1. Реальная система;
2. построение логико-математической модели;
3. разработка моделирующего алгоритма;

4. построение имитационной (машинной) модели;
5. планирование и проведение имитационных экспериментов;
6. обработка и анализ результатов;
7. выводы о поведении реальной системы (принятие решений).

Метод имитационного моделирования позволяет решать задачи высокой сложности, обеспечивает имитацию сложных и многообразных процессов, с большим количеством элементов. Отдельные функциональные зависимости в таких моделях могут описываться громоздкими математическими соотношениями. Поэтому имитационное моделирование эффективно используется в задачах исследования систем со сложной структурой с целью решения конкретных проблем.

Имитационная модель содержит элементы непрерывного и дискретного действия, поэтому применяется для исследования динамических систем, когда требуется анализ узких мест, исследование динамики функционирования, когда желательно наблюдать на имитационной модели ход процесса в течение определенного времени.

Имитационное моделирование – эффективный аппарат исследования стохастических систем, когда исследуемая система может быть подвержена влиянию многочисленных случайных факторов сложной природы. Имеется возможность проводить исследование в условиях неопределенности, при неполных и неточных данных.

Имитационное моделирование является важным фактором в системах поддержки принятия решений, т.к. позволяет исследовать большое число альтернатив (вариантов решений), проигрывать различные сценарии при любых входных данных. Главное преимущество имитационного моделирования состоит в том, что исследователь для проверки новых стратегий и принятия решений, при изучении возможных ситуаций, всегда может получить ответ на вопрос «Что будет, если? ...». Имитационная модель позволяет прогнозировать, когда речь идет о проектируемой системе или

исследуются процессы развития (т.е. в тех случаях, когда реальной системы еще не существует).

В имитационной модели может быть обеспечен различный, в том числе и высокий, уровень детализации моделируемых процессов. При этом модель создается поэтапно, эволюционно.*

4.2. Имитационное моделирование в системах массового обслуживания

Пример.

Таблица 20. - План приема пациентов врачом

Пациент	Время, назначенное пациентам 16 июня	Предполагаемое время обслуживания, мин.
A.	9-30	15
B.	9-45	20
C.	10-15	15
D.	10-30	10
E.	10-45	30
F.	11-15	15
G.	11-30	15
H.	11-45	15

Из прошлого опыта известно:

Таблица 21. - Данные наблюдений

Приход	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
На 20 мин. раньше	0,20	0,20	00-19
На 10 мин. раньше	0,10	0,30	20-29
Вовремя	0,40	0,70	30-69
На 10 мин. позже	0,25	0,95	70-94
На 20 мин. позже	0,05	1,00	95-99

* - По материалам сайта www.center-yf.ru

Таблица 22. – Данные наблюдений

Обслуживание	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
На 20 % времени меньше	0,15	0,15	00-14
По плану	0,50	0,65	15-64
На 20 % времени больше	0,25	0,90	65-89
На 40 % времени больше	0,10	1,00	90-99

Определим, когда 16 июня врач закончит прием пациентов.

Предполагается, что пациенты обслуживаются в порядке записи. По случайным числам 2-го и 4-го столбцов определяем приход пациентов и время обслуживания соответственно.

Таблица 23. Моделирование реального времени приема пациентов

Пациент	Приход		Обслуживание			
	Случайное число	Время	Случайное число	Время	Начало	Окончание
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
A.9-30	52	9-30	06	12	9-30	9-42
B.9-45	50	9-45	88	24	9-45	10-09
C.10-15	53	10-15	30	15	10-15	10-30
D.10-30	10	10-10	47	10	10-30	10-40
E.10-45	99	11-05	37	30	11-05	11-35
F.11-15	66	11-15	91	21	11-35	11-56
G.11-30	35	11-30	32	15	11-56	12-11
H.11-45	00	11-25	84	18	12-11	12-29

4.3. Имитационное моделирование в теории управления запасами

Пример. Смоделируем движение некоторого товара в магазине в период летних отпусков. Товар - очки поляризационные женские "Cafa France" с темными линзами. Начальный запас в магазине 8 единиц, стоимость подачи заказов $C_0=30$ руб./заказ, стоимость хранения $C_h = 5$ руб./ед. в день, одна упущенная продажа $C_b=100$ руб. При наличии в

магазине не более 5 единиц подается заказ на склад на 6 единиц.

