С.К.Куижева, Л.Ж.Паланджянц, О.П.Шевякова

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Ижевск
2014

УДК 519.2(07)
ББК 22.17
К 89

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Майкопский государственный технологический университет»
Кафедра высшей математики и системного анализа

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры
высшей математики и системного анализа

Рецензенты:
док. эконом. наук, профессор Беданоков М.К.,
канд. физ.-мат. наук, доцент Токова А.А.

Куижева С.К., Паланджянц Л.Ж., Шевякова О.П. Практикум по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие. – Ижевск: ИП Пермяков С.А., 2014. – 134 с.

В пособии приведены необходимые теоретические сведения и формулы, даны образцы решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения, две контрольные работы (в 10 вариантах).

Учебное пособие предназначено для студентов экономических направлений вузов и колледжей очной и заочной форм обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данное учебное пособие предназначено для бакалавров экономических направлений, изучающих дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика».

Пособие состоит из трех глав. В первой главе рассмотрены события и способы нахождения их вероятностей. Вторая глава содержит следующий материал: случайные величины, их распределения и числовые характеристики; некоторые законы распределения случайных величин; системы двух случайных величин. В третьей главе излагаются некоторые вопросы математической статистики: статистическое распределение выборки, точечные и интервальные оценки параметров распределения; проверка статистических гипотез.

В начале каждого пункта главы приводятся теоретические сведения: определения основных понятий, формулировки теорем, соответствующие формулы. Затем даются решения типовых задач. Часть заданий предназначена для самостоятельного решения. Ответы для самопроверки приведены в конце пособия.

Учебное пособие также снабжено приложением, содержащем таблицы для проведения расчетов. В заключительной части имеется список литературы, которая может быть использована для более глубого изучения курса «Теории вероятностей и математической статистики». Разработанные варианты контрольных работ помогут проверить полученные теоретические и практические знания.

Пособие может быть использовано студентами для самостоятельного изучения соответствующего материала и выполнения контрольных работ. Оно может быть полезно также преподавателям при планировании и проведении практических занятий и проверочных работ.

Глава 1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

1.1. Классическое и статистическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики

Теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Под *событием* понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти.

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлен комплекс условий.

Невозможным называют событие, которое не может произойти, если будет осуществлен комплекс условий.

Случайным называют событие, которое при осуществлении комплекса условий может либо произойти, либо не произойти.

События будем обозначать буквами: A, B, C, ... При этом достоверное событие обозначают буквой U, а невозможное – V.

События называются *равновозможными,* если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Случайные события называются *несовместными,* если ни какие два из них не могут произойти в данном опыте одновременно.

Несколько событий образуют *полную группу событий,* если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Если события, образующие полную группу, несовместны, то появление в результате опыта одного из них является достоверным событием.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются *противоположными.* Они обозначаются A и $\overline{A}$.

По классическому определению, *вероятностью события* A называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов:

$$P(A) = m/n.$$

Комбинаторика – это раздел математики, в котором решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их распределения.

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначается P_n и вычисляется по формуле

$$P_n = n!,$$

где $n!$ – *n-факториал,* $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. По определению полагают $0! = 1$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов обозначается A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов.

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов обозначается C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)\,!}.$$

По определению полагают $C_n^0 = 1$.

Для сочетаний справедливы равенства:

$$C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1};$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Последнее равенство иногда формулируется в виде следующей **теоремы о конечных множествах**: *число всех подмножеств множества, состоящего из n элементов, равно 2^n.*

Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам.

Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного вида, n_2 элементов другого вида и т. д., то число перестановок с повторениями определяется формулой

$$P_n(n_1,\, n_2,\, \ldots\, , n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, \cdots\, n_k!},$$

где $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Число размещений с повторениями из n элементов по m элементов равно n^m, то есть $(A_n^m)_{\text{с повт.}} = n^m$.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов равно числу сочетаний без повторений из $n + m - 1$ элементов по m элементов, то есть $(C_n^m)_{\text{с повт.}} = C_{n+m-1}^m$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила.

Правило суммы. *Если некоторый объект A может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m+n$ способами.*

Правило произведения. *Если объект A можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана mn способами.*

Относительной частотой события называют отношение числа m испытаний, в которых событие появилось, к общему числу n фактически проведенных испытаний, то есть $W(A) = m/n$.

При статистическом определении в качестве вероятности события принимают его относительную частоту.

Образцы решения задач

Задача 1. В ящике 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

Решение. Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев, благоприятствующих событию A, равно числу всех возможных случаев, то есть $m = n = 10$, и $P(A) = m/n = 1$. В этом случае событие A достоверно.

Задача 2. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

Решение. Здесь $m = 4$ – количество черных шаров в урне, $n = 12$ – количество всех шаров, тогда $P(A) = 4/12 = 1/3$.

Задача 3. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара – белые?

Решение. Число всех исходов $n = C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!8!} = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$. Число же исходов, благоприятствующих событию A, определяется равенством $m = C_6^2$, то есть $m = \dfrac{6!}{2!4!} = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Итак, $P(A) = 15/45 = 1/3$.

Задача 4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что кубик, извлеченный наудачу, будет иметь две окрашенные грани.

Решение. Всего кубиков $n = 1000$. Куб имеет 12 ребер. Каждая грань должна быть разбита на 100 квадратов, каждое ребро на 10 частей, восьми из которых соответствуют кубики с двумя окрашенными гранями. Поэтому $m = 12 \cdot 8 = 96$, $P = m/n = 96/1000 = 0,096$.

Задача 5. Наудачу указывается месяц и число некоторого не високосного года. Какова вероятность того, что это будет воскресенье, если всего в этом году 53 воскресенья, а соответствие чисел дням недели неизвестно?

Решение. Имеем $n = 365$ – всего дней в году, $m = 53$ – благоприятных исходов, тогда $P(A) = m/n = 53/365$.

Задача 6. При записи членов некоторого собрания, общее число которых равно 360, оказалось, что начальной буквой фамилии у семи человек была «А», у пяти – «Е», у восьми – «И», у девяти – «О», у четырех – «У», у двух – «Ю», у всех прочих фамилия начиналась с согласной буквы. Найти вероятность того, что фамилия члена данного собрания начинается с согласной.

Решение. Имеем $m = 360-(7+5+8+9+4+2) = 360-35 = 325$, $n = 360$, тогда $P(A) = m/n = 325/360 = 65/72$.

Задача 7. Из слова «НАУГАД» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что эта буква «Я»? Какова вероятность того, что это гласная?

Решение. В первом случае $P = 0$, так как буквы «Я» в слове нет. Во втором: $m = 3$ – число гласных, $n = 6$ – всего букв, тогда $P = 3/6 = 1/2$.

Задача 8. При наборе телефонного номера абонент забыл две последние цифры и набрал их наудачу, помня только, что эти цифры нечетные и разные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

Решение. По условию задачи: $m = 1$ – единственная пара чисел, благоприятствующая событию.

Так как нечетных чисел 5, то два числа в определенном порядке берется из них A_5^2 раз (число размещений из 5 элементов по 2): $n = A_5^2 = \dfrac{5\,!}{(5-2)\,!} = 20$. Тогда $P = 1/20$.

Задача 9. Каждая из букв «А», «У», «К», «С», «З» написана на одной из пяти карточек. Карточки раскладываются в произвольном порядке. Найти вероятность того, что при этом образуется слово «КАЗУС».

Решение. Имеем $m = 1$ – единственная комбинация букв, благоприятствующая событию, $n = P_5 = 5!$ – число перестановок из 5 букв, тогда $P(A) = m/n = 1/5! = 1/120$.

Задача 10. Телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

Решение. Найдем $n = 10^5$ – всего номеров (номера 00000 и 99999 считаем возможными), $m = A_{10}^5$ – номеров с различными цифрами, тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{10!}{5!10^5} = 0,3024.$$

Задача 11. В конкурсе по 5 номинациям участвуют 10 кинофильмов. Сколько существует вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы?

Решение. а) Каждый из вариантов распределения призов представляет собой комбинацию 5 фильмов из 10, отличающуюся от других комбинаций, как составом фильмов, так и их порядком по номинациям (или и тем, и другим), причем одни и те же фильмы могут повторяться несколько раз, так как любой фильм может получить призы как по одной, так и по нескольким (включая все пять) номинациям: $(A_{10}^5)_{\text{с повт.}} = 10^5 = 100000$.

б) Если по каждой номинации установлены одинаковые призы, то порядок следования фильмов в комбинации 5 призеров значения не имеет, то есть

$$(C_{10}^5)_{\text{с повт.}} = C_{10+5-1}^5 = C_{14}^5 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2002.$$

Задача 12. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5 и 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

Решение. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр (причем $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, а их сумма равна 7), то есть их число равно $P_7(3,\ 2,\ 2) = \dfrac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$.

Задача 13. При стрельбе была получена частота попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

Решение. Частота 0,6 говорит о том, что на 10 выстрелов приходится 6 попаданий, а значит, 4 промаха. Чтобы получить 12 промахов при данной частоте попаданий, необходимо сделать 30 выстрелов.

Задача 14. В партии из n изделий k бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки m изделий равно l окажутся бракованными.

Решение. Число возможных способов взять m изделий из n равно C_n^m. Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа k бракованных изделий взято l (C_k^l способов), а остальные $(m-l)$ изделий небракованные, число которых $(n-k)$ (C_{n-k}^{m-l} способов). Число благоприятствующих случаев $m = C_k^l C_{n-k}^{m-l}$, тогда $P = C_k^l C_{n-k}^{m-l} / C_n^m$.

Задачи для решения

1. Наудачу выбрана кость домино из полного набора. Какова вероятность того, что сумма очков на выбранной кости равна пяти?

2. В ящике 10 одинаковых деталей, помеченных номерами от 1 до 10. Наудачу извлечены 6 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся: а) деталь №1; б) детали № 1 и № 2.

3. Из пяти карточек с буквами «А», «Б», «В», «Г», «Д» наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово «ДВА»?

4. В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов, на которых написаны различные числа. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, чтобы цифры на них составляли определенное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

5. На шести карточках написаны буквы «В», «Д», «З», «О», «У», «Х». Карточки перемешаны. Вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в порядке появления. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово «ВОЗДУХ».

6. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

7. В ящике лежат 15 красных, 9 синих и 6 зеленых неразличимых одинаковых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что выбрали 1 зеленый, 2 синих и 3 красных шара?

8. Какова вероятность угадывания (выигрыша) k видов спорта в игре «Спортлото 5 из 36»?

9. По цели произведено 20 выстрелов, причем зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.

10. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

11. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) три; б) одну; в) ни одной.

12. Сколько шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

13. Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 разных сорта пирожных?

14. Пять фирм F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 предлагают свои условия по выполнению трех различных контрактов C_1, C_2 и C_3. Любая фирма может получить только один контракт. Контракты различны, то есть, если контракт C_1 получит фирма F_1, то это не то же самое, если фирма F_1получит контракт C_2. а) Сколько способов получения контрактов имеют фирмы? б) Если предположить равновозможность заключения контрактов, чему равна вероятность того, что фирма F_3 получит контракт?

15*. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы[1].

16*. В конверте среди 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

17*. На пяти одинаковых карточках написаны буквы «Л», «М», «О», «О», «Т». Какова вероятность того, что, извлекая три карточки по одной наугад, получим в порядке их извлечения слово «ТОМ».

18*. Из букв алфавита «А», «Б», «К», «О», «М», написанных на отдельных карточках, поочередно случайно выбирается по одной. Буква запоминается, и карточка возвращается обратно, карточки тщательно перемешиваются. Определить вероятность того, что в порядке поступления букв получится слово «МАМА».

19*. В коробке 6 одинаковых занумерованных шаров. Наудачу по одному извлекаются все шары. Найти вероятность того, что номера извлеченных шаров появляются в возрастающем порядке.

20*. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают три карты. Найдите вероятность того, что среди них окажется два туза.

21*. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

22*. Какова вероятность угадывания (выигрыша) k видов спорта в игре «Спортлото 6 из 49»?

23*. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если было проверено 200 приборов.

24*. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры, и набрал их наудачу. Найти вероятность того, что были набраны нужные цифры.

25*. Участники жеребьевки тянут жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

26*. У человека в кармане n ключей, из которых только один подхо-

[1] Здесь и далее звездочкой отмечены задачи для самостоятельного решения.

дит к его двери. Ключи последовательно извлекаются (без возвращения) до тех пор, пока не появится нужный ключ. Найти вероятность, что нужный ключ появится при k-м извлечении.

27*. В чулане n пар ботинок. Из них случайно выбирается $2r$ ботинок ($2r < n$). Найти вероятность, что среди выбранных ботинок: а) нет парных; б) имеется ровно одна пара.

28*. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы.

29*. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что так или иначе все они экзамены сдали?

30*. Сколько чисел, меньших миллиона, можно записать с помощью цифр 8 и 9?

31*. Для доступа в компьютерную сеть оператору необходимо набрать пароль из 4 цифр. Оператор забыл или не знает необходимого кода. Сколько всевозможных комбинаций он может составить для набора пароля: а) если цифры в коде не повторяются; б) если повторяются; в) с какой вероятностью можно открыть замок с первой попытки?

1.2. Геометрическая вероятность

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов конечно. На практике встречаются опыты, для которых множество таких исходов. В таких случаях вводят понятие геометрической вероятности, то есть вероятности попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, часть тела и т.д.).

Пусть имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу из области G, попадет в область g. При этом выражению «точка, взятая наудачу из области G» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G. Вероятность попадания точки в какую-либо область G пропорциональна мере (mes) этой части (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$P = \frac{mes\, g}{mes\, G}.$$

Эта формула выражает *геометрическое определение вероятности.*

Образцы решения задач

Задача 1. На отрезке OA длины α числовой оси наудачу нанесена точка $B(x)$. Найти вероятность того, что отрезки OB и BA имеют длину, большую $\alpha/4$.

Решение. Разобьем отрезок OA на четыре равные части точками C, D, E (рис. 1). Требование задачи будет выполнено, если точка B попадет на отрезок CE, длина которого равна $\alpha/2$.

Следовательно, $P = (\alpha/2) : \alpha = 1/2$.

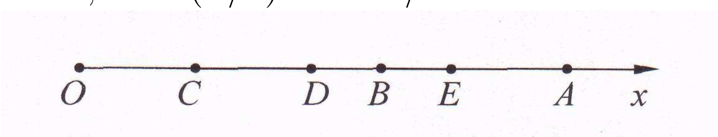

Рис. 1

Задача 2. Внутри эллипса $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16} = 1$ расположен круг $x^2+y^2 = 9$. Найти вероятность попадания точки в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом.

Решение. Пусть событие A – попадание точки в кольцо (рис. 2). Тогда $P(A) = \dfrac{S_{\text{кол.}}}{S_{\text{эл.}}}$, где $S_{\text{кол.}} = S_{\text{эл.}} - S_{\text{кр.}} = \pi ab - \pi r^2$. Так как $a = 5$, $b = 4$, $r = 3$, то $P(A) = \dfrac{20\pi - 9\pi}{20\pi} = \dfrac{11}{20} = 0,55$.

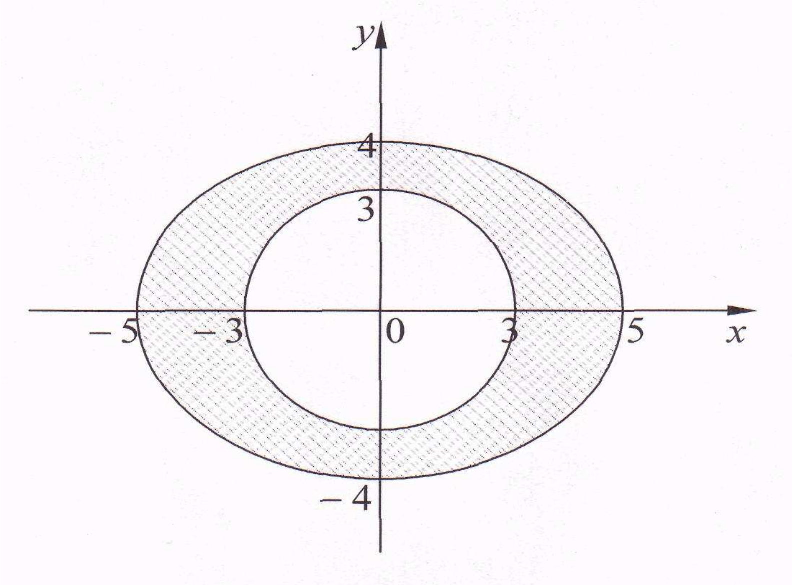

Рис. 2

Задача 3. Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше единицы, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше 2/9?

Решение. Пусть x и y – выбранные числа. Их возможные значения $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$, что на плоскости соответствует квадрату с площадью $S = 1$. Благоприятствующие значения удовлетворяют условиям: $x + y \le 1$ и $xy \le 2/9$. Граница $x + y = 1$ делит квадрат пополам, причем область $x + y \le 1$ представляет собой нижний треугольник (см. рис. 3).

Вторая граница $xy = 2/9$ является гиперболой. Абсциссы точек пересечения этих границ $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 2/3$. Величина благоприятствующей площади

$$S_{\text{бл.}} = \frac{1}{3} + \int\limits_{1/3}^{2/3} y\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\,\ln 2.$$

Искомая вероятность $P = S_{\text{бл.}}/S = 0,487$.

