Т.И. Дёмина, С.К. Куижева, О.П. Шевякова

МАТЕМАТИКА

2 семестр

Учебно-методическое пособие
для студентов направлений:
081100.62 «Государственное и муниципальное управление»
080200.62 «Менеджмент»

Ижевск
2014

УДК 51(07)
ББК 22.1
Д – 30

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Майкопский государственный технологический университет»
Кафедра высшей математики и системного анализа

Рассмотрено и утверждено на заседании кафедры
высшей математики и системного анализа

Рецензенты:
канд. физ. - мат. наук, доц. Паланджянц Л.Ж.
канд. физ. - мат. наук, доц. Токова А.А.

Дёмина Т.И., Куижева С.К., Шевякова О.П.

Д 30 **Математика. 2 семестр**. Учебно-методическое пособие для студентов направлений: 081100.62 «Государственное и муниципальное управление», 080200.62 «Менеджмент». – Ижевск: ИП Пермяков С.А., 2014. – 98 с.

Учебно-методическое пособие рекомендовано студентам-заочникам I курса при изучении общего курса математики во 2 семестре. Оно содержит список литературы, необходимой для изучения тем курса, методические рекомендации, а также типовые задания по каждому разделу.

УДК 51(07)
ББК 22.1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди научных дисциплин, созданных человечеством на протяжении тысячелетий, очень значимое место занимает математика. Математика является базой, на основе которой строится в дальнейшем преподавание общетехнических, экономических и специальных дисциплин.

Цель курса математики в системе подготовки специалиста – освоение необходимого математического аппарата, помогающего анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные экономические, технологические процессы, в освоении приемов исследования и решения математически формализованных задач, в овладении основными методами математики.

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

Настоящее учебно-методическое пособие рекомендовано студентам-заочникам I курса при изучении общего курса математики во 2 семестре. Оно содержит список литературы, необходимой для изучения тем курса, методические рекомендации, а также типовые задания по каждому разделу.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М. : Юрайт, 2013. – 480 с.

2. ЭБС "Znanium.com" *Красс, М.С.* Математика для экономического бакалавриата: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.– М.: ИНФРА-М, 2013. – 472 с.: – Режим доступа: http://znanium.com/

3. Курс высшей математики: учебник. Ч. 1 / М.К. Беданоков М.К. и др. – Майкоп: Магарин О.Г., 2014. – 384 с.

4. Курс высшей математики: учебник. Ч. 2 / М.К. Беданоков М.К. и др. – Майкоп: Магарин О.Г., 2014. – 279 с.

5. ЭБС "Znanium.com"Основы теории вероятностей и математической статистики: учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М.: Флинта: МПСИ, 2010. – 488 с.: – Режим доступа: http://znanium.com/

Дополнительная

6. *Куижева, С.К.* Основы теории вероятностей и математической статистики [Электронный ресурс]: учеб. пособие / С.К. Куижева, Л.Ж. Паланджянц, О.П. Шевякова.– Майкоп : Магарин О.Г., 2010. – 138 с.

7. *Попов, А.М.* Высшая математика для экономистов : учебник для бакалавров / А.М. Попов, В.Н. Сотников ; под ред. А.М. Попова. – Москва : Юрайт, 2012. – 564 с.

8. ЭБС "Znanium.com"*Шершнев, В.Г.* Математический анализ: сборник задач с решениями: учебное пособие / В.Г. Шершнев. – М.: ИНФРА-М, 2013. – 164 с. – Режим доступа: http://znanium.com/

9. *Шипачев, В.С.* Высшая математика. Полный курс : учебник для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – Москва : Юрайт, 2014. – 607 с.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ КУРСА

Раздел VI. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Определение производной, её геометрический и механический смысл. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций. Производные основных элементарных функций. Таблица производных. Производные высших порядков. Дифференцирование неявно заданной функции. Дифференцирование параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование. Понятие дифференциала функции. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей. Интервалы монотонности, алгоритм их отыскания. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке. Выпуклость графика функции, точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика. Приложения производной в экономической теории.

Правила дифференцирования

1. *Производная суммы (разности) двух дифференцируемых функций равна сумме (разности) производных этих функций*:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

2. *Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго:*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Также справедливы формулы:

$$(Cu)' = Cu', \quad C = \text{const};$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

3. *Производная частного двух дифференцируемых функций* $\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$, *равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби* *на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя:*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Имеют место формулы: $\left(\dfrac{u}{C}\right)' = \dfrac{1}{C}\, u', \qquad \left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}.$

4. *Производная сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу:*

$$y'_x = y'_u\, u'_x.$$

Таблица производных

1. $(C)' = 0, \quad C = \text{const};$
2. $(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u'$, в частности, $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\, u'$, $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\, u';$
3. $(a^u)' = a^u \ln a\, u'$, в частности, $(e^u)' = e^u u';$
4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a}\, u'$, в частности, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\, u';$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
7. $(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\, u';$
8. $(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\, u';$
9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, u';$
10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, u';$
11. $(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\, u';$
12. $(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\, u'.$

Пример 1. Найти производную функций $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

Решение. Используя теорему о производной суммы функций, найдём

$$y' = (x^3 - 3x^2 + 5x + 2)' = (x^3)' - (3x^2)' + (5x)' + (2)' = 3x^2 - 6x + 5.$$

Пример 2. Вычислить производную функций $y = \ln x \ \cos x$.