Все заказы подаются и выполняются в начале рабочего дня.

Таблица 24. - Данные наблюдений

Спрос в день	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
0	30	0,15	0,15	00-14
1	20	0,10	0,25	15-24
2	50	0,25	0,50	25-49
3	15	0,075	0,575	50-574
4	40	0,20	0,775	575-774
5	45	0,225	1,00	775-999
Сумма	200	1		

Таблица 25. - Данные наблюдений

Время выполнения заказа, дни	Частота	Вероятность	Кумулятивная вероятность	Случайные числа
1	100	0,5	0,5	1-4
2	70	0,35	0,85	5-84
3	30	0,15	1,00	85-99
Сумма	200	1		

Оценим общие издержки за день. Смоделируем работу магазина по продаже очков за 10 дней.

Начальный запас товара – 8 единиц. Случайное число для спроса в первый день – 903, что соответствует согласно данным таблицы 24 - 5 единиц. Запас на конец первого дня $8 - 5 = 3$ единицы.

Таблица 26. – Моделирование запаса товара в магазине

День	Запас в начале дня	Случайное число	Спрос	Запас на конец дня	Повторный заказ да/нет	Случайное число	Время выполнения	Дефицит
1	8	903	5	3	да	3	1	
2	9	565	3	6				
3	6	321	3	3	да	78	2	
4	3	601	4	0	да	4	1	1
5	12	1	0	12				
6	12	810	5	7				
7	7	123	3	4	да	25	2	
8	4	56	3	1	да	56	2	
9	7	156	3	4	да	53	2	
10	4	35	2	2				
сумма				48	6			1

Так как по условию, запас на конец дня не более 5 единиц, подается заказ на склад на 6 единиц. Случайное число для времени выполнения заказа 3, тогда согласно таблице 25, заказ будет исполнен во второй день утром. И на начало второго дня в магазине будет $3+6=9$ единиц товара. Продолжаем заполнять таблицу аналогично до десятого дня.

Для расчета общих издержек необходимо вычислить следующие характеристики.

Среднее число заказов равно: общее число заказов / общее число дней.

$$6/10=0,6 \text{ (заказа / день).}$$

Средний запас равен: суммарный конечный запас / общее число дней.

$$48/10=4,8 \text{ (ед./день).}$$

Среднее число упущенных продаж равно: общее число упущенных продаж / общее число дней.

$$1/10=0,1 \text{ (продаж/день).}$$

Общие издержки: подача заказов + хранение + штраф за дефицит:

$U=C_0 \cdot \text{среднее число заказов} + C_h \cdot \text{средний запас} + C_v \cdot \text{среднее число упущенных продаж.}$

$$U=30 \cdot 0,6+5 \cdot 4,8+100 \cdot 0,1=52 \text{ (руб./ день).}$$

Задачи к главе 1

1.1. По данным таблицы вычислить цепные и базисные абсолютные приросты, темпы роста, темпы прироста, ускорение. Изобразить ряд динамики графически.

а)

Месяц	Объем продукции (тыс. руб.)
1	23,6
2	31,0
3	34,5
4	51,4
5	56,3
6	74,0

б)

Месяц	Сумма доходов (тыс. руб.)
1	44,7
2	42,6
3	46,9
4	51,1
5	53,2
6	55,9
7	59,8

1.2. По данным таблицы определить ежегодный абсолютный прирост, ежегодные и среднегодовые темпы роста и прироста числа радиоприемников. Найти абсолютное значение одного процента прироста за каждый год и в целом за пятилетие.