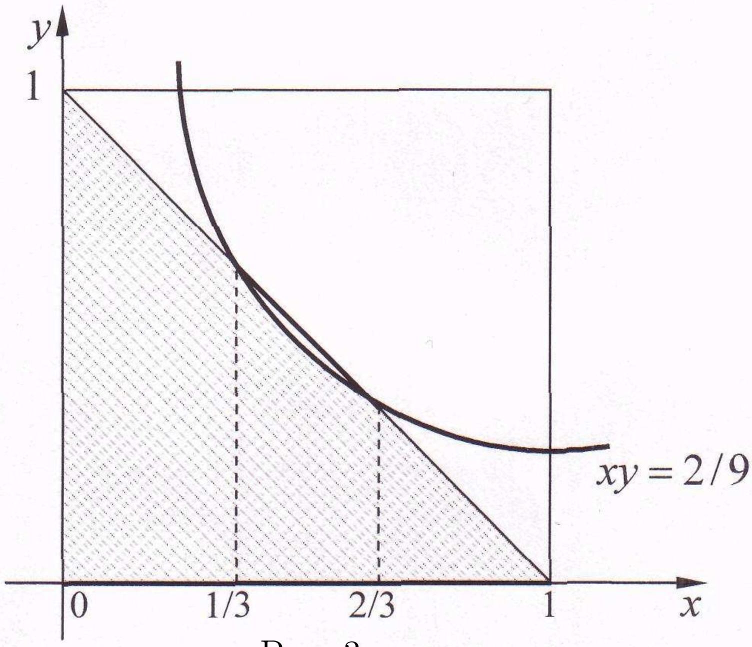

Рис. 3

Задача 4. (Задача о встрече). Два студента A и B условились встретится в определенном месте во время перерыва между 13 ч. и 13 ч. 50 мин. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин., после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 50 мин. может произойти наудачу, и моменты прихода независимы?

Решение. Обозначим момент прихода студента A через x, а студента B – через y. Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \leq 10$. Изобразим x и y как декартовы координаты на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем одну минуту (рис. 4).

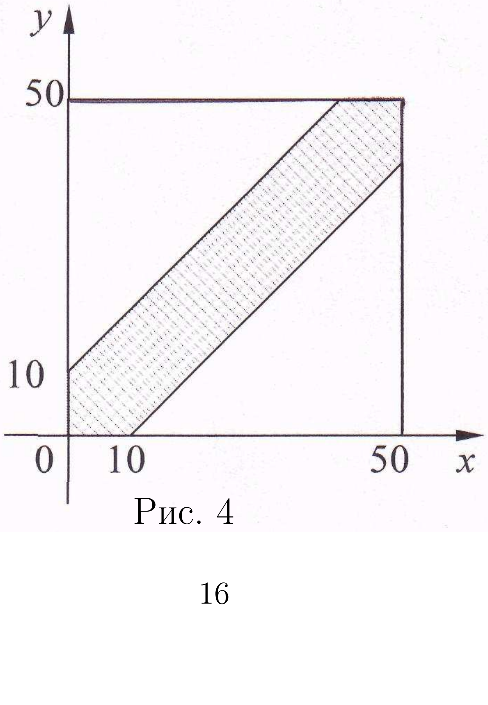

Рис. 4

Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной 50, а исходы, благоприятствующие встрече, – точками заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата:

$$P = \frac{50^2 - 40^2}{50^2} = 0,36.$$

Задачи для решения

1. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. (Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его расположения относительно круга).

2. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное x/y не больше двух.

3. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

4. К причалу для разгрузки между 10 и 14 часами независимо друг от друга в случайный момент времени подходят два танкера. Первый разгружается за 3 часа, а второй за 1 час. Найти вероятность того, что ни одному из танкеров не придется ждать освобождения причала другим.

5*. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероятность того, что точка брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. (Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга).

6*. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма $x + y$ не превышает единицы, а произведение xy не меньше 0,09.

7*. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок l длины 10 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. (Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения).

8*. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время подхода обоих пароходов равновозможно в течение суток. Найдите вероятность того, что одному из пароходов придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 1 час, а второго – 2 часа.

1.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A или B, будем называть *суммой событий* A и B и обозначать $A+B$.

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, будем называть *произведением* (*совмещением*) *событий* A и B и обозначать AB.

Операции сложения и умножения событий обладают следующими **свойствами.**

1. $A+B=B+A$ – коммутативность сложения.

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ – ассоциативность сложения.

3. $AB=BA$ – коммутативность умножения.

4. $A(BC)=(AB)C$ – ассоциативность умножения.

5. $A(B+C)=AB+AC$; $A+BC=(A+B)(A+C)$ – законы дистрибутивности.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

Следствие 1. *Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Следствие 2. *Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ... , A_n, образующих полную группу, равна единице:*

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Следствие 3. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A)+P(\overline{A})=1$.*

Замечание. *При решении задач на отыскание вероятности события A часто выгодно сначала вычислить вероятность события $\overline{A}$, а затем найти искомую вероятность по формуле*

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий. *Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.*

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Например, для трех совместных событий справедлива формула

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Условной вероятностью $P(B/A)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Событие B называют *независимым от события* A, если появление события A не изменяет вероятности события B, то есть условная вероятность B равна его безусловной вероятности:

$$P(B/A) = P(B).$$

Если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B. Это означает, что *свойство независимости событий взаимно.*

Теорема умножение вероятностей. *Вероятность появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \quad \textit{или} \quad P(AB) = P(B)P(A/B).$$

В частности, для независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

то есть *вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Следствие. *Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляют в предположении, что все предыдущие события уже наступили:*

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)\cdots P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

В частности, *вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(_1A_2\cdots A_n) = P(_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

Несколько событий называют *попарно независимыми*, если каждые два их них независимы.

Несколько событий называют *независимыми в совокупности*, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Теорема. *Вероятность наступления события A, состоящего в появлении хотя бы одного из событий A_1, A_2, ... , A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ... , $\overline{A}_n$:*

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n).$$

В частности, *если все n событий имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий $P(A) = 1 - q^n$, где $q = 1 - p$.*

Образцы решения задач

Задача 1. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар: белый или черный; синий или красный; белый, черный или синий.

Решение. Имеем $n = 10 + 15 + 20 + 25 = 70$, $P(\text{Б}) = 10/70 = 1/7$, $P(\text{Ч}) = 15/70 = 3/14$, $P(\text{С}) = 20/70 = 2/7$, $P(\text{К}) = 25/70 = 5/14$.

Применяя теорему сложения вероятностей для несовместных событий, получим

$$P(\text{Б+Ч}) = P(\text{Б}) + P(\text{Ч}) = 1/7 + 13/14 = 5/14,$$

$$P(\text{С+К}) = P(\text{С}) + P(\text{К}) = 2/7 + 5/14 = 9/14,$$

$$P(\text{Б+Ч+С}) = 1 - P(\text{К}) = 1 - 5/14 = 9/14.$$

Задача 2. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров, во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что: а) оба шара белые; б) один из выбранных шаров белый, а другой черный.

Решение. а) В данном случае речь идет о совмещении событий A и B, где событие A – появление белого шара из первого ящика; B – появление белого шара из второго ящика. При этом A и B независимые события. Найдем

$$P(A) = 2/12 = 1/6; \quad P(B) = 8/12 = 2/3.$$

Применив теорему умножения вероятностей, находим:

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9}.$$

б) Пусть C – интересующее нас событие, а A – появление из первого ящика белого шара, B – появление из второго ящика белого шара. Тогда $\overline{A}$ – появление из первого ящика черного шара, $\overline{B}$ – появление из второго ящика черного шара.

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика – черный:

$$P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = 1/6(1 - 2/3) = 1/18.$$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, черный, а из второго ящика – белый:

$$P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B) = (1 - 1/6)2/3 = 2/3 \cdot 5/6 = 5/9.$$

Применив теорему сложения вероятностей, получим

$$P(C) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 1/18 + 5/9 = 11/18.$$

Задача 3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Определим вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель; хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение. 1) Рассмотрим события: A – первый стрелок попал, B – второй стрелок попал, C – третий стрелок попал. Тогда

$$P(A) = 0,75; \quad P(B) = 0,8; \quad P(C) = 0,9.$$

Так как события независимы, то

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,75 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,54.$$

2) Вероятности промаха для 1-го, 2-го и 3-го стрелка равны соответственно $P(\overline{A}) = 1 - 0,75 = 0,25$; $P(\overline{B}) = 1 - 0,8 = 0,2$; $P(\overline{C}) = 1 - 0,9 = 0,1$.

Тогда $P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,005$ – вероятность одновременного промаха всех стрелков.

Событие D – хотя бы один стрелок попал, противоположно событию $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, значит,

$$P(D) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - 0,005 = 0,995.$$

Задача 4. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 7.

Решение. Введем обозначения для событий: A – наудачу взятое двузначное число кратно 2, B – наудачу взятое двузначное число кратно 7. Необходимо найти $P(A+B)$.

Двузначных чисел всего 90. Из этих чисел 45 чисел кратны 2 (являются четными), они благоприятствуют событию A. А 13 из этих чисел кратны 7. Причем 7 чисел кратны 2 и 7 одновременно (благоприятствуют событию AB). Так как события A и B совместны, то для вычисления искомой вероятности воспользуемся теоремой сложения вероятностей совместных событий. Имеем

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{45}{90} + \frac{13}{90} - \frac{7}{90} = \frac{17}{30}.$$

Задачи для решения

1. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8; а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок?

2. Монета брошена три раза. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно два раза.

3. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают три человека. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?

4. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос билета равна 0,9; на второй – 0,9; на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить: а) на все вопросы, б) хотя бы на два вопроса.

5. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что выбранные шары одного цвета.

6. Охотник выстрелил 3 раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8; а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: а) промахнется все три раза; б) попадет хотя бы 1 раз; в) попадет 2 раза.

7. По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца; 3 – из-за неисправности привода; 2 – из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановок по другим причинам.

8. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при залпе из двух орудий равна 0,92. Найти вероятность попадания в цель первым орудием, если вероятность попадания вторым орудием равна 0,8.

9*. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель 0,7; для второго – 0,8. Какова вероятность попадания в волка (хотя бы при одном выстреле)? Как изменится результат, если охотники сделают по два выстрела?

10*. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился герб», «появилось 6 очков».

11*. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

12*. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает 3 вопроса, заданные ему экзаменатором.

13*. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу две пуговицы. Какова вероятность того, что пуговицы будут одноцветными.

14*. Два стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Известно, что вероятность попадания в мишень для одного из стрелков равна 0,6; а для другого – 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадет в мишень, б) оба стрелка попадут в мишень, в) хотя бы один из стрелков попадет в мишень, г) ни один из стрелков не попадет в мишень, д) хотя бы один из стрелков не попадет в мишень.

15*. Причиной разрыва электрической цепи служит выход из строя элемента K_1, или одновременный выход из строя двух элементов – K_2 и K_3, работающие независимо друг от друга с вероятностями, равными соответственно 0,1; 0,2; 0,3. Какова вероятность разрыва электрической цепи?

16*. Производительности трех станков, обрабатывающих одинаковые детали, относятся как $1 : 3 : 6$. Из нерассортированной партии обработанных деталей взяли наудачу две. Какова вероятность того, что: а) одна из них обработана на 3-м станке; б) обе обработаны на одном станке?

17*. Экзаменационный билет для письменного экзамена состоит из 10 вопросов – по 2 вопроса из 20 по каждой из пяти тем, представленных в билете. По каждой теме студент подготовил лишь половину всех вопросов. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить хотя бы на один вопрос по каждой из пяти тем в билете?

1.4. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Теорема. *Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события A*:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n).$$

Эту формулу называют *формулой полной вероятности.*

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по *формулам Байеса*

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)}, \quad i = \overline{1, n};$$

где $P(A)$ вычисляется по формуле полной вероятности.

Образцы решения задач

Задача 1. Имеются четыре урны. В первой урне 1 белый и 1 черный шар, во второй – 2 белых и 3 черных шара, в третьей – 3 белых и 5 черных шаров, и в четвертой – 4 белых и 7 черных шаров. Событие H_i – выбор $i-$й урны ($i = 1, 2, 3, 4$). Известно, что вероятность выбора i -й урны равна $i/10$, то есть $P(H_1) = 1/10$; $P(H_2) = 1/5$; $P(H_3) = 3/10$; $P(H_4) = 2/5$. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Решение. Пусть A – взятый шар белый. Из условия следует, что $P(A/H_1) = 1/2$ – условная вероятность извлечения белого шара из первой урны; $P(A/H_2) = 2/5$; $P(A/H_3) = 3/8$; $P(A/H_4) = 4/11$. Вероятность извлечения белого шара находим по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} &P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + \\ &+P(H_4)P(A/H_4) = 1/10 \cdot 1/2 + 1/5 \cdot 2/5 + 3/10 \cdot 3/8 + 2/5 \cdot 4/11 = \\ &= 1707/4400. \end{aligned}$$

Задача 2. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором – 10 белых и 10 черных шаров, в третьем – 20 черных шаров. Из выбранного наудачу ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

Решение. События A – взятый наудачу шар белый. Выдвинем гипотезы: H_1 – шар из первого ящика, H_2 – шар из второго ящика, H_3 – шар из третьего ящика. Тогда $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$, так как ящики одинаковы.

$P(A/H_1) = 1$ – вероятность извлечения белого шара из первого ящика, $P(A/H_2) = 10/20 = 1/2$ – вероятность извлечения белого шара из второго ящика, $P(A/H_3) = 0$ – вероятность извлечения белого шара из третьего ящика.

Искомую вероятность $P(H_1/A)$ – вероятность того, что белый шар взят из первого ящика, находим по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1 \cdot 1/3}{1 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3} = \frac{2}{3}.$$

Задача 3. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой вынули наудачу один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар белый.

Решение. Событие A – взятый шар белый. Возможны гипотезы: H_1 – из второй урны в первую переложили белый шар, H_2 – из второй урны в первую переложили черный шар.

Тогда $P(H_1) = 3/10$; $P(H_2) = 7/10$; $P(A/H_1) = 6/16$ – вероятность того, что из первой урны взяли белый шар, предварительно переложив в нее из второй урны белый шар. Аналогично, $P(A/H_2) = 5/16$.

По формуле полной вероятности найдем

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + (H_2)(A/H_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{16} + \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{16} = \frac{53}{160}.$$

Задача 4. Экономист полагает, что в течение периода активного экономического роста американский доллар будет расти в цене с вероятностью 0,7; в период умеренного роста доллар подорожает с вероятностью 0,4; а при низких темпах экономического роста доллар подорожает с вероятностью 0,2. В течение любого периода времени вероятность активного экономического роста равна 0,3; в периоды умеренного экономического роста равна 0,5 и низкого роста – равна 0,2. Предположим, что доллар подорожает в течение текущего периода. Чему равна вероятность того, что анализируемый период совпал с периодом активного экономического роста?

Решение. Пусть событие A – «доллар дорожает». Выдвинем гипотезы: H_1 – «активный экономический рост»; H_2 – «умеренный экономический рост», H_3 – «низкий экономический рост».

Имеем $P(H_1) = 0,3$; $P(H_2) = 0,5$; $P(H_3) = 0,2$; $P(A/H_1) = 0,7$; $P(A/H_2) = 0,4$; $P(A/H_3) = 0,2$. Необходимо найти $P(H_1/A)$.

Используя формулу Байеса и подставляя значения вероятностей, имеем:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} =$$
$$= \frac{0,3 \cdot 0,7}{0,3 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2} = 0,467.$$

Задача 5. Телеграфное сообщение состоит из сигналов «точка» и «тире». Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем $2/5$ сообщений «точка» и $1/3$ сообщений «тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «точка» и «тире» встречаются в отношении $5:3$. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если: а) принят сигнал «точка»; б) принят сигнал «тире».

Решение. Пусть событие A – принят сигнал «точка», событие B – принят сигнал «тире». Возможны две гипотезы: H_1 – передан сигнал «точка», H_2 – передан сигнал «тире».

По условию $P(H_1) : P(H_2) = 5 : 3$, кроме того $P(H_1) + P(H_2) = 1$. Поэтому $P(H_1) = 5/8$; $P(H_2) = 3/8$.

Известно, что $P(A/H_1) = 1 - 2/5 = 3/5$ – вероятность того, что принят неискаженный сигнал «точка» при условии, что он же был и передан; $P(A/H_2) = 1/3$ – вероятность того, что принят сигнал «точка», если передан сигнал «тире», совпадает с вероятностью искажения сигнала «тире».

Аналогично, $P(B/H_1) = 2/5$, $P(B/H_2) = 1 - 1/3 = 2/3$.

Вероятности событий A и B находятся по формуле полной вероятности:

$$P(A) = 5/8 \cdot 3/8 + 3/8 \cdot 1/3 = 1/2, \quad P(B) = 5/8 \cdot 2/5 + 3/8 \cdot 2/3 = 1/2.$$

Искомые вероятности равны

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

$$P(H_2/B) = \frac{P(H_2)P(B/H_2)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Задачи для решения

1. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из наудачу взятой урны извлечен шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

2. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых автомашин, проезжающих по тому же шоссе как 2 : 3. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

3. Из 20 студентов, пришедших на экзамен, восемь подготовлены отлично, шесть – хорошо, четверо – посредственно и двое – плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, знает все вопросы, хорошо – 35, посредственно – 25 и плохо – 10 вопросов. Некоторый студент ответил на все три вопроса билета. Найдите вероятность того, что он подготовлен: а) хорошо; б) плохо.