Годы	2003	2004	2005	2006	2007
Среднегодовой объем выпуска продукции (тыс. шт.)	41	52,0	61,8	72,8	86,0

1.3. Найти коэффициенты опережения. Сделать вывод.

а)

год	стоимость основных фондов	прибыль
2002	3,9	221
2003	4,1	606
2004	4,3	779
2005	4,9	789
2006	5,9	1001
2007	5,9	1070

б)

год	количество телефонных аппаратов (тыс. шт.)	количество междугородних разговоров (млн.)
2000	1663	135
2001	1770	143
2002	1896	152
2003	2032	163
2004	2132	172
2005	2281	185

1.4. Найти средний уровень интервального ряда:

а)

год	2003	2004	2005	2006	2007
число квартир, построенных предприятиями	1190	1151	682	697	706

месяц	январь	февраль	март	апрель	май	июнь
Фонд заработной платы, ден.ед.	1520	1590	1650	1710	1780	1890

б)

1.5. а) По данным о числе работников на первое число месяца найти среднее число работников за каждый квартал и за год. К какому виду относится этот ряд динамики?

месяцы	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь	январь
списочное	78	80	80	76	76	78	81	81	85	85	87	87	84

количество работников														
--------------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

б) Определить вид ряда динамики и его средний показатель:

Год	1.01.2002	1.01.2003	1.01.2004	1.01.2005	1.01.2006	1.01.2007
Число вкладов населения в учреждениях банка (на конец года, млн. руб.)	124,9	141,0	203,7	210,9	234,2	226,0

1.6. Определить среднегодовую стоимость основных средств предприятия, в котором на 1 января отчетного года стоимость основных средств предприятия составляла 63 млн. руб. В апреле были приобретены основные средства на сумму 4 млн. руб., в июне выбыло основных средств на 9 млн. руб., а в октябре приобретено еще основных средств на 6 млн. руб.

1.7. Найти средний абсолютный прирост динамического ряда. Проверить с помощью цепных абсолютных приростов, можно ли использовать средний абсолютный прирост для нахождения прогнозного значения данного ряда на 1 июля.

дата	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05	1.06
численность работников, чел.	35	38	40	43	47	50

1.8. По данным таблицы найти средние темпы роста и прироста динамического ряда.

а)

год	2002	2003	2004	2005	2006
динамика производства тканей (млн.м ²)	95,2	100,0	104,0	110,0	115,0

Проверить с помощью цепных темпов роста, можно ли использовать средний темп роста для нахождения прогнозного значения данного ряда на 2007 год.

б)

год	1999	2000	2001	2002	2003
динамика выпуска продукции	21,2	22,4	23,7	24,9	26,3

Проверить с помощью цепных темпов роста, можно ли использовать средний темп роста для нахождения прогнозного значения данного ряда на 2003 год.

Задачи к главе 2

2.1. Изобразить графически динамический ряд. По виду кривой сделать предположение, какая функция описывает данную зависимость.

год	1998	1999	2000	2002	2003	2004
урожайность зерновых (ц с1 га)	38,0	42,9	39,0	40,8	43,6	44,1

2.2. По данным таблицы показать общую тенденцию в динамике междугородного телефонного обмена путем исчисления скользящей средней. Изобразить графически исходные и выровненные ряды.

Месяцы	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
Среднесуточное количество телефонных разговоров	454	438	472	462	437	451	503	459	511	595	553	612

2.3. Проверить наличие трендовой зависимости:

Показатели	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Продукция фирмы, тыс. руб.	18	21	26	22	25	28

- а) методом разности средних;
- б) методом Фостера-Стьюарта.

С какой вероятностью при проверке методом Фостера-Стьюарта можно утверждать, что тренд существует?