4. Задача-шутка. Один властелин, которому наскучил его звездочет со своими ложными предсказаниями, решил казнить его. Однако, будучи добрым правителем, он решил дать звездочету последний шанс. Ему велено распределить по двум урнам 4 шара: 2 черных и 2 белых. Палач выберет наугад одну из урн и из нее достанет один шар. Если будет черный шар, то звездочета казнят, если белый – жизнь звездочета будет спасена. Каким образом звездочет должен расположить шары в урнах, чтобы обеспечить себе максимальную вероятность быть спасенным?

5. В первой урне 3 белых и 5 черных шаров; во второй урне 6 белых и 4 черных шара. Из первой урны во вторую переложили один шар, а затем из второй урны взяли один шар, который оказался белым. Найти вероятность того, что был переложен белый шар.

6. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1 : 4 : 5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98%, 88% и 92% случаев. Найти вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока. Проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока. От какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

7*. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет выстрел из наудачу взятой винтовки.

8*. Три стрелка делают по мишени по одному выстрелу с вероятностями попадания соответственно 0,8; 0,7; 0,9. Известно, что мишень поражена один раз. Какова вероятность того, что это попадание сделано вторым стрелком.

9*. Для сдачи экзамена студентам необходимо было подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 8 – 25 вопросов, 5 – 20 вопросов и 2 – 15 вопросов. Вызванный студент ответил на поставленный вопрос. Найти вероятность того, что этот студент: а) подготовил все вопросы; б) подготовил только половину вопросов.

10*. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9; для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

11*. На трех дочерей Алису, Марину и Елену в семье возложена обязанность мыть посуду. Поскольку Алиса старшая, ей приходится выполнять 40% всей работы. Остальные 60% работы Марина и Елена делят поровну. Когда Алиса моет посуду, вероятность для нее разбить по крайней мере одну тарелку равна 0,02. Для Марины и Елены эта вероятность равна соответственно 0,03 и 0,04. Родители не знают, кто мыл посуду вечером, но они слышали звон разбитой тарелки. Какова вероятность того, что посуду мыла Алиса? Марина? Елена?

12*. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

13*.Вероятность того, что клиент банка не вернет заем в период экономического роста, равна 0,04; а в период экономического кризиса – 0,13. Предположим, что вероятность того, что начнется период экономического роста, равна 0,65. Чему равна вероятность того, что случайный клиент банка не вернет полученный кредит?

14*. На химическом заводе установлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал срабатывает с вероятностью 0,95. Звуковой сигнал может сработать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью 0,02. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,004. Предположим, что звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность реальной аварийной ситуации?

15*. Медицинский тест на возможность вирусного заболевания дает следующие результаты:

1) если проверяемый болен, то тест даст положительный результат с вероятностью 0,92;

2) если проверяемый не болен, то тест может дать положительный результат с вероятностью 0,04.

Поскольку заболевание редкое, то ему подвержено только 0,1% населения. Предположим, что некоторому случайно выбранному человеку сделан анализ и получен положительный результат. Чему равна вероятность того, что человек действительно болен?

1.5. Повторение испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа. Формула Пуассона

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события* A. Далее будем рассматривать такие независимые испытания, в которых событие A имеет одну и ту же вероятность.

Теорема. *Вероятность того, что в* n *независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна* p, *причем* $0 < p < 1$, *событие наступит ровно* k *раз (безразлично в какой последовательности), равна*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

Эту формулу называют *формулой Бернулли.*

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит менее k раз, более k раз, не менее k раз, не более k раз находят соответственно по формулам:

$$P_n(m < k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1);$$

$$P_n(m > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n);$$

$$P_n(m \geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n);$$

$$P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k).$$

Локальная теорема Лапласа. *Вероятность того, что в* n *независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна* p $(0 < p < 1)$, *событие наступит ровно* k *раз (безразлично в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше* n*)*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi(x)\,.$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\,, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 1; для отрицательных значений x пользуются той же таблицей, так как функция $\varphi(x)$ четная, и, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При $x > 5$ можно считать, что $\varphi(x) = 0$.

Интегральная теорема Лапласа. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит от k_1 до k_2 раз, приближенно равна*

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x {}^{-z^2/2}\,dz \text{ – функция Лапласа,}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица значений функции Лапласа для положительных значений x $(0 \leq x \leq 5)$ приведена в приложении 2; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0,5$. Для отрицательных значений x используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Теорема. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события мала $(p \leq 0,1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), приближенно равна*

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \text{где} \quad \lambda = np.$$

Эту формулу называют *формулой Пуассона.*

Таблица значений формулы Пуассона, для известных λ и k приведена в приложении 3.

Замечание. *Вычисление вероятностей по формуле Бернулли при большом числе испытаний очень громоздко. Поэтому в таких случаях пользуются приближенными формулами Лапласа и Пуассона. При этом следует учесть, что формулы Лапласа дают лучшее приближение, чем формула Пуассона, если $npq \geq 10$, а формула Пуассона – лучшее приближение, чем формула Лапласы, если $npq < 10$.*

Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, причем $0 < p < 1$, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{n/pq}$:*

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Число k_0 наступлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p, называют *наивероятнейшим*, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятностей остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np - q \leq k_0 \leq np + p\,.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) четыре; б) не меньше четырех.

Решение. а) По условию $n = 5$, $k = 4$, $p = 0,9$; значит, $q = 0,1$. Подставим эти значения в формулу Бернулли, получим

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 0,6561 \cdot 0,1 = 0,32805.$$

б) Искомое событие A состоит в том, что из 5 посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P(A) = P_5(4) + P_5(5)$.

Первое слагаемое уже найдено. Вычислим второе:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = 1 \cdot 0,59049 \cdot 1 = 0,59049.$$

Следовательно, $P(A) = 0,32805 + 0,59049 = 0,91854$.

Задача 2. В среднем 20% пакетов акций на аукционах продаются по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций в результате торгов по первоначально заявленной цене: 1) не будут проданы пять пакетов; 2) будет продано пакетов: а) менее двух; б) не более двух; в) хотя бы два пакета; г) наивероятнейшее число.

Решение. 1) Вероятность того, что пакет акций не будет продан по первоначально заявленной цене, равна $p = 1 - 0,2 = 0,8$. По формуле Бернулли найдем: $P_9(5) = C_9^5 \cdot 0,8^5 \cdot 0,2^4 \approx 0,059$.

2) По условию $p = 0,2$. Тогда найдем:

а)$P_9(m < 2) = P_9(0) + P_9(1) = C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 + C_9^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^8 \approx 0,436$;

б) $P_9(m \leq 2) = P_9(0) + P_9(1) + P_9(2) = C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 + C_9^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^8 +$ $+ C_9^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 \approx 0,738$;

в) $P_9(m \geq 2) = P_9(2) + P_9(3) + \ldots + P_9(9)$. Эту вероятность можно найти проще, если перейти к противоположному событию, то есть

$$P_9(m \geq 2) = 1 - P_9(m < 2) = 1 - [P_9(0) + P_9(1)] \approx 1 - 0,436 = 0,564.$$

г) Наивероятнейшее число проданных акций по первоначально заявленной цене определяется из условия

$$9 \cdot 0,2 - 0,8 \leq k_0 \leq 9 \cdot 0,2 + 0,2$$

или $1 \leq k_0 \leq 2$, то есть наивероятнейших чисел два: $k_0 = 1$ и $k_0' = 2$. Поэтому вероятность

$$P_{\text{наивер.}} = P_9(1) + P_9(2) = C_9^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^8 + C_9^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 \approx 0,604.$$

Задача 3. Вероятность появления события A в каждом из 625 испытаний равна 0,64. Найти вероятность того, что событие A в этих испытаниях появится ровно 415 раз.

Решение. Так как число испытаний n велико, то применим приближенную формулу Лапласа. По условию $n = 625$, $k = 415$, $p = 0,64$; $q = 1 - 0,64 = 0,36$; тогда $x = \dfrac{415 - 625 \cdot 0,64}{\sqrt{625 \cdot 0,64 \cdot 0,36}} = 1,25$. По таблице находим, что $\varphi(1,25) = 0,1826$. Следовательно,

$$P_{625}(415) \approx \frac{1}{\sqrt{625 \cdot 0,64 \cdot 0,36}} \cdot 0,1826 \approx 0,015.$$

Задача 4. Среди семян ржи 0,04% сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 семян обнаружить пять семян сорняков?

Решение. Так как вероятность появления события $p = 0,0004$ мала, то применим формулу Пуассона. По условию $n = 5000$, $k = 5$, $p = 0,0004$; тогда $\lambda = 5000 \cdot 0,0004 = 2$, используя таблицу, нашли, что

$$P_{5000}(5) \approx \frac{2^5}{5!}\, e^{-2} \approx 0,036089.$$

Задача 5. Вероятность попадания в цель при отдельном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что число попаданий при 600 выстрелах будет заключено в пределах от 330 до 375.

Решение. Применим интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

По условию $n = 600$, $p = 0,6$; $k_1 = 330$, $k_2 = 375$. Найдем

$$x_1 = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -2,5; \quad x_2 = \frac{375 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = 1,25.$$

По таблице находим $\Phi(1,25) = 0,3944$; $\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) = -0,4938$. Подставив эти значения в формулу, получим искомую вероятность

$$P_{600}(330 \leq k \leq 375) \approx 0,3944 - (-0,4938) = 0,8882.$$

Задача 6. В страховой компании 10 тысяч клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 500 руб. При наступлении страхового случая, вероятность которого по оценкам экспертов можно считать равной $p = 0,005$; страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму размером 50 тыс. руб. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с надежностью 0,95?

Решение. Размер прибыли компании составляет разность между суммарным взносом всех клиентов и суммарной страховой суммой, выплаченной n_0 клиентам при наступлении страхового случая, то есть

$$\Pi\ = 500 \cdot 10 - 50n_0 = 50(100 - n_0) \text{ тыс.руб.}$$

Для определения n_0 применим интегральную формулу Лапласа (требование $npq = 10000 \cdot 0,005 \cdot 0,995 = 49,75 \geq 10$ выполнено).

Найдем

$$x_1 = \frac{0 - np}{\sqrt{npq}} = -\sqrt{\frac{np}{q}} = -\sqrt{\frac{10000 \cdot 0,005}{0,995}} = -7,09; \quad x_2 = \frac{n_0 - np}{\sqrt{npq}},$$

откуда

$$n_0 = np + x_2\sqrt{npq} = 10000 \cdot 0,005 + x_2\sqrt{49,75} = 50 + x_2\sqrt{49,75}.$$

По условию задачи $P_{10000}(0 \leq k \leq n_0) = \dfrac{1}{2}[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)] = 0,95$; где k – число клиентов, которым будет выплачена страховая сумма. Тогда

$$\Phi(x_2) = 1,9 + \Phi(x_1) = 1,9 + \Phi(-7,09) \approx 1,9 + (-1) = 0,9.$$

По таблице находим значение x_2, для которого $\Phi(x_2) = 0,9$. Значит, $n_0 = 50 + 1,645\sqrt{49,75} \approx 61,6$ и $\Pi = 50(100 - 61,6) = 1920$, то есть с надежностью 0,95 ожидаемая прибыль составит 1,92 млн. руб.

Задачи для решения

1. Монета брошена 3 раза. Найти вероятность того, что герб выпадет ровно 2 раза.

2. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце четырех дней окажутся дождливыми: а) три дня, б) менее трех дней, в) не менее трех дней.

3. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна 2/3. Найти наивероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 7.

4. Вероятность рождения мальчика примем равной 0,5. Найти вероятность того, что среди 200 новорожденных детей будет: а) 90 мальчиков, б) 110 мальчиков, в) от 90 до 110 мальчиков.

5. Из склада в магазин отправлено 1000 бутылок минеральной воды. Для каждой бутылки вероятность того, что она разобьется в пути, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) две, б) менее двух, в) более двух, г) хотя бы одну. Найти наиболее вероятное число разбитых бутылок и соответствующую ему вероятность.

6. Найти вероятность того, что частота выпадения герба при 10000 подбрасываниях монеты отклонится от 0,5 менее чем на $\varepsilon = 0,01$.

7. В среднем левши составляют 1%. Какова вероятность того, что среди 200 студентов найдется: а) четыре левши, б) не менее чем четыре левши.

8*. В партии товаров товаровед отбирает бракованные изделия. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется бракованным, равна

0,1. Найти вероятность того, что из трех взятых на проверку изделий одно бракованное.

9*. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди них: а) два мальчика, б) не более двух мальчиков; в) более двух мальчиков. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

10*. Контрольное задание состоит из 10 вопросов, предусматривающих ответы «да» или «нет». Найдите наиболее вероятное число правильных ответов, которые даст учащийся, если он станет выбирать ответ по каждому вопросу наудачу. Найдите вероятность наиболее вероятного числа правильных ответов.

11*. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных «гербом» вверх будет: а) 45, б) 55, в) от 45 до 55?

12*. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна 0,0002. Найти вероятность того, что среди 5000 изделий в пути будет повреждено: а) три изделия, б) одно изделие, в) не более трех изделий, г) более трех изделий.

13*. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаниях равна 0,8. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

14*. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий; в) не менее 480; г) от 480 до 520.

Указание. После проведения занятий по темам первой главы рекомендуем провести контрольную работу № 1.

Глава 2. Случайные величины

2.1. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Математические операции над случайными величинами

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины X обычно задается *рядом распределения*:

x_i	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $(x_i,\, p_i)$, а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения.*

Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли.

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины называются *зависимыми.*

Определим **математические операции** над дискретными случайными величинами.

Пусть заданы две случайные величины X и Y своими законами распределения

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

y_j	y_1	y_2	$\dots$	y_m
p_j	p_1	p_2	$\dots$	p_m

Произведением kX случайной величины X на постоянную величину k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i $(i = \overline{1, n})$.

m-й степенью случайной величины X, то есть X^m, называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями p_i $(i = \overline{1, n})$.

Суммой (разностью или произведением) случайных величин X и Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_j$ $(x_i - y_j$ или $x_i y_j)$, где $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$; с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y – значение y_j:

$$p_{ij} = P[(X = x_i)(Y = y_j)].$$

Если случайные величины X и Y независимы, то есть независимы любые события $X = x_i$ и $Y = y_j$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_{ij} = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_i p_j.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 дефектных, выбраны случайным образом пять изделий для проверки их качества. Построить ряд распределений случайной величины X – числа дефектных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. В выборке число дефектных изделий может быть любым целым числом в пределах 0 до 5 включительно, поэтому возможные значения x_i величины X равны: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$; $x_6 = 5$.

Вероятность $P(X = k)$ того, что в выборке окажется ровно k дефектных изделий ($k = \overline{0,5}$); равна $P(X = k) = \dfrac{C_{10}^k C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5}$.

В результате расчетов по данной формуле с точностью до 0,001 получим:

$$p_1 = P(X = 0) = 0,583; \quad p_2 = P(X = 1) = 0,340;$$

$$p_3 = P(X = 2) = 0,070; \quad p_4 = P(X = 3) = 0,007;$$

$$p_5 = P(X = 4) = 0; \quad p_6 = P(X = 5) = 0.$$

Используя для проверки равенство $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$, убеждаемся, что расчеты и округления произведены правильно.

Результаты занесем в таблицу:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

Задача 2. Построить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске $p = 0,3$.

Решение. Случайная величина X может принимать два значения: $x_2 = 1$ (попадание); $x_1 = 0$ (промах). Вероятности возможных значений $P(x_2) = 0,3$; $P(x_1) = 1 - P(x_2) = 0,7$.

Закон распределения имеет вид:

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

Задача 3. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайной величины X – числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равна 0,9.

Решение. Случайная величина X может принимать пять значений: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$. Тогда $P(x_1) = 1 - 0,9 = 0,1$ (1-й испытанный прибор ненадежен), $P(x_2) = 0,9 \cdot 0,1 = 0,09$ (1-й прибор надежен, а 2-й нет), $P(x_3) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,081$ (1-й и 2-й приборы надежны, а 3-й нет), $P(x_4) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1 = 0,0729$ (1-й, 2-й, 3-й приборы надежны, а 4-й нет), $P(x_5) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,6561$.

Закон распределения имеет вид:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,06561

Задача 4. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0,5$. Для случайного числа появлений герба построить: а) ряд распределения; б) многоугольник распределения.

Решение. а) Случайная величина X может принимать 4 значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Так как в каждом опыте вероятность выпадения герба постоянна и равна $p = 0,5$; то для вычисления вероятностей возможных значений воспользуемся формулой Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Тогда $p_1 = P(X = x_1) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^3 = 0,125$,
$p_2 = P(X = x_2) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^2 = 0,375$. Аналогично, $p_3 = 0,375$; $p_4 = 0,125$.

Контроль: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 0,125 + 0,375 + 0,375 + 0,125 = 1$.