2.4. Выровнять тренд по трехдневной и пятидневной скользящей средней

год	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Объем продаж	170	120	105	156	189	107	167	205	178	156	189	235	203	267	239		
Объем продаж	3,8	4,7	3,9	2,7	2,9	2,3	3,0	3,6	2,9	3,7	4,5	4,2					
Кол-во пациентов	35	29	40	30	52	22	19	30	47	28	22	16	51	40	35	57	28
финансирование	4,3	3,2	5,7	7,0	9,2	6,7	7,5	8,9	10,5	12,6	15,0	12,5	14,6				

По графику сделать прогноз на 2009 год.

2.5. Фирма занимается поставками грузов на короткие расстояния внутри города. Перед менеджером стоит задача: оценить стоимость таких услуг, зависящую от затрачиваемого на поставку времени. В качестве наиболее важного фактора, влияющего на время поставки, менеджер выбрал пройденное расстояние.

Время, мин	16	13	19	18	12	11	8	14	9	16
расстояние	3,5	2,4	4,9	4,2	3,0	1,3	1,0	3,0	1,5	4,1

Построить график. Определить характер зависимости между расстоянием и временем. Определить коэффициенты линейного тренда $y = a_0 + a_1 t$ и сделать прогноз поездки на 2 мин.

2.6. В результате исследования зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получили следующие данные:

t , лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S , тыс.руб.	120	140	230	370	445	670	655	770

Найти:

- 2) линейную зависимость стоимости ремонта от срока эксплуатации,
- 3) предполагаемую величину затрат на ремонт на 10-й год эксплуатации.

2.7. Построить график. Определить характер зависимости. Определить коэффициенты тренда.

Неделя	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Средняя сумма начислений з/пл, тыс. руб.	40	35	20	25	45	60	75	40	20	50
Потери производственного времени, %	8	6	10	11	5	4	4	6	12	8

2.8. Определить коэффициенты тренда $y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	14	15	17	20	24	30	48	49	59	67

Спрогнозировать значение y при $t=11$.

2.9. Определить коэффициенты тренда $y = a_0 + a_1t + a_2t^2$

$t, \text{годы}$	2002	2003	2004	2005	2006	2007
$y, \text{готовая продукция}$	18	21	26	22	25	28

Спрогнозировать значение y в 2009 году.

2.10. Имеются данные о строительстве жилья за некоторый период времени:

$t, \text{год}$	1	2	3	4	5
$y, \text{кол-во жилья (млн. кв. м)}$	2,9	2,4	2,1	1,9	1,8

По этим данным получена зависимость $\bar{y}_t = 2,22 - 0,27t$.

Проверить:

- 1) на случайность остаточную компоненту данного тренда;
- 2) соответствие распределения остаточной компоненты нормальному закону распределения;
- 3) равенство нулю математического ожидания;
- 4) независимость значений ряда остатков.

2.11. Динамика производства готовой продукции отражена в таблице:

а)

$t, \text{годы}$	1	2	3	4	5	6	7
$y, \text{готовая продукция}$	18	21	26	22	25	28	30

По этим данным получено линейное уравнение регрессии:

$$\hat{y}_t = 1,75t + 17,3.$$

б)

$t, \text{годы}$	1	2	3	4	5	6	7
$y, \text{готовая продукция}$	13,7	12,1	14,0	13,2	15,6	15,4	14,0

$$\hat{y}_t = 0,3t + 12,7$$

Проверить данные модели на точность. Найти:

- 1) оценку стандартной ошибки (среднее квадратическое отклонение);
- 2) среднюю относительную ошибку аппроксимации;

- 3) коэффициент сходимости;
- 4) коэффициент детерминации;
- 5) коэффициент корреляции.

2.12. По данным задачи **2.11.** сделать точечный прогноз производства готовой продукции при $t=8$ и рассчитать доверительный интервал в точке прогноза с вероятностью 95%.

Задачи к главе 3

3.1. Станок может находиться в одном из четырех состояний:

- 1) исправен;
- 2) неисправен, осматривается;
- 3) ремонтируется;
- 4) списан.

Если станок исправен, то с вероятностью 0,9 на следующий день он будет работать или с вероятностью 0,1 может сломаться.

Если станок неисправен, то с вероятностью 0,9 ремонтируется или с вероятностью 0,1 списывается.

Если станок ремонтируется, то с вероятностью 0,7 он становится исправным, с вероятностью 0,2 продолжает ремонтироваться или с вероятностью 0,1 списывается.

Остальные переходы невозможны. Переход из одного состояния в другое происходит ровно за один день.

Известно, что станок был исправен в среду. Существует необходимость в эксплуатации станка в субботу. Найти вероятность того, что он будет исправна. В зависимости от результатов исследования решить вопрос о подготовке другого станка.

3.2. Через фиксированные промежутки времени проводится контроль технического состояния прибора, который может находиться в одном из трех состояний: S_1 – работает, S_2 – не работает и ожидает ремонта, S_3 – ремонтируется. Задана матрица вероятностей перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & p_{13} \\ 0,3 & p_{22} & 0,5 \\ 0,41 & 0,19 & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Найти неизвестные элементы матрицы P и составить граф состояний.

3.3. В некоторой местности весной сухая погода сменяется дождливой. Если идет дождь, то с вероятностью 0,6 он будет идти на следующий день и с вероятностью 0,4 будет сухая погода. Если погода сухая, то с вероятностью 0,7 она останется сухой на следующий день и с вероятностью 0,3 пойдет дождь. Начертить граф состояний, составить матрицу перехода. Вычислить вероятность того, что погода будет дождливая в ближайшую пятницу, если известно, что в среду она была дождливая.

3.4. Справочная автовокзала получает запросы, поступающие по пуассоновскому закону со скоростью 10 запросов в час. Время обслуживания запроса – 5 минут. Найти:

- 1) вероятность того, что в системе нет запросов;
- 2) среднее число запросов в очереди;
- 3) среднее время ожидания;
- 4) среднее время, которое запрос проводит в системе.

3.5. Компания по продаже книг различных издательств организовала прием заявок по двуканальному телефону. Если оба канала заняты, то клиент не может дозвониться. Каждый оператор принимает заявки со скоростью 12 звонков в час. Скорость поступления звонков – 20 в час. 1) Какой процент клиентов не дозвонится? 2) Сколько необходимо открыть дополнительных линий, чтобы не менее 90% клиентов дозвонились?

3.6. Магазин по продаже удобрений сельскохозяйственным предприятиям имеет два прилавка. Скорость прибытия покупателей – 14 человек в час; скорость

обслуживания – 10 человек в час для каждого прилавка.

Найти:

- 1) вероятность того, что в магазине нет покупателей;
- 2) среднее число покупателей в очереди;
- 3) среднее время ожидания обслуживания;
- 4) среднее время, которое покупатель проводит в магазине;
- 5) вероятность того, что прибывающему покупателю придется ждать обслуживания;
- 6) процент ожидающих.

3.7. Предприятие получает заказы, прибывающие по пуассоновскому закону со скоростью 6 заказов в день. Заказы обрабатываются одним работником. Интенсивность обслуживания – 8 заказов в день. Заказ, поступающий, когда работник занят, становится в очередь и ждет обслуживания.

Найти:

- 1) среднее число заказов в системе;
- 2) среднее время ожидания начала обработки заказа;
- 3) среднее время, которое заказ проводит в системе.

Задачи к главе 4

Начальный запас 11 единиц, стоимость подачи заказов $C_0=15$ рублей/заказ, стоимость хранения $C_h=70$ рублей. При наличии на складе не более 5 единиц подается заказ на 11 единиц. Считаем, что все заказы подаются и выполняются в начале рабочего дня.