Получили биномиальный закон распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

б) Построим многоугольник распределения (рис. 5).

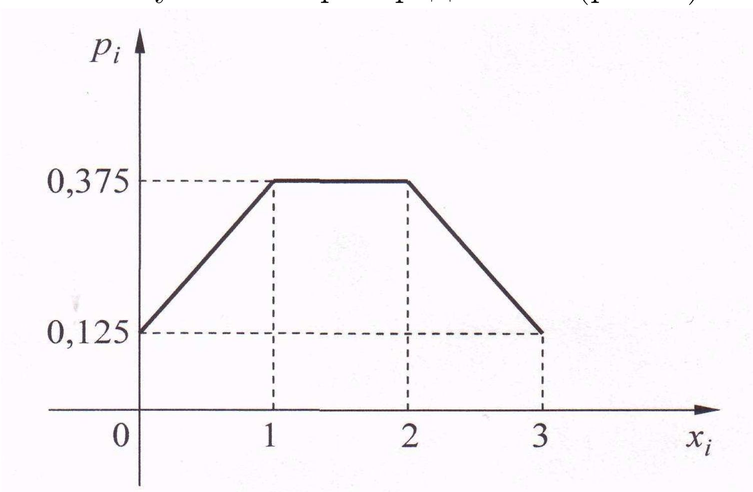

Рис. 5

Задача 5. В книжном магазине организована лотерея. Разыгрываются две книги стоимостью по 100 руб. и одна стоимостью в 300 руб. Составить закон распределения случайной величины X – суммы чистого (возможного) выигрыша для того, кто приобрел один билет за 10 руб., если всего продано 50 билетов.

Решение. Случайная величина X может принимать три значения: $x_1 = -10$ руб. (если владелец билета не выиграет, а проиграет 10 руб., уплаченный им за билет); $x_2 = 90$ руб.; $x_3 = 290$ руб. (фактический выигрыш уменьшается на стоимость билета 10 руб.). Первому результату благоприятствует 47 исходов из 50, второму – два, а третьему – один. Поэтому вероятности таковы:

$$P(X = -10) = \frac{47}{50} = 0,94; \quad P(X = 90) = \frac{2}{50} = 0,04;$$

$$P(X = 290) = \frac{1}{50} = 0,02.$$

Закон распределения случайной величины X имеет вид:

Сумма выигрыша X	-10	90	290
Вероятность	0,94	0,04	0,02

Закон распределения записан верно, так как

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 0,94 + 0,04 + 0,02 = 1.$$

Задача 6. Случайная величина X задана законом распределения:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти законы распределения случайных величин: а) $Y = 3X$; б) $Z = X^2$.

Решение. а) Значениями случайной величины Y будут:

$$y_1 = 3 \cdot (-2) = -6; \quad y_2 = 3 \cdot 1 = 3; \quad y_3 = 3 \cdot 2 = 6$$

с теми же вероятностями, то есть

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) Значениями случайной величины Z будут: $(-2)^2 = 4$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ с теми же вероятностями. Так же вероятность значения $Z = 4$ может быть получена возведением в квадрат значения (-2) с вероятностью 0,5 и $(+2)$ с вероятностью 0,2. По теореме сложения вероятностей имеем

$$P(Z = 4) = 0,5 + 0,2 = 0,7.$$

Итак, закон распределения случайной величины Z:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

Задачи для решения

1. На пути движения автомобиля 6 светофоров, каждый из них или разрешает, или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. Найдите закон распределения случайной величины X, равной числу светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

2. Мишень состоит из круга 1 и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг 1 дает 10 очков, в кольцо 2 – 5 очков, в кольцо 3 – (-1) очко. Вероятности попадания в круг 1 и кольца 2 и 3 соответственно равны 0,5; 0,3 и 0,2. Найдите закон распределения суммы очков в результате трех попаданий в мишень.

3. Игральная кость брошена три раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

4. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

5. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают в урну и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины.

6*. В урне имеются четыре шара с номерами от 1 до 4. Вынули два шара. Случайная величина X – сумма номеров шаров. Построить ряд распределения случайной величины X.

7*. Стрелок производит по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий.

8*. Устройство состоит их трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте и построить многоугольник распределения.

9*. В партии из шести деталей имеется четыре стандартных. Наудачу отобраны три детали. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – числа стандартных деталей среди отобранных.

10*. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2, x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0,15$. Найти вероятность x_3.

11*. В лотерее разыгрывается: автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден. ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден. ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден. ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

12*. Вероятности того. что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам A и B, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

2.2. Числовые характеристики дискретной случайной величины

Числовыми характеристиками случайной величины называются числа, которые описывают случайную величину суммарно.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Происхождение термина <математическое ожидание> связано с начальным периодом возникновения теории вероятностей, когда область ее применения ограничивалась азартными играми. Игрока интересовало среднее значение ожидаемого выигрыша или, иначе, математическое ожидание выигрыша.

Математическое ожидание обладает следующими **свойствами**.

1. *Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной*:

$$M(C) = C.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания*:

$$M(CX) = CM(X).$$

3. *Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий*:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых*:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

5. *Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную C, то на эту же постоянную C увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины*:

$$M(X \pm C) = M(X) \pm C.$$

6. *Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю*:

$$M[X - M(X)] = 0.$$

Теорема. *Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании*:

$$M(X) = np.$$

Дисперсией (*рассеянием*) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Теорема. *Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсия обладает следующими **свойствами**.

1. *Дисперсия постоянной равна нулю*:

$$D(C) = 0.$$

2. *Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат*:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин*:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий*:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Теорема. *Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании:*

$$D(X) = npq.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k).$$

В частности, начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию: $\nu_1 = M(X)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k.$$

В частности, центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0;$$

центральный момент второго порядка равен дисперсии:

$$\mu_2 = M[X - M(X)]^2 = D(X).$$

Центральные моменты целесообразно вычислять, используя формулы, выражающие центральные моменты через начальные:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Модой дискретной случайной величины X называют ее наиболее вероятное значение.

Образцы решения задач

Задача 1. Случайная величина X характеризуется рядом распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Определить математическое ожидание и дисперсию.

Решение. По формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i$ найдем математическое ожидание:

$$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,08 + 4 \cdot 0,02 = 1,32.$$

Дисперсию найдем по формуле:

$$D(X) = M[X^2] - [M(X)]^2.$$

Построим дополнительную таблицу:

x_i^2	0	1	4	9	16
p_i	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Найдем

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,02 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,08 + 16 \cdot 0,02 = 2,64;$$

тогда $D(X) = 2,64 - 1,32^2 = 0,8976$.

Задача 2. Найти математическое ожидание и дисперсию числа очков при одном бросании игральной кости и суммы очков при бросании двух игральных костей.

Решение. Случайная величина принимает 6 значений $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$, каждому из которых соответствует вероятность $p = 1/6$. Тогда

$$M(X) = 1 \cdot 1/6 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 5 \cdot 1/6 + 6 \cdot 1/6 = 3,5.$$

Найдем

$$M(X^2) = 1 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/6 + 9 \cdot 1/6 + 16 \cdot 1/6 + 25 \cdot 1/6 + 36 \cdot 1/6 = 91/6,$$

тогда

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 91/6 - (21/6)^2 = 546/36 - 441/36 = 35/12.$$

Для двух костей число очков $Z = X + Y$, где X – число очков на первой кости, Y – число очков на второй кости. Тогда

$$M(Z) = M(X) + M(Y) = 7, \quad D(Z) = D(X) + D(Y) = 35/6.$$

Задача 3. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины $Z = X+Y$, где X и Y независимые случайные величины, заданные законами распределения.

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,3	0,5

y_j	-1	0	1
p_j	0,1	0,3	0,6

Решение. Так как по условию X и Y независимые величины, то

$$M(Z) = M(X) + M(Y), \quad D(Z) = D(X) + D(Y).$$

Находим

$$M(X) = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,5 = 2,3;$$

$$M(X^2) = 1 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,5 = 5,9;$$

$$D(X) = 5,9 - 2,3^2 = 0,61; \quad \sigma(X) = \sqrt{0,61} \approx 0,78;$$

$$M(Y) = -1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 1 = 0,5;$$

$$M(Y^2) = 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,6 = 0,7;$$

$$D(Y) = 0,7 - 0,5^2 = 0,45; \quad \sigma(Y) = \sqrt{0,45} \approx 0,67.$$

Тогда

$$M(Z) = 2,3 + 0,5 = 2,8; \quad D(Z) = 0,61 + 0,45 = 1,06;$$

$$\sigma(Z) \approx 1,03.$$

Задача 4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	1	2
p_i	0,4	0,6

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X.

Решение. Находим сначала начальные моменты:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,6 = 1,6; \quad \nu_2 = M(X^2) = 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,6 = 2,8;$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 1^3 \cdot 0,4 + 2^3 \cdot 0,6 = 5,2.$$

Вычислим центральные моменты:

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2,8 - 1,6^2 = 0,24;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 5,2 - 3 \cdot 1,6 \cdot 2,8 + 2 \cdot 1,6^3 = -0,48.$$

Задачи для решения

1. Вероятность попадания стрелком в мишень равна 2/3. Стрелком сделано 15 выстрелов. Случайная величина X – число попаданий в мишень. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Дискретная случайная величина X принимает три возможные значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 8$.

3. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	-5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

4. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения

x_i	1	2
p_i	0,2	0,8

y_j	0,5	1
p_j	0,3	0,7

Найти математическое ожидание произведения XY двумя способами:

а) составив закон распределения случайной величины XY;

б) пользуясь свойствами математического ожидания.

5. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найти дисперсии следующих величин: а) $X - 1$, б) $-2X$, в) $3X + 6$.

6. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7; причем $x_2 > x_1$. Найти x_1 и x_2, зная, что $M(X) = 2,7$ и $D(X) = 0,21$.

7. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа таких бросаний пяти игральных костей, в каждом из которых на двух костях появится по одному очку, если общее число бросаний равно 20.

8*. Найти математическое ожидание и дисперсию лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 40 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0,05.

9*. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

10*. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	4,3	5,1	10,6
p_i	0,2	0,3	0,5

11*. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

x_i	1	2
p_i	0,2	0,8

y_j	0,5	1
p_j	0,3	0,7

Найти математическое ожидание суммы $X + Y$ двумя способами: а) составив закон распределения случайной величины $X+Y$; б) пользуясь свойством математического ожидания.

12*. Математическое ожидание случайной величины X равно 4. Найти математические ожидания следующих величин: а) $X + 2$, б) $3X$, в) $-2X+5$.

13*. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X) = 0,9$.

14*. ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,9. В каждой партии содержится 5 изделий. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X – числа партий, в каждой из которых окажется ровно 4 стандартных изделия, если проверке подлежит 50 партий.

15*. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	3
p_i	0,4	0,6

Найти центральные моменты первого, второго и третьего порядка случайной величины X.

2.3. Функция и плотность распределения вероятностей случайной величины

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Часто вместо термина «функция распределения» используют термин «*интегральная функция распределения*».

Функция распределения обладает следующими **свойствами**.

1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* $[0; 1]$:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. *Функция распределения – неубывающая функция*:

$$F(x_2) \geq F(x_1), \text{ *если* } x_2 > x_1.$$

3. *Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a; b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале*:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

4. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, например x_0, равна нулю*:

$$P(X = x_0) = 0.$$

5. *Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a; b)$, то*

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a; \quad F(x) = 1 \textit{ при } x \geq b.$$

6. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей числовой оси, то справедливы следующие предельные отношения*:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Часто вместо термина «плотность распределения» используют термины «*плотность вероятностей*» и «*дифференциальная функция*».

Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a; b)$, равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b*:

$$P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения $F(x)$ по формуле:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Плотность распределения обладает следующими **свойствами**.

1. *Плотность распределения – неотрицательная функция*:

$$f(x) \geq 0.$$

2. *Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице*:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Геометрически это означает, что *площадь криволинейной трапеции, которая ограничена осью Ox и кривой распределения, равна единице*.

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 1$.

Образцы решения задач

Задача 1. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	10	20	30	40	50
p_i	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Найти функцию распределения вероятности этой случайной величины.

Решение. Если $x \leq 10$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;
при $10 < x \leq 20$ имеем $F(x) = P(X < x) = 0,2$;
если $20 < x \leq 30$, то $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 = 0,5$;
если $30 < x \leq 40$, то $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 = 0,85$;
если $40 < x \leq 50$, то $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 + 0,1 = 0,95$;
если $x > 50$, то $F(x) = P(X < x) = 0,2 + 0,3 + 0,35 + 0,1 + 0,05 = 1$.

Построим график функции $F(x)$ (рис. 6).

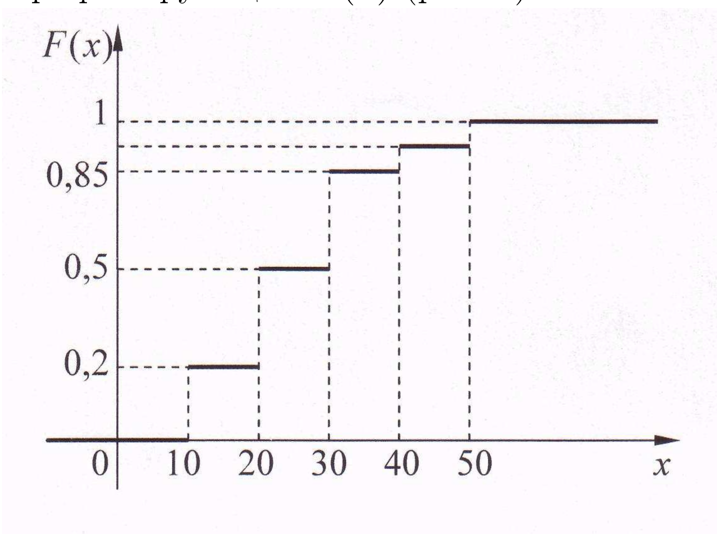

Рис. 6

Задача 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x-1)/2, & 1 \leq x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Вычислить вероятности попадания случайной величины X в интервалы $(1,5; 2,5)$ и $(2,5; 3,5)$.

Решение. Учитывая свойства функции распределения, найдем

$$p_1 = F(2,5) - F(1,5) = (2,5-1)/2 - (1,5-1)/2 = 0,75 - 0,25 = 0,5;$$

$$p_2 = F(3,5) - F(2,5) = 1 - (2,5-1)/2 = 1 - 0,75 = 0,25.$$

Задача 3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ (x-2)^3, & 2 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины.

Решение. Плотность распределения равна производной от функции распределения, то есть $f(x) = F'(x)$. Имеем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 3(x-2)^2, & 2 \le x < 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Отметим, что при $x = 3$ производная $F'(x)$ не существует.

Задача 4. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ a(3x - x^2)/2, & 0 \le x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти коэффициент a; 2) построить график плотности распределения $y = f(x)$; 3) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (1;2).

Решение. 1) Так как все значения данной случайной величины заключены на отрезке $[0;3]$, то

$$\int_0^3 \frac{1}{2}\, a(3x - x^2)\, dx = 1,$$

откуда $\dfrac{a}{2}\left[\dfrac{3}{2}\,x^2 - \dfrac{1}{3}\,x^3\right]\Bigg|_0^3 = 1, \quad \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{27}{2} - 9\right) = 1, \quad a = \dfrac{4}{9}.$

2) Графиком функции $f(x)$ на отрезке $[0;3]$ является парабола $y = (2/3)x - (2/9)x^2$, а вне этого интервала графиком служит сама ось абсцисс (рис. 7).

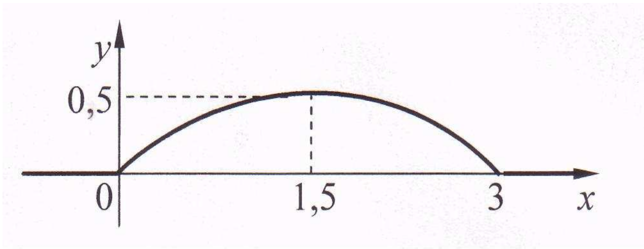

Рис. 7

3) Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(1;2)$ равна

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \left(\frac{2}{3}\,x - \frac{2}{9}\,x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\right]\Big|_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27}.$$

Задача 5. Задана плотность вероятности случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения случайной величины X.

Решение. Функция распределения $F(x)$ есть интеграл от дифференциальной функции, поэтому

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Задачи для решения

1. Бросают 3 монеты. Требуется: а) задать случайную величину X, равную числу выпавших «надписей», б) построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ величины X, если вероятность выпадения «герба» равна 0,5.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	4	7
p_i	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ (3/4)x + 3/4, & -1 < x \le 1/3, \\ 1, & x > 1/3. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0; 1/3)$.

4. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.

5. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения $f(x) = (3/2)\sin 3x$ в интервале $(0; \pi/3)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/6; \pi/4)$.

6. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \cos x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

7. Дана плотность распределения случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\sin x, & 0 < x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и функцию распределения $F(x)$.

8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате 4 независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу $(0,25; 0,75)$.

9*. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания равна 0,4.

10*. Дискретная случайная величина задана законом распределения:

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

11*. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ x - 2, & 2 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервалы $(1; 2,5)$ и $(2,5; 3,5)$.

12*. Случайная величина X задана функцией распределения, указанной в предыдущей задаче. Найти плотность распределения случайной величины.