Спрос в день	0	1	2	3	4	5
Частота	10	15	25	20	20	10

Время выполнения заказа, дни	1	2	3
Частота	5	30	15

Случайные числа для спроса	35	90	92	94	25	57	37	30	90	01
Случайные числа для времени выполнения заказа	7	0	7	9	6	5	1	6	4	5

Задачи к расчетно-графической работе

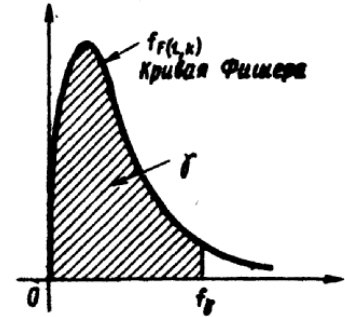
<u>№</u>	<i>t</i> , время	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	Выпуск продукции	37	42	33	45	58	55	56	70	69	74	71	86	70	92	68	93
2	Душево потребление масла за месяц, г	261	242	332	472	312	251	427	528	541	465	582	529	524	509	563	522
3	Кол-во пациентов	38	44	50	57	66	76	84	94	102	124	134	148	-	-	-	-
4	Финансирование	4,3	3,2	5,7	7,0	9,2	6,7	7,5	8,9	10,5	12,6	15,0	12,5	14,6	-	-	-
5	Душевое потребление сыра за январь <i>t</i> -го года	249	230	320	460	300	239	415	516	529	453	570	517	512	497	551	510
6	Объем производства изделий	48	54	60	67	76	86	94	104	112	134	144	158	170	181	192	204
7	Квартальный объем перевозок (ден. ед)	21	23	27	32	30	30	35	39	30	34	36	39	38	40	41	42
8	Урожайность зерновых (ц/га)	16	18	20	19	22	21	23	22	25	24	26	27	27	28	30	32
9	Объем перевозок в мес. (тыс.т)	34	39	30	33	53	50	52	66	65	67	70	82	66	80	64	83
10	Выпуск продукции	43	48	38	41	62	59	61	75	74	76	79	91	75	89	73	92
11	Прибыль	6	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	-	-	-	-
12	Прибыль	7	8	12	10	14	13	15	16	19	19	20	23	23	22	25	27
13	Прибыль	2	3	7	5	9	8	10	11	14	14	15	17	18	18	20	22
14	Прибыль	6	8	10	9	12	11	13	12	15	14	16	17	17	18	20	22
15	Прибыль	54	57	62	65	67	69	70	74	78	80	83	84	89	92	-	-
16	Прибыль	34	36	39	44	52	55	59	65	69	72	76	83	88	90	-	-
17	Прибыль	20	18	15	19	26	24	30	28	33	37	36	38	42	42	45	48
18	Прибыль	19	25	22	21	23	23	28	26	32	34	33	33	36	37	39	41
19	Прибыль	19	22	27	26	30	32	36	37	39	42	45	47	50	52	54	57
20	Прибыль	25	28	33	32	36	38	42	43	45	48	51	53	56	58	60	63

- 1) выровнять тренд по трехдневной скользящей средней;
- 2) изобразить исходный и выровненный ряды графически; определить характер зависимости;
- 3) проверить наличие трендовой зависимости с вероятностью 95%:
 - а) методом разности средних,
 - б) методом Фостера-Стьюарта;
- 4) найти коэффициенты тренда;
- 5) проверить модель на адекватность;
- 6) проверить точность модели;
- 7) спрогнозировать значение y при $t=17$.
- 8) рассчитать доверительный интервал в точке прогноза.