13*. Случайная величина имеет плотность распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ (1/2)\sin x, & 0 \le x \le \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале $(0; 1/4)$.

14*. Задана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

15*. Случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2, \\ a\cos x, & -\pi/2 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi 2. \end{cases}$$

Найти a и $F(x)$.

2.4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Равномерное, нормальное и показательное распределения

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется равенством:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X.

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\, dx,$$

или равносильным равенством:

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - [M(X)]^2.$$

Среднее квадратичное отклонение непрерывной случайной величины определяется равенством

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Модой $M_o(X)$ непрерывной случайной величины X называют такое ее значение, при котором плотность распределения максимальна.

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше или больше $M_e(X)$, то есть

$$P(X < M_e(X)) = P(X > M_e(X)) = 0,5.$$

Плотности распределения непрерывных случайных величин также называют *законами распределения*.

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение, а именно

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ 1/(b-a), & a < x < b, \\ 0, & x \ge b. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Если случайная величина X распределена равномерно, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \ge b, \end{cases}$$

а также

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Нормальным называют распределение вероятностей случайной величины, которое описывается плотностью:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.$$

Числовые характеристики нормального распределения:

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2, \quad \sigma(X) = \sigma.$$

Если случайная величина X распределена нормально, то

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) + \frac{1}{2},$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ – функция Лапласа.

Вероятность того, что случайная величина X, распределенная по нормальному закону, примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$, равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Показательным (*экспоненциальным*) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

где λ – постоянная положительная величина.

Функция распределения показательного закона

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики показательного распределения:

$$M(X) = 1/\lambda, \quad D(X) = 1/\lambda^2, \quad \sigma(X) = 1/\lambda.$$

Вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)$ непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, равна

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

Образцы решения задач

Задача1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 1 - x/2$ на промежутке [0;2). Вне этого промежутка $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание $M(X)$.

Решение. Известно, что $M(X) = \int\limits_a^b xf(x)\,dx$, значит,

$$M(X) = \int\limits_0^2 x\left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \int\limits_0^2 x\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^2 x^2dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Задача 2. Найти дисперсию $D(X)$, если плотность распределения случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Решение. Используя формулу

$$D(X) = \int\limits_a^b x^2 f(x)\,dx - \left(\int\limits_a^b xf(x)\,dx\right)^2,$$

найдем

$$D(X) = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 2x^2\,dx - \left(\int\limits_0^1 x \cdot 2x^2 dx\right)^2 =$$

$$= 2\int\limits_0^1 x^4 dx - \left(2\int\limits_0^1 x^3 dx\right)^2 = 2 \cdot \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 - \left(2 \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1\right)^2 = \frac{3}{20}.$$

Задача 3. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение для случайной величины с равномерным распределением.

Решение. Плотность вероятности равномерно распределенной случайной величины равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ 1/(b-a), & a < x < b, \\ 0, & x \le b. \end{cases}$$

Вычислим

$$M(X) = \int\limits_a^b xf(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$M(X^2) = \int\limits_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\bigg|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Значит,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Следовательно, $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Задача 4. Случайная величина X имеет нормальное распределение с $M(X) = 0$ и $D(X) = 1$.

Что больше $P(-0,5 < X < -0,1)$ или $P(1 < X < 2)$?

Решение. Вероятность попадания в интервал $(\alpha; \beta)$ случайной величины X, подчиненной нормальному закону, определяется через значения функции Лапласа по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&P(-0,5 < X < -0,1) = \Phi\left(\frac{-0,1-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5-0}{1}\right) = \\
&= \Phi(-0,1) - \Phi(-0,5) = -\Phi(0,1) + \Phi(0,5) = \\
&= -0,0398 + 0,1915 = 0,1517; \\
&P(1 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-0}{1}\right) = \\
&= \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3414 = 0,1359.
\end{aligned}$$

Таким образом, $P(-0,5 < X < -0,1) > P(1 < X < 2)$.

Задача 5. Диаметр детали – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 25$ см и средним квадратичным отклонением $\sigma = 0,4$ см. Найти вероятность того, что две взятые наудачу детали имеют отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не более 0,16 см.

Решение. Вероятность того, что диаметр наудачу выбранной детали имеет отклонение δ от математического ожидания, равна

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\delta/\sigma\right).$$

Тогда $P(|X - 25| < 0,16) = 2\Phi(0,16/0,4) = 2\Phi(0,4) = 2 \cdot 0,1554 = = 0,3108$.

Следовательно, для двух наудачу взятых деталей искомая вероятность составит $0,3108^2 \approx 0,096$.

Задача 6. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0,4$. Найти характеристики случайной величины, интегральную функцию и вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $(6; 10)$.

Решение. Плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0,4e^{-0,4x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Числовые характеристики равны

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,4} = 2,5; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 6,25.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-0,4x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Случайная величина примет значение из указанного интервала с вероятностью

$$P(6 < X < 10) = e^{-0,4 \cdot 6} - e^{-0,4 \cdot 10} \approx 0,0907 - 0,0183 = 0,0724.$$

Задачи для решения

1. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = 2x$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

2. Найти дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ x/4 + 1/2, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

3. Определить математическое ожидание случайной величины, если $f(x) = 0,5$ в интервале $(2;4)$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

4. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

5. Поезда данного маршрута городского трамвая идут с интервалом 5 минут. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее, чем через минуту после ухода предыдущего поезда, но не позднее, чем за две минуты до отхода следующего поезда?

6. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно 3, а среднее квадратическое отклонение равно 2. Написать плотность и функцию распределения величины X.

7. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-1)^2/50}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

8. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны соответственно

10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12; 14)$.

9. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение диаметра от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,4$ мм. Найти сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

10. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$.

11. Найти параметр λ показательного распределения, заданного плотностью $f(x) = 0$ при $x < 0$, $f(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$.

12. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0,13; 0,7)$.

13. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью вероятности $f(x) = 10e^{-10x}$ при $x \geq 0$.

14*. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = (1/2)x$ в интервале $(0; 2)$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти математическое ожидание величины X.

15*. Случайная величина X в интервале $(0; 5)$ задана плотностью распределения $f(x) = (2/25)x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти дисперсию случайной величины X.

16*. Вычислить дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины, если $f(x) = 1/6$ в интервале $(0; 6)$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

17*. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

18*. Все значения равномерно распределенной случайной величины лежат на отрезке $[2; 8]$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал $(3; 5)$.

19*. Написать плотность и функцию распределения нормально распределенной случайной величины X, зная, что $M(X) = 3$, $D(X) = 16$.

20*. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-(x-3)^2/4}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

21*. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(15; 20)$.

22*. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контрольного размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

23*. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 6$.

24*. Найти параметр λ показательного распределения, заданного функцией распределения $F(x) = 0$ при $x < 0$ и $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$ при $x \geq 0$.

25*. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному при $x \geq 0$ плотностью распределения $f(x) = 0,04e^{-0,04x}$; при $x < 0$ функция $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(1; 2)$.

26*. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного закона, заданного функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$ при $x \geq 0$.

Указание. После проведения занятий по разделам 2.1 – 2.4 рекомендуем провести контрольную работу №2.

2.5. Система двух случайных величин

Двумерной называют случайную величину (X, Y), возможные значения которой есть пары чисел (x, y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют *систему двух случайных величин.*

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны.

Непрерывной называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения дискретной двумерной случайной величины называют перечень возможных значений этой величины, то есть пар чисел (x_i, y_j) и их вероятностей $p(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины может быть задан с помощью таблицы с двойным входом

y x	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$\ldots$	$p(x_1, y_m)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$\ldots$	$p(x_2, y_m)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$\ldots$	$p(x_n, y_m)$

При этом $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1.$

Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины называют функцию $F(x, y)$, определяющую для каждой пары чисел (x, y) вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом Y примет значение, меньшее y:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Функция распределения обладает следующими **свойствами**.

1. *Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству*

$$0 \le F(x, y) \le 1.$$

2. $F(x, y)$ *есть неубывающая функция по каждому аргументу*:

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$

3. *Имеют место предельные соотношения*:

$$1)\ F(-\infty, y) = 0, \quad 3)\ F(-\infty, -\infty) = 0,$$

$$2)\ F(x, -\infty) = 0, \quad 4)\ F(+\infty, +\infty) = 1.$$

4. *а) При $y = +\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X*:

$$F(x, +\infty) = F_1(x).$$

б) При $x = +\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y:

$$F(+\infty, y) = F_2(y).$$

Теорема. *Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник, ограниченный прямыми $X = x_1$, $X = x_2$, $Y = y_1$, $Y = y_2$ равна*

$$P(x_1 \leq X \leq x_2,\ y_1 \leq Y \leq y_2) =$$
$$= [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Закон распределения непрерывной двумерной случайной величины задается плотностью распределения $f(x, y)$.

Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной непрерывной случайной величины (X, Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Геометрически эту функцию можно истолковать как поверхность, которую называют *поверхностью распределения.*

Зная плотность совместного распределения $f(x, y)$, можно найти функцию распределения $F(x, y)$ по формуле

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)\, dx dy.$$

Двумерная плотность вероятности обладает **свойствами**.

1. *Двумерная плотность вероятности неотрицательна*:

$$f(x, y) \geq 0.$$

2. *Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности вероятности равен единице*:

$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dxdy = 1.$$

Математические ожидания дискретных случайных величин X *и* Y, входящих в систему, определяются по формулам

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij},$$

а математические ожидания непрерывных случайных величин – по формулам

$$m_x = M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x, y)\, dxdy,$$

$$m_y = M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\, f(x, y)\, dxdy.$$

Точка $(m_x; m_y)$ называется *центром рассеивания системы случайных величин.*

Дисперсии дискретных случайных величин X *и* Y определяются по формулам

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_i - m_x)^2, \quad D(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(y_j - m_y)^2.$$

Дисперсии непрерывных случайных величин X *и* Y, входящих в систему, находятся по формулам

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x, y)\, dxdy,$$

$$D(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 f(x, y)\, dxdy.$$

Для вычисления дисперсий могут быть применены формулы

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2, \quad D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2.$$

Средние квадратические отклонения случайных величин X *и* Y определяются по формулам

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Корреляционным моментом μ *случайных величин* X *и* Y называют математическое ожидание произведения их отклонений:

$$\mu_{xy} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)]\,[y_j - M(Y)]\, p(x_i, y_j),$$

а для непрерывных величин – формулу

$$\mu_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [X - M(X)]\,[y - M(Y)]\, f(x, y)\, dxdy.$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} *случайных величин* X *и* Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратическим отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \mu_{xy}/(\sigma_x \sigma_y).$$

Коэффициент корреляции – безразмерная величина, $|r_{xy}| \le 1$. Коэффициент корреляции служит для оценки тесноты линейной связи между X и Y: чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее; чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к нулю, тем связь слабее.

Коррелированными называют две случайные величины, если их корреляционный момент отличен от нуля.

Некоррелированными называют две случайные величины, если их корреляционный момент равен нулю.

Образцы решения задач

Задача 1. Задано распределение двумерной случайной величины:

y / x	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Найти математические ожидания случайных величин X и Y.

Решение. Имеем

$$m_x = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{3},$$

$$m_y = 1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{36}+1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{18}+1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{11}{6}.$$

Точка $(7/3; 11/6)$ является центром рассеивания для заданной системы (X, Y).

Задача 2. Найти дисперсии случайных величин X и Y по условию предыдущей задачи.

Решение. Имеем

$$M(X^2)=\frac{1}{18}+\frac{4}{9}+\frac{9}{6}+\frac{1}{12}+\frac{4}{6}+\frac{9}{4}+\frac{1}{36}+\frac{4}{18}+\frac{9}{12}=\frac{54}{9},$$

тогда

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{54}{9}-\frac{49}{9}=\frac{5}{9}.$$

Найдем

$$M\left(Y^2\right)=\frac{1}{18}+\frac{4}{12}+\frac{1}{9}+\frac{4}{6}+\frac{1}{18}+\frac{9}{18}+\frac{1}{6}+\frac{4}{4}+\frac{9}{12}=\frac{138}{36},$$

значит,

$$D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2=\frac{138}{36}-\frac{121}{36}=\frac{17}{36}.$$

Задача 3. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

y / x	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений Y: $P(y_1 = 3) = 0,27$; $P(y_2 = 10) = 0,43$; $P(y_3 = 12) = 0,30$:

y_j	3	10	12
p_j	0,27	0,43	0,30

Контроль: $0,27 + 0,43 + 0,30 = 1$.

Аналогично, сложив по строкам, найдем распределение составляющей X:

x_i	4	5
p_i	0,55	0,45

Контроль: $0,55 + 0,45 = 1$.

Задача 4. Дана плотность вероятности системы случайных величин (X, Y):

$$f(x, y) = 0,5\sin(x + y) \quad (0 \le x \le \pi/2, \quad 0 \le y \le \pi/2).$$

Определить: а) функцию распределения системы; б) математические ожидания X и Y; в) корреляционный момент; г) коэффициент корреляции.

Решение. а) Находим функцию распределения (при $0 \le x \le \pi/2$, $0 \le y \le \pi/2$)

$$F(x, y) = P(X < x,\ Y < y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y 0,5\sin(x + y)\,dxdy =$$
$$= 0,5[\sin x + \sin y - \sin(x + y)].$$

б) Математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} x \sin(x+y)\, dxdy =$$

$$= 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} x \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x \right] dx = \frac{\pi}{4} \approx 0,785.$$

Дисперсия случайной величины X:

$$D(X) = 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y)\, dxdy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} x^2 \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos x \right] dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 \approx 0,188.$$

Из симметрии плотности вероятности относительно X и Y следует, что

$$M(Y) = M(X), \quad D(Y) = D(X).$$

в) Корреляционный момент равен

$$\mu_{xy} = 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} \int\limits_0^{\pi/2} x\, y\, \sin(x+y)\, dxdy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= 0,5 \int\limits_0^{\pi/2} x \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin x - \frac{\pi}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right] dx - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^2}{16} \approx -0,046.$$

г) Так как $\sigma_x \sigma_y = D(X) = D(Y) = (\pi^2 + 8\pi - 32)/16$, то коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx \frac{-0,73688}{3,00232} \approx -0,2454.$$

Задача 5. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины (X, Y) примет значение

$X < 2$ и при этом составляющая Y примет значение $Y < 3$, если известна функция распределения системы

$$F(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

Решение. По определению функции распределения двумерной случайной величины $F(x,y) = P(X < x,\ Y < y)$.

Положив $x = 2$, $y = 3$, получим искомую вероятность:

$$P(X < 2,\ Y < 3) = F(2,3) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{3}{3} + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

Задача 6. Найти функцию распределения двумерной случайной величины по данной плотности совместного распределения

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Решение. Воспользуемся формулой $F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)\,dxdy$.

Тогда

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{y}\left(\frac{1}{1+y^2}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\right)dy = \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg}x + \frac{\pi}{2}\right)\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2} =$$
$$= \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2} = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y + \frac{1}{2}\right).$$

Задача 7. Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами $K(1;1)$, $L(\sqrt{3};1)$, $(1;10)$, $N(\sqrt{3};0)$, если плотность распределения двумерной случайной величины

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Решение. *1 способ.* Вероятность попадания случайной точки в произвольную область D равна:

$$P\big((X,Y)\subset D\big)=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^1\left[\frac{1}{1+y^2}\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}x\Big|_1^{\sqrt{3}}\int\limits_0^1\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{arctg}y\Big|_0^1=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{48}.$$

2 способ. По известной плотности распределения системы двух случайных величин можно найти функцию распределения (см. предыдущую задачу). Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник равна

$$\begin{aligned}&P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2)=\\&=[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)]-[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)].\end{aligned}$$

Для функции $F(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\dfrac{1}{2}\right)$ соответствующая вероятность равна

$$\begin{aligned}&P(1<X<\sqrt{3},0<Y<1)=\\&=\left[\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}1+\frac{1}{2}\right)-\right.\\&\left.-\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}1+\frac{1}{2}\right)\right]-\\&-\left[\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}0+\frac{1}{2}\right)-\right.\\&\left.-\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}0+\frac{1}{2}\right)\right]=\\&=\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]-\\&-\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

Задача 8. Найти плотность совместного распределения $f(x,y)$ по известной функции распределения

$$F(x,y)=\sin x\sin y\qquad\left(0\le x\le\frac{\pi}{2};\quad 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right).$$

Решение. Плотность совместного распределения находится по формуле:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Найдем $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\cos x\sin y$, тогда

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}=\cos x\cos y \quad (0\le x\le \pi/2; \quad 0\le y\le \pi/2).$$

Задачи для решения

1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

y / x	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,3	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих.

2. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X<1/2$ при этом составляющая Y примет значение $Y<1/3$, если известна функция распределения системы

$$F(x,y)=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2y+\frac{1}{2}\right).$$

3. Найти вероятность попадания случайной точки (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=\pi/4$, $x=\pi/2$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$. Если известна функция распределения $F(x,y)=\sin x\sin y$ $(0<x<\pi/2)$.