Библиографический список

1. *Елисеева, И.И.; Юзбашев, М.М.* Общая теория статистики: учебник / Под ред. чл. корр. РАН И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 480 с: ил.
2. Имитационное моделирование URL: [http:// www.center-uf.ru](http://www.center-uf.ru) (дата обращения: 2.05.2014 г.).
3. *Калинина, В.Н.; Панкин, В.Ф.* Математическая статистика / В.Н. Калинина, В.Ф. Панкин. - М.: Дрофа, 2002. - 246 с.
4. *Красс, М.С.; Чупрынов, Б.П.* Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - СПб.: Питер, 2004. – 464 с.: ил.
5. *Мамадалиева, Л.Н.* Ряды динамики: учеб. - методич. пособие / Л.Н. Мамадалиева. – Майкоп: Магарин О.Г., 2011. – 41 с.
6. *Просветов, Г.И.* Математические методы и модели в экономике: задачи и решения: учеб.- практич. пособие. / Г.И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2008. – 344 с.
7. *Разговоров, А.В.* Сборник задач и упражнений по статистике связи / А.В. Разговоров. - М.: Государственное издательство литературы по вопросам связи и радио, 1963. – 160 с.

Распределение Фишера (F-критерий)



k	l									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	238,90	243,90	249,00	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,33	3,51	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

Распределение Стьюдента (*t*-распределение)

ν	Вероятность $\alpha = S_t(t) = P(T > t_{табл})$												
	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,61
2	0,142	0,287	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,043	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	1,860	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,327	0,541	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,583
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,976	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,833
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850

Приложение 3

Таблица критических уровней RS-критерия

Количество наблюдений	Граница RS-критерия	
	нижняя	верхняя
10	2,67	3,69
15	2,96	4,14
20	3,18	4,49
25	3,34	4,71
30	3,47	4,89
...

Приложение 4

Критические значения статистики Дарбина-Уотсона при 5%-ном уровне значимости

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
d_n	1,08	1,10	1,13	1,16	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39	1,40
d_c	1,36	1,37	1,38	1,39	1,40	1,41	1,42	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47	1,48	1,48	1,49	1,50	1,50	1,51	1,51	1,52

Приложение 5

Критические значения коэффициента циклической автокорреляции

f	Положительные значения		Отрицательные значения	
	5%	1%	5%	1%
5	0,253	0,297	-0,753	-0,798
6	0,345	0,441	-0,708	-0,863
7	0,370	0,510	-0,674	-0,799
8	0,371	0,531	-0,625	-0,764
9	0,366	0,533	-0,593	-0,737
10	0,360	0,525	-0,564	-0,705
11	0,353	0,515	-0,539	-0,679
12	0,348	0,505	-0,516	-0,655
13	0,341	0,495	-0,497	-0,634
14	0,335	0,485	-0,479	-0,615
15	0,328	0,475	-0,462	-0,597
20	0,299	0,432	-0,399	-0,524
25	0,276	0,398	-0,356	-0,473
30	0,257	0,370	-0,325	-0,433
35	0,242	0,347	-0,300	-0,401
40	0,229	0,326	-0,279	-0,376
45	0,218	0,314	-0,262	-0,356
50	0,208	0,301	-0,248	-0,339
55	0,199	0,289	-0,236	-0,324
60	0,191	0,278	-0,225	-0,310
65	0,184	0,268	-0,216	-0,298
70	0,178	0,259	-0,207	-0,287
75	0,173	0,250	-0,199	-0,276

**Таблица значений \bar{W} , σ_1 и σ_2
для метода Фостера-Стьюарта**

n	\bar{W}	σ_1	σ_2
10	3,86	1,29	1,96
15	3,64	1,52	2,15
20	5,19	1,68	2,28
25	5,63	1,79	2,37
30	5,99	1,88	2,45
35	6,29	1,96	2,51
40	6,56	2,02	2,56
45	6,79	2,07	2,61
50	7,00	2,12	2,64
55	7,19	2,16	2,68

Беданокон Мурат Капланович
Мамадалиева Людмила Николаевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ИМИТАЦИОННОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ БАКАЛАВРОВ
230700.62 ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА

Подписано в печать 22.06.2014. Формат бумаги 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура Таймс. Усл. п.л. 6,1. Тираж 100. Заказ 065.

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
ИП Кучеренко В.О. 385008, г. Майкоп, ул. Пионерская, 411/76.
Тел. для справок 8-928-470-36-87. E-mail: slv01.maykop.ru@gmail.com