4. Найти вероятность попадания случайной величины (X,Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=3$, $y=5$, если известна функция распределения

$$F(x,y)=\begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y} & \text{при} \quad x\ge 0, \quad y\ge 0;\\ 0 & \text{при} \quad x<0 \quad \text{или} \quad y<0.\end{cases}$$

5. Найти плотность распределения системы двух случайных величин по известной функции распределения

$$F(x,y)=(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}) \quad (x<0, \quad y<0).$$

6. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} & \text{при} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы.

7. Задана двумерная случайная величина (X, Y):

y / x	$y_1 = 2$	$y_2 = 5$	$y_3 = 8$
$x_1 = 0,4$	0,15	0,30	0,35
$x_2 = 0,8$	0,05	0,12	0,03

Найти корреляционный момент и коэффициент корреляции.

8*. Найти законы распределения составляющих, если задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

y / x	y_1	y_2	y_3
x_1	0,12	0,18	0,10
x_2	0,10	0,11	0,39

9*. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной случайной величины примет значение $X < 2$, при этом составляющая Y примет значение $Y < 3$, если известна функция распределения системы

$$F(x,y) = \frac{(x-4)(y-10)}{10}.$$

10*. Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \pi/4$, $y = \pi/6$, $y = \pi/4$, если задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y) = \begin{cases} \sin x \sin y & \text{при} \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad 0 \leq y \leq \pi/2; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

11*. Найти двумерную плотность вероятности системы (X, Y), если задана функция распределения двумерной случайной величины:

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-2y}) & \text{при} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0; \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \quad \text{или} \quad y < 0. \end{cases}$$

Глава 3. Элементы математической статистики

3.1. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма

Выборочной совокупностью (или *выборкой*) называется совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности.

Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, ..., x_k – n_k раз, и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, где n – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке – *вариационным рядом.* Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $n_i/n = w_i$ – *относительными частотами.*

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Эмпирической функцией распределения называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = n_x/n,$$

где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Эмпирическая функция обладает следующими **свойствами**.

1. *Значения эмпирической функции принадлежат отрезку* $[0; 1]$.

2. $F^*(x)$ *– неубывающая функция.*

3. *Если* x_1 *– наименьшая варианта, а* x_k *– наибольшая, то* $F^*(x) = 0$ *при* $x \leq x_1$, $F^*(x) = 1$ *при* $x > x_k$.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k), где x_i – варианты выборки, n_i – соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, w_1), (x_2, w_2), ..., (x_k, w_k), где x_i – варианты выборки, w_i – соответствующие им относительные частоты.

В случае непрерывного признака весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала значение n_i – сумму частот вариант, попавших в i-й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (*плотность частоты*).

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению w_i/h (*плотность относительной частоты*).

Образцы решения задач

Задача 1. Задано распределение частот выборки объема $n = 20$:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написать распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки: $w_1 = 3/20 = 0,15$; $w_2 = 10/20 = 0,50$; $w_3 = 7/20 = 0,35$. Тогда

x_i	2	6	12
w_i	0,15	0,50	0,35

Контроль: $0,15 + 0,50 + 0,35 = 1$.

Задача 2. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Решение. Найдем объем выборки $n = 12 + 18 + 30 = 60$.

Наименьшая варианта равна 2, следовательно,

$$F^*(x) = 0 \text{ при } x \leq 2.$$

Значение $x < 6$, а именно $x_1 = 2$, наблюдалось 12 раз, следовательно,

$$F^*(x) = 12/60 = 0,2 \text{ при } 2 < x \leq 6.$$

Значение $x < 10$, а именно $x_1 = 2$; $x_2 = 6$, наблюдались 12+18=30 раз, следовательно, $F^*(x) = 30/60 = 0,5$ при $6 < x \leq 10$.

Так как $x_3 = 10$ наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > 10$.

Искомая эмпирическая функция

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 2; \\ 0,2 & \text{при} \quad 2 < x \leq 6; \\ 0,5 & \text{при} \quad 6 < x \leq 10; \\ 1 & \text{при} \quad x > 10. \end{cases}$$

Построим график эмпирической функции распределения (рис. 8).

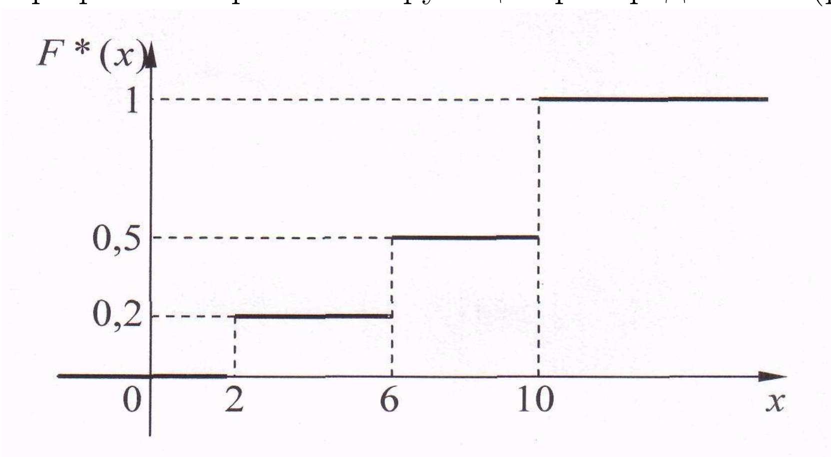

Рис. 8

Задача 3. Построить полигоны частот и относительных частот распределения:

x_i	1	3	5	7	9
n_i	10	15	30	33	12

Решение. Для построения полигона частот на оси абсцисс отложим варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие частоты n_i. Точки

(x_i, n_i), $i = \overline{1, 5}$; соединим отрезками прямых (рис. 9).

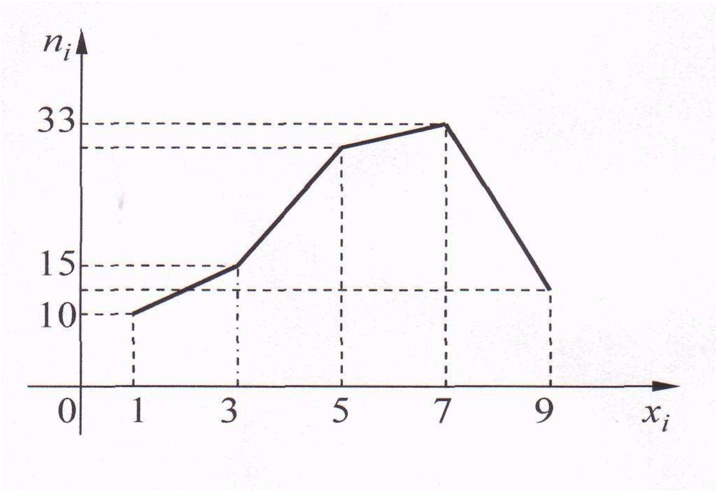

Рис. 9

Для построения полигона относительных частот предварительно найдем распределение относительных частот, для чего разделим частоты на объем выборки $n = 100$:

x_i	1	3	5	7	9
w_i	0,1	0,15	0,3	0,33	0,12

Контроль: $0,1 + 0,15 + 0,3 + 0,33 + 0,12 = 1$.

Построим полигон относительных частот (рис. 10).

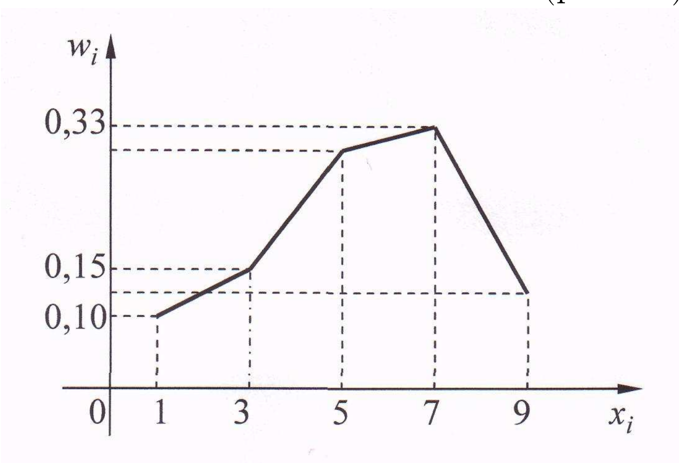

Рис. 10

Задача 4. Построить гистограммы частот и относительных частот распределения:

Частичный интервал, h	Сумма частот, n_i
2 – 5	9
5 – 8	10
8 – 11	25
11 – 14	6

Решение. Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии n_i/h. Удобно пользоваться таблицей:

Частичный интервал $h = 3$	Сумма частот вариант n_i	Плотность частоты n_i/h
2 – 5	9	3
5 – 8	10	10/3
8 – 11	25	25/3
11 – 14	6	2

Построим гистограмму частот (рис. 11).

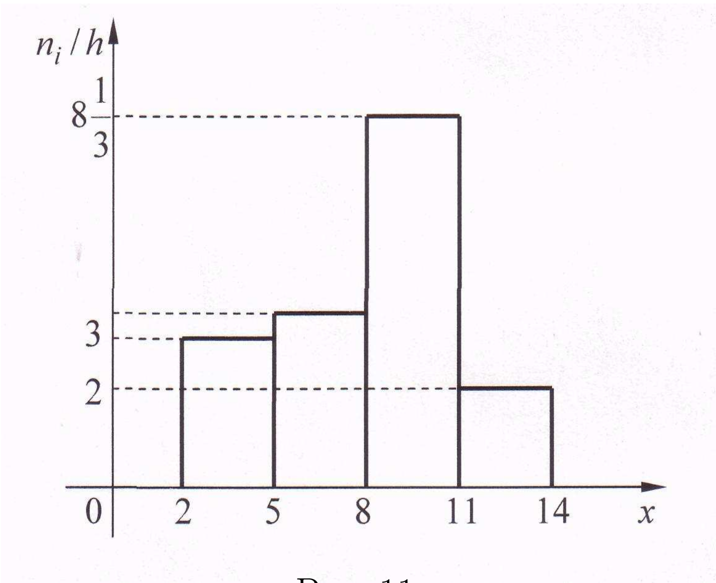

Рис. 11

Для построения гистограммы относительных частот (рис. 12) найдем относительные частоты и соответствующие им плотности: $n = \sum n_i =$

$= 50$, $w_1 = 9/50 = 0,18$; $w_2 = 10/50 = 0,20$; $w_3 = 25/50 = 0,50$; $w_4 = 6/50 = 0,12$.

Контроль: $0,18 + 0,20 + 0,50 + 0,12 = 1$.

Плотности относительных частот:

$$w_1/h = 0,18/3 = 0,06 = 18/300; \quad w_2/h = 0,20/3 = 2/30 = 20/300;$$

$$w_3/h = 0,50/3 = 5/30 = 50/300; \quad w_4/h = 0,12/3 = 0,04 = 12/300.$$

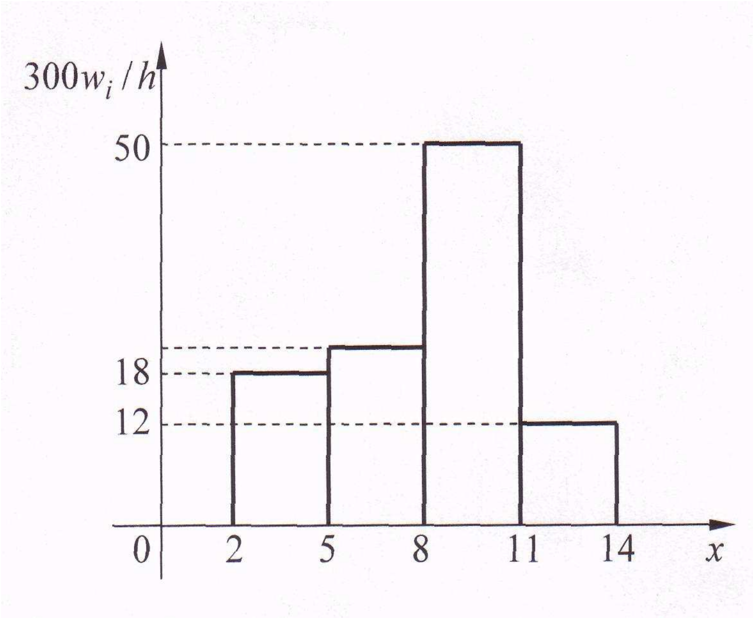

Рис. 12

Задачи для решения

1. Записать выборку 5, 3, 7, 10, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4 в виде вариационного ряда.

2. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	2	5	7
n_i	1	3	6

Найти распределение относительных частот.

3. Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

4. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

5. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	7	10
n_i	15	20	10	10	45

6. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объема $n = 100$:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
1	1 – 5	10	
2	5 – 9	20	
3	9 – 13	50	
4	13 – 17	12	
5	17 – 21	8	

7. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Сумма относительных частот интервала w_i	Плотность относительной частоты w_i/h
1	0 – 2	20		
2	2 – 4	30		
3	4 – 6	50		

8*. Записать выборку $-1, 0, 3, 5, -1, 0, -3, -3$ в виде вариационного ряда.

9*. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	4	7	8	12
x_i	5	2	3	10

Найти распределение относительных частот.

10*. Найти эмпирическую функцию по данному распределению:

а)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

б)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

11*. Построить полигон частот по данному распределению:

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

12*. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	20	40	65	80
n_i	10	20	30	40

13*. Построить гистограмму частот по данному распределению:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Сумма относительных частот интервала w_i	Плотность относительной частоты w_i/h
1	10 – 15	3		
2	15 – 20	4		
3	20 – 25	8		
4	25 – 30	5		

14*. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_i - x_{i+1}$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты n_i/h
1	3 – 5	4	
2	5 – 7	6	
3	7 – 9	20	
4	9 – 11	40	
5	11 – 13	20	
6	13 – 15	4	
7	15 – 17	6	

3.2. Статистические оценки параметров распределения

Статистической оценкой Θ^* неизвестного параметра Θ теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом.

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая стремится по вероятности к оцениваемому параметру при $n \to \infty$.

Генеральной средней $\overline{x}_\text{г}$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности:

$$\overline{x}_\text{г} = \Big(\sum_{i=1}^{k} x_i N_i\Big)/N, \quad N = \sum_{i=1}^{k} N_i,$$

где x_i – значения признака, N_i – соответствующие им частоты, N – объем генеральной совокупности.

Выборочной средней $\overline{x}_\text{в}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности:

$$\overline{x}_\text{в} = \Big(\sum_{i=1}^{k} x_i n_i\Big)/n, \quad n = \sum_{i=1}^{k} n_i,$$

где x_i – варианта выборки, n_i – частота варианты x_i, n – объем выборки.

Выборочная средняя является несмещенной оценкой генеральной средней.

Замечание 1. *Если первоначальные варианты x_i – большие числа, то для упрощения вычисления выборочной средней целесообразно вычесть из каждой варианты одно и тоже число C, то есть перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$ (в качестве C выгодно принять число, близкое к выборочной средней; поскольку выборочная средняя неизвестна, число C выбирают «на глаз»). Тогда*

$$\overline{x}_\text{в} = C + \overline{x}_u = C + \Big(\sum_{i=1}^{k} n_i u_i\Big)/n.$$

Генеральной дисперсией $D_г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x}_г$:

$$D_г = \Big(\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_г)^2\Big)/N.$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (*стандартом*) называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}\ .$$

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x}_в$:

$$D_в = \Big(\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x}_в)^2\Big)/n.$$

При вычислении дисперсии удобно пользоваться формулой:

$$D_в = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum n_i x_i}{n}\right)^2.$$

Выборочным средним квадратическим отклонением (*стандартом*) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}\ .$$

Замечание 2. *Если первоначальные варианты x_i – большие числа, то при нахождении выборочной дисперсии целесообразно вычесть из всех вариант одно и то же число C, равное выборочной средней или близкое к ней, то есть перейти к условным вариантам $u_i = x_i - C$. Тогда $D_в(X) = D_в(U)$.*

Замечание 3. *Если первоначальные варианты являются десятичными дробями с k десятичными знаками после запятой, то, чтобы избежать действий с дробями, умножают первоначальные варианты на постоянное число $C = 10^k$, то есть переходят к условным вариантам $u_i = Cx_i$. Тогда $D_в(X) = D_в(U)/C^2$.*

Выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии, так как

$$M\,(D_в) = \frac{n-1}{n}\,D_г.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии является *исправленная выборочная дисперсия*:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\, D_{\text{в}}.$$

Исправленным средним квадратическим отклонением называется корень квадратный из исправленной дисперсии:

$$S = \sqrt{S^2}.$$

Образцы решения задач

Задача 1. Выборочная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Найти: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию; в) выборочное среднее квадратичное отклонение.

Решение. а) Найдем объем выборки

$$n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 20 + 15 + 10 + 5 = 50.$$

Используя формулу $\overline{x}_{\text{в}} = \Big(\sum\limits_{i=1}^{4} n_i x_i\Big)/n$, вычислим выборочную среднюю

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{50} = \frac{100}{50} = 2.$$

б) Дисперсию можно искать двумя способами.

1 способ. Будем использовать формулу

$$D_{\text{в}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_{\text{в}})^2 n_i\Big)/n,$$

тогда

$$D_{\text{в}} = \frac{20(1-2)^2 + 15(2-2)^2 + 10(3-2)^2 + 5(4-2)^2}{50} = \frac{50}{50} = 1.$$

2 способ. Воспользуемся формулой

$$D_{\text{в}} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2, \text{ где } \overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}, \ \overline{x^2} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n}.$$

Тогда

$$\overline{x} = \frac{20 \cdot 1 + 15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20 + 15 + 10 + 5} = 2,$$

$$\overline{x^2} = \frac{20 \cdot 1^2 + 15 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2}{20 + 15 + 10 + 5} = 5,$$

$$D_{\text{в}} = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 5 - 2^2 = 1.$$

в) Среднее квадратичное отклонение: $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = 1$.

Задача 2. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 20$:

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

Решение. Перейдем к условным вариантам $u_i = 10x_i$. Получим распределение:

u_i	1	5	7	9
n_i	6	12	1	1

Найдем исправленную выборочную дисперсию условных вариантов

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2 - \left[\sum n_i u_i\right]^2 / n}{n - 1} = \frac{439 - 82^2/20}{20 - 1} \approx 5,41.$$

Тогда $S_x^2 = S_u^2/10^2 = 5,41/100 = 0,0541$.

Задачи для решения

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

варианта x_i	2	5	7	10
частота n_i	16	12	8	14

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

2. Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

3. По выборке объема $n = 41$ найдена смещенная оценка $D_в = 3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

4. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором получены следующие результаты (в мм): 92, 94, 103, 105, 106. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсию ошибок прибора.

5. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	186	192	194
n_i	2	5	3

6. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 50$:

x_i	0,1	0,5	0,6	0,8
n_i	5	15	20	10

7. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки $n = 10$:

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

8. Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

9. На телефонной станции производились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты:

3	1	3	4	2	1	1	3	2	7	2	0
2	4	0	3	0	2	0	1	3	3	1	2
2	0	2	1	4	3	4	2	0	2	3	1
3	1	4	2	2	1	2	5	1	1	0	1
1	2	1	0	3	4	1	2	2	1	1	5

Найти среднее и дисперсию распределения.

10.* Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 60$:

варианта x_i	1	8	6	26
частота n_i	8	40	10	2

Найти несмещенную оценку генеральной средней.

11.* Найти выборочную среднюю по данному распределению выборки объема $n = 20$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

12.* По выборке объема $n = 51$ найдена смещенная оценка $D_в = 5$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

13.* В итоге четырех измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие результаты: 8, 9, 11, 12. Найти: а) выборочную среднюю результатов измерений; б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

14.* Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 100$:

x_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

15.* Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$:

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

16.* В таблице приведены измерения параметра транзистора

Номер транзистора	Значения параметра	Номер транзистора	Значения параметра
1	4,40	11	4,32
2	4,31	12	4,42
3	4,40	13	4,60
4	4,40	14	4,35
5	4,65	15	4,50
6	4,56	16	4,40
7	4,71	17	4,43
8	4,54	18	4,48
9	4,34	19	4,42
10	4,56	20	4,45

Найти выборочное среднее значение параметра, выборочную дисперсию и несмещенную оценку генеральной дисперсии.

17.* Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 100$:

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

3.3. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Надежностью (*доверительной вероятностью*) оценки Θ по Θ^* называют вероятность γ, с которой выполняется неравенство $|\Theta - \Theta^*| < \delta$. Положительное число δ характеризует *точность оценки.*

Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает неизвестный параметр.

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\overline{x}_\text{в}$ при известном среднем квадратичном отклонении δ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x}_\text{в} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_\text{в} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $t\sigma/\sqrt{n} = \delta$ – точность оценки, n – объем выборки, t – значение функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$.

Замечание. *Если требуется оценить математическое ожидание с наперед заданной точностью δ и надежность γ, то минимальный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по формуле*

$$n = t^2\sigma^2/\delta^2$$

(следствие равенства $\delta = t\sigma/\sqrt{n}$).

Задачи для решения

1. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,95$ неизвестного математического ожидания a, нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\overline{x}_\text{в} = 14$ и объем выборки $n = 25$.

2. Найти минимальный объем выборки при котором с надежностью 0,975 точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней равна $\delta = 0,3$; если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,2$ нормально распределенной генеральной совокупности.

3. Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $\sigma = 40$ м произведено пять равноточных измерений от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния a до цели с надежностью $\gamma = 0,95$; зная среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}_{\text{в}} = 2000$ м. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

4.* Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,99$ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если известны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}} = 10,2$; объем выборки $n = 16$.

5.* Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью 0,925 точность оценки математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности по выборочной средней равна 0,2; если известно среднее квадратическое отклонение генеральной совокупности $\sigma = 15$.

6.* Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 часов. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности a горения ламп всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ часов. Предполагается, что продолжительность горения лампы распределена нормально.

3.4. Статистическая проверка статистических гипотез

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (*альтернативной*) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Различают гипотезы, которые содержат одно и более одного предположений.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение.

Сложной называют гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В итоге статистической проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* (*уровнем существенности*) и обозначают через α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают через β.

Статистическим критерием (или просто *критерием*) называют случайную величину (t, F, χ^2) которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (эмпирическим) значением ($t_{\text{набл.}}$, $F_{\text{набл.}}$, $\chi^2_{\text{набл.}}$) называют то значение критерия, которое вычислено по выборкам.

Критической областью называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (*областью допустимых значений*) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: *если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу принимают.*

Критерий χ^2 («хи-квадрат») К. Пирсона позволяет установить степень соответствия эмпирически наблюдаемых и теоретически ожидаемых данных и определить степень соответствия двух вариационных рядов.

Наиболее общая формула критерия χ^2 имеет вид

$$\chi^2 = \sum \frac{(\text{Э - Т})^2}{\text{Т}}, \qquad (1)$$

где Э – эмпирические данные, фактически наблюдаемая величина; Т – теоретические данные (математическое ожидание события).

Замечание 1. *Из формулы* (1) *видно, что при уменьшении расхождения между эмпирическими и теоретическими данными значение* χ^2 *уменьшается и обращается в нуль при полном их совпадении.*

Оценка достоверности различия между сравниваемыми данными производится по общему правилу оценки нулевых гипотез с помощью специальной таблицы (приложение 4) при выбранном уровне значимости: если $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{\text{кр.}}$, различие считается существенным и нулевая гипотеза отбрасывается.

Число степеней свободы в общем случае вычисляется по формуле $k = s - 1 - r$, где s – число групп (частичных интервалов) выборки; r – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки.

В частности, если предполагаемое распределение – нормальное, то оценивают два параметра (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение), поэтому $r = 2$ и число степеней свободы $k = s-1-r = s - 1 - 2 = s - 3$. Если же предполагают, что генеральная совокупность распределена по показательному закону, то оценивают один параметр λ, поэтому $r = 1$ и $k = s - 2$.

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_s
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_s

Сформулируем **правило проверки нулевой гипотезы**.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α *проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:*

1. Вычислить непосредственно (при малом числе наблюдений) или упрощенным методом (при большом числе наблюдений) выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$ *и выборочное среднее квадратическое отклонение* $\sigma_{\text{в}}$.

2. Вычислить теоретические частоты

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_{\text{в}}}\,\varphi(u_i),$$

где n – объем выборки (сумма всех частот), h – шаг (разность между двумя соседними вариантами),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}, \quad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-u^2/2}.$$

3. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью **критерия Пирсона**. *Для этого:*

а) составляют расчетную таблицу (см. табл. 3.2), по которой находят наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}; \qquad (2)$$

б) по таблице критических точек распределения χ^2, по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s – число групп выборки) находят критическую точку $\chi^2_{\textit{кр.}}(\alpha; k)$ критической области.

Если $\chi^2_{\textit{набл.}} < \chi^2_{\textit{кр.}}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2_{\textit{набл.}} > \chi^2_{\textit{кр.}}$ – гипотезу отвергают. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Замечание 2. *Малочисленные частоты ($n_i < 5$) следует объединить; в этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы по формуле $k = s - 3$ следует в качестве s принять число групп выборки, оставшихся после объединения частот.*

Замечание 3. *Для контроля вычислений формулу (2) преобразуют к виду $\chi^2_{\text{набл.}} = \left[\sum n_i^2/n'_i\right] - n$.*

Образцы решения задач

Задача 1. При многогибридном скрещивании томатов с желтым и красным плодом теоретически (по закону Менделя) ожидается соотношение 3:1. В действительности из 400 плодов получено 310 красных и 90 желтых (вместо ожидаемых 300:100). Оцените, имеется ли в этом опыте существенное отклонение от закона Менделя?

Решение. Используя формулу (1), получаем

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \frac{(310-300)^2}{300} + \frac{(90-100)^2}{100} = 1,33.$$

При $k = 2 - 1 = 1$ теоретическое значение $\chi^2_{\text{кр.}}(0,05; 5) = 3,841$ (приложение 4), откуда $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{кр.}}$, отклонение не существенно, то есть полученное соотношение 310:90 не противоречит закону Менделя.

Задача 2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Решение.

1. Найдем выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}} = 12,63$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\text{в}} = 4,695$.

2. Вычислим теоретические частоты, учитывая, что $n = 200$, $h = 2$, $\sigma_{\text{в}} = 4,695$, по формуле

$$n'_i = \frac{nh}{\sigma_{\text{в}}} \cdot \varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4,695} \cdot \varphi(u_i) = 85,2\,\varphi(u_i).$$

Составим расчетную табл. 3.1 (значения функции $\varphi(u_i)$ помещены в приложении 1).

3. Сравним эмпирические и теоретические частоты.

а) Составим расчетную табл. 3.2 из которой найдем наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i.$$

Таблица 3.1

i	x_i	$u_i = (x_i - \overline{x}_{\text{в}})/\sigma_{\text{в}}$	$\varphi(u_i)$	$n'_i = 85,2\varphi(u_i)$
1	5	$-1,62$	0,1074	9,1
2	7	$-1,20$	0,1942	16,5
3	9	$-0,77$	0,2966	25,3
4	11	$-0,35$	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

Таблица 3.2

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	$-0,3$	0,09	0,0
4	30	32,0	$-2,0$	4,00	0,1
5	26	33,9	$-7,9$	62,41	1,8
6	21	29,8	$-8,8$	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
Σ	200	200			$\chi^2_{\text{набл.}} = 22,2$

Из табл. 3.2 находим $\chi^2_{\text{набл.}} = 22,2$.

б) По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 4), по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$ находим критическую точку

$$\chi^2_{\text{кр.}}(0,05; 6) = 12,6.$$

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{\text{кр.}}$ – гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Задача 3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,01 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n'_i:

n_i	8	16	40	72	36	18	10
n'_i	6	18	36	76	39	18	7

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия Пирсона:

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum (n_i - n'_i)^2 / n'_i.$$

Составим расчетную табл. 3.3.

Таблица 3.3

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$
1	8	6	2	4	0,667
2	16	18	-2	4	0,222
3	40	36	4	16	0,444
4	72	76	-4	16	0,211
5	36	39	-3	9	0,231
6	18	18	0	0	0
7	10	7	3	9	1,286
Σ	200	200			$\chi^2_{\text{набл.}} = 3,061$

Из таблицы 3.3 наблюдаемое значение критерия: $\chi^2_{\text{набл.}} = 3,061$. По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 4), по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$ находим критическую точку $\chi^2_{\text{кр.}}(0,01; 4) = 13,3$.

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{кр.}}$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами незначимо (случайно).

Задача 4. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмп. частоты	6	13	38	74	106	85	30	14
теорет. частоты	3	14	42	82	99	76	37	13

Решение. Вычислим $\chi^2_{\text{набл.}}$, для чего составим расчетную таблицу 3.4.

Таблица 3.4

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$	n_i^2	n_i^2/n'_i
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	-1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	-4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	-8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	-7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
Σ	366	366			$\chi^2_{\text{набл.}} = 7,19$		373,19

Контроль: $\chi^2_{\text{набл.}} = 7,19$: $\left[\sum n_i^2/n'_i\right] - n = 373,19 - 366 = 7,19.$

Вычисления произведены правильно.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариант) $s = 8$; $k = 8 - 3 = 5$. По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 4), по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = 5$ находим $\chi^2_{\text{кр.}}(0,05; 5) = 11,1$.

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{кр.}}$ – нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Задачи для решения

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n = 200$:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
n_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими n_i и теоретическими частотами n_i', которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

а)

n_i	5	10	20	8	7
n_i'	6	14	18	7	5

б)

n_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
n_i'	5	9	14	16	18	16	9	6	7

в*)

n_i	14	18	32	70	20	36	10
n_i'	10	24	34	80	18	22	12

г*)

n_i	5	7	15	14	21	16	9	7	6
n_i'	6	6	14	15	22	15	8	8	6

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 тыс. руб. каждая, три книги – по 1 тыс. руб. и две книги – по 3 тыс. руб. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 тыс. руб.

2. Три станка работают независимо. Вероятности того, что в течение смены первый, второй и третий станки выйдут из строя, равны соответственно 0,05; 0,1; 0,15. Найти вероятность того, что за смену выйдет из строя только один станок.

3. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил цель из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

4. Требуется найти вероятность того, что в четырех независимых испытаниях событие появится не менее двух раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,1.

5. Сто станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 80 станков; б) от 60 до 80 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,002. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) трех изделий; б) от 2 до 4 изделий.

Вариант 2

1. В ящике 5 изделий первого сорта, 3 – второго и 2 – третьего сорта. Для контроля из ящика наудачу берут 6 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажется 2 детали первого сорта и 2 детали второго сорта.

2. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего

элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно будут работать только два элемента.

3. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причем стандартных деталей в первом ящике 13, а во втором 18. Из второго ящика извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. После этого из первого ящика извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найти вероятность того, что из второго ящика в первый была переложена стандартная деталь.

4. Требуется найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях событие появится менее трех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,2.

5. Двести станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 130 станков; б) от 110 до 130 станков.

6. Завод отправил на базу 3000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,001. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 5 до 7 изделий.

Вариант 3

1. В ящике 12 белых и 8 черных шаров. Наудачу взяли 6 шаров. Какова вероятность того, что среди них 4 белых шара.

2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого и 0,9 для второго сигнализатора. Найти вероятность того, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

3. В ящике 50 деталей, из них 40 высшего сорта. Наудачу извлекается одна, а затем вторая деталь, оказавшаяся высшего сорта. Определить вероятность того, что и первая деталь была высшего сорта.

4. Требуется найти вероятность того, что в шести независимых испытаниях событие появится не более четырех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,3.

5. Сто станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 70 станков; б) от 50 до 70 станков.

6. Завод отправил на базу 6000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0001. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 1 до 3 изделий.

Вариант 4

1. В ящике 15 деталей, из которых 4 бракованных. Наудачу взяли 3 детали. Какова вероятность того, что среди них 2 детали бракованные.

2. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

3. Сборщик получил две коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом 1, и три коробки таких же деталей, изготовленных заводом 2. Вероятность того, что деталь заводов 1 и 2 стандартная, равна соответственно 0,9 и 0,8. Из наудачу взятой коробки сборщик взял деталь, которая оказалась стандартной. Определить вероятность того, что взятая деталь изготовлена заводом 1.

4. Требуется найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях событие появится не менее четырех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,4.

5. Двести станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 150 станков; б) от 130 до 150 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0008. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) трех изделий; б) от 2 до 5 изделий.

Вариант 5

1. В урне 4 белых и 6 черных шаров. Из урны вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что выбранные шары разных цветов.

2. Два стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,9, а вторым – 0,8. Найти вероятность того, что мишень поразит только один стрелок.

3. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения стандартной детали на первом автомате равна 0,95; а на втором – 0,8. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на первом автомате.

4. Требуется найти вероятность того, что в шести независимых испытаниях событие появится более четырех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,5.

5. Триста станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 250 станков; б) от 230 до 250 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0005. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 3 до 5 изделий.

Вариант 6

1. В ящике 20 деталей, из которых 12 стандартных. Из ящика взяли 6 деталей. Найти вероятность того, что их них 4 детали стандартные.

2. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашенных. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одна деталь окрашена.

3. Сборщик получил три ящика деталей. В первом ящике 40 деталей, из них 20 высшего сорта, во втором 50 деталей, из них 10 высшего сорта, в третьем 30 деталей, из них 12 высшего сорта. Из наудачу взятого ящика извлечена деталь высшего сорта. Определить вероятность того, что эта деталь извлечена из первого ящика.

4. Требуется найти вероятность того, что в четырех независимых испытаниях событие появится менее трех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,6.

5. Двести станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 180 станков; б) от 150 до 170 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0004. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) трех изделий; б) от 1 до 3 изделий.

Вариант 7

1. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Из урны наудачу вынимают 2 шара. Какое событие более вероятно: а) шары одного цвета; б) шары разных цветов?

2. Найдите вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 2, либо 5.

3. Имеется три ящика деталей, причем бракованных в первом, втором и третьем ящиках соответственно 25%, 20% и 15%. Наудачу взятая деталь из наудачу взятого ящика оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь извлечена из первого ящика.

4. Требуется найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях событие появится более трех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,7.

5. Четыреста станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 260 станков; б) от 230 до 250 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0003. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) одного изделия; б) от 2 до 3 изделий.

Вариант 8

1. В лотерее 10 билетов, из них 5 билетов выигрышных. Наудачу берется 2 билета. Найти вероятность того, что оба билета выигрышные.

2. В ящике 40 деталей, из них 10 высшего сорта. Наудачу извлечены 2 детали. Найти вероятность того, что среди них высшего сорта хотя бы одна деталь.

3. Из 100 деталей 60 первого, 30 второго и 10 третьего сорта. Вероятность брака среди деталей первого, второго и третьего сорта соответственно равна 0,01; 0,03; и 0,05. Наудачу взятая деталь оказалась небракованной. Найти вероятность того, что взята деталь первого сорта.

4. Требуется найти вероятность того, что в шести независимых испытаниях событие появится не менее четырех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,8.

5. Четыреста станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 300 станков; б) от 270 до 290 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0006. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) четырех изделий; б) от 3 до 4 изделий.

Вариант 9

1. В ящике 10 деталей, среди которых 6 стандартных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что все три детали стандартные.

2. Вероятность того, что стандартная деталь находится в первом и втором ящиках, равна соответственно 0,6 и 0,8. Сборщик взял из каждого ящика по одной детали. Какова вероятность того, что из них хотя бы одна деталь стандартная.

3. Сборщик получил 100 деталей, из них 50 деталей изготовлены заводом 1, 30 деталей – заводом 2, 20 деталей – заводом 3. Заводы 1, 2, 3 выпускают деталей отличного качества соответственно 70%, 80%, 90%. Наудачу взятая сборщиком деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена заводом 1.

4. Требуется найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях событие появится менее четырех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,9.

5. Четыреста станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,9. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 370 станков; б) от 350 до 370 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0007. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) трех изделий; б) от 1 до 4 изделий.

Вариант 10

1. Студент знает 40 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что из двух содержащихся в экзаменационном билете вопросов студент знает оба вопроса.

2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

3. По шоссе в среднем проезжает легковых машин вдвое больше, чем грузовых. Вероятность того, что легковая машина будет заправляться, равна 0,1; для грузовой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке для заправки подъехала машина. Найти вероятность того, что это легковая машина.

4. Требуется найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях событие появится более трех раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна 0,1.

5. Пятьсот станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого их них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 410 станков; б) от 390 до 410 станков.

6. Завод отправил на базу 1000 доброкачественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,0002. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 2 до 5 изделий.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 9 очков, в зону 2 – 4 очка, в зону 3 – 2 очка. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,3; 0,2; 0,5. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	12	14	18	24	27
p_i	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; 1/2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 10$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(8; 20)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 8$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2\sin x, & 0 < x \le \pi/3; \\ 0, & x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 2

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 7 очков, в зону 2 – 4 очка, в зону 3 – 1 очко. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,2; 0,2; 0,6. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	10	13	17	19	22
p_i	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ (x^2 - x)/2, & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(1; 1,5)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 7$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(3; 13)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 6$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 2x - 2, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 3

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 6 очков, в зону 2 – 4 очка, в зону 3 – 1 очко. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,3; 0,2; 0,5. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	120	135	150	180	185
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^3, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; 1/2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 8$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(4; 14)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 6$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ (2/3)x - (2/9)x^2, & 0 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 4

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 5 очков, в зону 2 – 4 очка, в зону 3 – 2 очка. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,4; 0,2; 0,4. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	1,4	2,2	3,5	4,1	5,2
p_i	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \leq 1/3; \\ 1, & x > 1/3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; 1/4)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 9$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(5; 15)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 8$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 5

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 6 очков, в зону 2 – 3 очка, в зону 3 – 1 очко. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,4; 0,1; 0,5. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	12,6	13,4	15,2	17,4	18,6
p_i	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ x/2 - 1, & 2 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(2; 3)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 10$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(6; 16)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 10$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ (1/2)\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 6

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 8 очков, в зону 2 – 3 очка, в зону 3 – 2 очка. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,3; 0,3; 0,4. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	15	20	25	30	35
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2/9, & 0 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(1; 2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 11$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(7; 17)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 6$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2; \\ (1/2)\cos x, & -\pi/2 < x \le \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 7

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 8 очков, в зону 2 – 5 очков, в зону 3 – 3 очка. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,2; 0,4; 0,4. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	44	52	60	73	82
p_i	0,6	0,1	0,1	0,1	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2/4, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(1;2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 12$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(8;18)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 10$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 3x^2, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 8

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 9 очков, в зону 2 – 2 очка, в зону 3 – 1 очко. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,1; 0,5; 0,4. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	115	135	150	175	180
p_i	0,1	0,5	0,2	0,1	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 6; \\ x/3 - 2, & 6 < x \le 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(7; 8)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 13$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(9; 19)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 4$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ (2/9)x, & 0 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 9

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 10 очков, в зону 2 – 4 очка, в зону 3 – 1 очко. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,2; 0,3; 0,5. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	4,6	5,2	6,8	7,2	8,4
p_i	0,3	0,3	0,1	0,2	0,1

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ x^3 + 1, & -1 < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1/2; 0)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 14$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(10; 20)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 10$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x, -\pi/2; \\ -\sin x, & -\pi/2 < x \le 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Вариант 10

1. Мишень разделена на зоны 1, 2, 3. За попадание в зону 1 дается 8 очков, в зону 2 – 5 очков, в зону 3 – 2 очка. Для данного стрелка вероятности попадания в зоны 1, 2, 3 равны соответственно 0,3; 0,1; 0,6. Найти закон распределения числа X очков, получаемых стрелком при двух независимых выстрелах, и функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

2.Найти: а) математическое ожидание, б) дисперсию, в) среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X по закону ее распределения, заданному рядом распределения.

x_i	35	45	55	65	75
p_i	0,1	0,1	0,1	0,4	0,3

3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^4, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; 1/2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 15$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(11; 21)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 6$.

5. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ (1/2)x, & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Ответы

1.1.

1. $3/28$ **2.** 0,6 **3.** $1/60$ **4.** $1/625$ **5.** $1/720$ **6.** 0,5 **7.** $24/145$ **8.** $C_5^k C_{31}^{5-k}/C_{36}^5$ **9.** 0,9 **10.** $1/720$ **11.** а) 0,008; б) 0,384; в) 0,512 **12.** 20 **13.** 84 **14.** а) $N = 60$; б) 0,6 **15*.** 0,1 **16*.** 0,1 **17*.** $1/30$ **18*.** $1/625$ **19*.** $1/720$ **20*.** $16/595$ **21*.** $14/55$ **22*** $C_6^k C_{43}^{6-k}/C_{49}^6$ **23*.** 180 **24*.** 0,01 **25*.** 0,81 **26*.** $1/n$ **27*.** а) $2^{2r}C_n^{2r}/C_{2n}^{2r}$; б) $n2^{2r-2}C_{n-1}^{2r-2}/C_{2n}^{2r}$ **28*.** $12!/12^{12} = 0,0000537$ **29*.** 55 **30*.** 126 **31*.** а) 5040; б) 10000; в) 1/5040 или 1/10000

1.2.

1. $2/\pi \approx 0,63$ **2.** $(1 + 3\ln 2)/8 \approx 0,38$ **3.** $(a - r)/a$ **4.** 0,3125 **5*.** 0,75 **6*.** $\approx 0,2$ **7*.** 0,5 **8*.** 0,121

1.3.

1. 0,92 **2.** $3/8$ **3.** $1/22$ **4.**а) 0,648; б) 0,954 **5.** $7/15$ **6.** а) 0,024; б) 0,976; в) 0,452 **7.** 0,25 **8.** 0,6 **9*.** 0,94; 0,9964 **10*.** $1/12$ **11*.** 0,2 **12*.** $57/115 \approx 0,496$ **13*.** 0,5 **14*.** а) 0,46; б) 0,42; в) 0,88; г) 0,12; д) 0,58 **15*.** 0,154 **16*.** а) 0,48; б) 0,46. **17*.** 0,259

1.4.

1. 0,5 **2.** 0,25 **3.** а) 0,307; б) 0,002 **4.** Звездочет должен в одну урну положить один белый шар, а все остальные шары – во вторую урну **5.** $7/17$ **6.** а) 0,91; б) 0,444 **7*.** 0,85 **8*.** $7/24$ **9*.** а) 0,476; б) 0,048 **10*.** 0,86 **11*.** $8/29$; $9/29$; $12/29$ **12*.** 0,4 **13*.** 0,0715 **14*.** 0,1602 **13*.** 0,0225

1.5.

1. $3/8$ **2.** а) $96/625$ б) $513/625$ в) $112/625$ **3.** 5 **4.** а) 0,0208; б) 0,0208; в) 0,84196 **5.** а) 0,224042; б) 0,199148; в) 0,57681; г) $k_0 = 3$; $P = 0,224042$ **6.** 0,9445 **7.** а) 0,09; б) 0,25 **8*.** 0,243 **9*.** а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52 **10*.** 5; $\approx 0,25$ **11*.** в) 0,6826 **12*.** а) 0,06313; б) 0,367879; в) 0,981011; г) 0,018989 **13*.** 0,9876 **14*.** а) 0,0113; б) 0,0252; в) 0,897; г) 0,794

2.1.

1.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/64

2.

x_i	-3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
p_i	0,008	0,036	6,06	0,054	0,18	0,027	0,15	0,135	0,225	0,125

3.

x_i	3	2	1	0
p_i	1/216	15/216	75/216	125/216

4.

x_i	0	1	2
p_i	1/45	16/45	28/45

5.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,010	0,077	0,230	0,346	0,259	0,078

6*.

x_i	3	4	5	6	7
p_i	1/6	1/6	1/3	1/6	1/6

7*.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

8*.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

9*.

x_i	0	1	2	3
p_i	0	$1/5$	$3/5$	$1/5$

10*. 0,45
11*.

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

12*.

x_i	0	1	2
p_i	0,03	0,34	0,63

2.2.

1. $M(X) = 10$; $D(X) = 10/3$ **2.** $x_3 = 21$; $p_3 = 0,2$ **3.** $D(X) = 15,21$; $\sigma(X) = 3,9$ **4.** $M(XY) = 1,53$

$x_i y_i$	0,5	1	2
p_i	0,06	0,38	0,56

5. а) $D(X-1) = 5$; б) $D(2X) = 20$; в) $D(3X+6) = 45$ **6.** $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ **7.** $M(X) \approx 3$ **8*.** $M(X) = 2$; $D(X) = 1,9$ **9*.** $p_1 = 0,3$; $p_2 = 0,7$ **10*.** $D(X) = 8,545$; $\sigma(X) = 2,923$ **11*.** $M(X+Y) = 2,65$ **12*.** $M(X+2) = 6$; $M(3X) = 12$; $M(-2X+5) = -3$ **13*.** $D(X) = 0,495$ **14*.** $M(X) \approx 16$ **15*.** $\nu_1 = 2,6$; $\nu_2 = 7$; $\nu_3 = 19,4$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0,24$; $\mu_3 = -17,624$

2.3.

1. а)

x_i	0	1	2	3
p_i	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1/8, & 0 < x \le 1; \\ 1/2, & 1 < x \le 2; \\ 7/8, & 3 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

2. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0,5; & 2 < x \le 4; \\ 0,7; & 4 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$ **3.** 0,25

4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \cos x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$ **5.** $\sqrt{2}/4 \approx 0,35$

6. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$

7. $a = 0,5$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ (1 - \cos x)/2, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$

8.$P(0,25 < X < 0,75) = 0,5$; $P_4(3) = 0,25$

9*.

x_i	0	1	2
p_i	0,36	0,48	0,16

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0,36; & 0 < x \le 1; \\ 0,84; & 1 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

10*. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ 0,2; & 3 < x \le 4; \\ 0,3; & 4 < x \le 7; \\ 0,7; & 7 < x \le 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$ **11*.** $P_1 = 0,5$; $P_2 = 0,5$

12*. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 1, & 2 < x < 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$ **13*.** $(2 - \sqrt{2})/4 \approx 0,59$

14*. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - \cos x, & 0 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$

15*. $a = 0,5$; $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\pi/2; \\ (\sin x + 1)/2, & -\pi/2 < x \le \pi/2; \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$

2.4.

1. 2/3 **2.** 4/3 **3.** 3 **4.** 0,6 **5.** 0,4 **7.** $M(X) = 1$, $\sigma(X) = 5$; $D(X) = 25$ **8.** 0,1359 **9.** 0,9198 **12.** $\approx 0,555$ **13.** $D(X) = 0,01$; $M(X) = \sigma(X) = 0,1$ **14*.** 4/3 **15*.** 25/18 **16*.** $D(X) = 3$, $\sigma(X) = \sqrt{3}$
17*. $P_1 = 0,4$; $P_2 = 0,5$ **18*.** 1/3 **20*.** $M(X) = 3$, $D(X) = 2$
21*. 0,6826 **22*.** 95% **25*.** 0,038 **26*.** $M(X) = 2,5$; $\sigma(X) = 2,5$; $D(X) = 6,25$

2.5.

1.

y_i	26	30	41	50
p_i	0,14	0,42	0,19	0,25

x_j	2,3	2,7
p_j	0,29	0,71

2. 9/16 **3.** 0,11 **4.** 3/128 **5.** $f(x,y) = 6e^{-(2x+3y)}$

6. $f(x) = \begin{cases} 3^{-x-y}\ln^2 3 & \text{при } x \le 0;\ y \le 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$

7. $m_y = 5,54$; $m_x = 0,48$; $\mu_{xy} = -0,0672$

8*.

y_i	y_1	y_2	y_3
p_i	0,22	0,29	0,49

x_j	x_1	x_2
p_j	0,4	0,6

11*. $f(x) = \begin{cases} 8e^{-4x-2y} & \text{при } x \ge 0;\ y \ge 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$

3.2.

1. 5,76 **2.** $u_i = x_i - 1270$, $\overline{x}_в = 1270 + \overline{u}_в = 1269$ **3.** 3,075 **4.** а) $\overline{x}_в = 100$; б) $D_в = 34$; $S^2 = 42,5$ **5.** $u_i = x_i - 191$, $D_в(X) = D_в(U) = 8,04$ **6.** $u_i = 10x_i$, $D_в(X) = D_в(U)/10^2 = 0,0344$ **7.** $S_x^2 = 6,93$ **8.** $u_i = 100x_i$, $S_x^2 = S_u^2/100^2 = 0,0010844$ **9.** $\overline{x} = 2$; $D = 2,1$ **10*.** 4 **11*.** $u_i = x_i - 2620$, $\overline{x}_в = 2621$ **12*.** 5,1 **13*.** а) $\overline{x}_в = 10$; б) $D_в = 2,5$; $S^2 = 10/3$ **14*.** $u_i = x_i - 360$, $D_в(X) = D_в(U) = 167,25$ **15*.** $u_i = 100x_i$, $D_в(X) = D_в(U)/100^2 = = 0,000721$ **16*.** $\overline{x}_в = 4,462$; $D_в = 0,0117$; $S^2 = 0,0123$ **17*.** $u_i = x_i - 1275$, $S_x^2 = S_u^2 = 168,88$

3.3.

1. $(12,14; 15,96)$ **2.** $n = 81$ **3.** $(1964,94; 2035,06)$ **4*.** $(7,63; 12,77)$ **5*.** $n = 179$ **6*.** $(992,16; 1007,84)$

3.4.

1. $k = 8$, $\chi^2_{набл.} = 1,71$; $\chi^2_{кр.}(0,05; 8) = 15,5$. Нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. **2.** а) случайно; $k = 2$, $\chi^2_{набл.} = 2,47$; $\chi^2_{кр.}(0,05; 2) = 6,0$; б) случайно; $k = 6$, $\chi^2_{набл.} = 1,52$; $\chi^2_{кр.}(0,05; 6) = 12,6$; в*) значимо; $k = 4$, $\chi^2_{набл.} = 13,53$; $\chi^2_{кр.}(0,05; 4) = 9,5$; г*) случайно; $k = 6$, $\chi^2_{набл.} = 0,83$; $\chi^2_{кр.}(0,05; 6) = 12,6$.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Приложение 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3433	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4783	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2,9	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3,1	4990	4990	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3,2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3,3	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
3,4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998	4998
3,5	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3,6	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,7	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	49995	49995	49995

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np$$

Приложение 3

λ / k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
7					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
8								0,000002	0,000004

λ / k	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008101	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124007	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,41303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24								0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26									0,000002
27									0,000001

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α				
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91
17	33,4	31,5	27,6	8,67	7,56
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59

Литература

1. *Андрухаев Х.М.* Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 2005. – 174 с.

2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Юрайт, 2013. – 416 с.

3. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. – М.: Юрайт, 2013. – 480 с.

4. *Горелова Г.В., Кацко И.А.* Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: Учеб. пособие для вузов. – Ростов н/Д: Феникс, 2006. – 475 с.

5. *Гусак А.А., Бричикова Е.А.* Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 2009. – 288 с.

6. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П.* Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Мир и образование, 2008. – 816 с.

7. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. – 552 с.

8. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288 с.

9. *Попов А.М.* Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для бакалавров / А.М. Попов, Н.В. Сотников; под ред. проф. А.М. Попова. – М.: Юрайт, 2011. – 440 с.

Куижева Саида Казбековна
Паланджянц Левон Жирайрович
Шевякова Ольга Петровна

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Подписано в печать 05.05.14.
Формат бумаги 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. п. л. 8,4. Тираж 100 экз. Заказ № 1665.39

Отпечатано в типографии ИП Пермяков С.А.
426034, г. Ижевск, ул. Коммунаров, 244