Решение. При вычислении производной используем теорему о производной произведения двух функций, то есть

$$y' = (\ln x)' \cos x + \ln x (\cos x)' = \frac{1}{x} \cos x - \ln x \ \sin x.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \dfrac{x^4}{\sin x}$.

Решение. Применим правило нахождения производной дроби

$$y' = \frac{(x^4)' \sin x - x^4 (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{4x^3 \sin x - x^4 \cos x}{\sin^2 x}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \sin x^2$.

Решение. Используем правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$y' = (\sin x^2)' = \cos x^2 (x^2)' = 2x \cos x^2.$$

Пример 5. Вычислить производную функции $y = \left(x + \dfrac{2}{x}\right)^{200}$.

Решение. Воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции, имеем

$$y' = \left(\left(x + \frac{2}{x}\right)^{200}\right)' = 200 \left(x + \frac{2}{x}\right)^{199} \left(x + \frac{2}{x}\right)' =$$

$$= 200 \left(x + \frac{2}{x}\right)^{199} \left(1 - \frac{2}{x^2}\right).$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \ln^3(x + 3)$.

Решение. Находим производную функции по правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = (\ln^3(x + 3))' = 3 \ln^2(x + 3)(\ln(x + 3))' = 3 \ln^2(x + 3) \frac{1}{x + 3}.$$

Пример 7. Вычислить производную функции $y = \ln \cos \dfrac{1 - 2x}{3}$.

Решение. Используем правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$y' = \left(\ln\cos\frac{1-2x}{3}\right)' = \frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}}\left(\cos\frac{1-2x}{3}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\cos\frac{1-2x}{3}}\sin\frac{1-2x}{3}\left(\frac{1-2x}{3}\right)' = \frac{2}{3}\mathrm{tg}\frac{1-2x}{3}.$$

Пример 8. Найти производную четвёртого порядка функции $y = \ln x$.

Решение. Последовательно дифференцируя функцию, получим

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \frac{2}{x^3}, \quad y^{(4)} = -\frac{6}{x^4}.$$

Пример 9. Найти производную функции, заданной уравнением $2^y - 2y = 1 - x^2$.

Решение. Так как y является функцией от x, то оба слагаемых в левой части уравнения будем рассматривать как сложные функции от x. Продифференцировав обе части данного уравнения по x, имеем

$$2^y \ln 2\, y' - 2y' = -2x.$$

Разрешая уравнение относительно y', получим

$$y' = \frac{2x}{2 - 2^y \ln 2}.$$

Пример 10. Найти производную первого порядка $\dfrac{dy}{dx}$ функции

$$\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$$

Решение. Используя правило дифференцирования функции, заданной параметрически, найдём

$$x'_t = \frac{1}{2\sqrt{2t-t^2}}(2-2t) = \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}},$$

$$y'_t = \frac{1}{\sqrt{1-(t-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1}{\sqrt{2t-t^2}}\,\frac{\sqrt{2t-t^2}}{1-t} = \frac{1}{1-t}.$$

Пример 11. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$$

Решение. Найдём

$$x'_t = 2\sin t\ \cos t = \sin 2t, \quad y'_t = 2\cos 2t,$$

$$y'_x = \frac{2\cos 2t}{\sin 2t} = 2\mathrm{ctg}2t, \quad y''_{xt} = -\frac{4}{\sin^2 2t},$$

тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{xt}}{x'_t} = -\frac{4}{\sin^3 2t}.$$

Пример 12. Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3}e^x}{(x+5)^3}.$$

Решение. Нахождение y'_x с помощью правил и формул дифференцирования слишком громоздко. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln(x^2+2) + \frac{3}{4}\ \ln(x-1) + x - 3\ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по x:

$$\frac{1}{y}\,y'_x = \frac{1}{x^2+2}\,2x + \frac{3}{4}\,\frac{1}{x-1} + 1 - 3\,\frac{1}{x+5}.$$

Выражаем y'_x:

$$y'_x = y\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right),$$

тогда

$$y'_x = \frac{(x^2+2)\sqrt[4]{(x-1)^3}e^x}{(x+5)^3}\left(\frac{2x}{x^2+2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5}\right).$$

Пример 13. Найти производную функции $y = (\ln(x+2))^{2x}$.

Решение. Прологарифмируем обе части:

$$\ln y = \ln(\ln(x+2))^{2x},$$

$$\ln y = 2x\ln(\ln(x+2)).$$

Продифференцируем по x обе части:

$$(\ln y)'_x = (2x\ln(\ln(x+2)))',$$

$$\frac{1}{y}y'_x = 2\ln\left(\ln(x+2)\right) + 2x \cdot \frac{1}{\ln(x+2)} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Тогда

$$y'_x = \left(2\ln\left(\ln(x+2)\right) + \frac{2x}{(x+2)\ln(x+2)}\right) \cdot y$$

или

$$y'_x = \left(2\ln\left(\ln(x+2)\right) + \frac{2x}{(x+2)\ln(x+2)}\right)(\ln(x+2))^{2x}.$$

Пример 14. Найти производную функции $y = (\sin x)^{\mathrm{tg} x}$.

Решение. Используем правило нахождения производной показательно-степенной функции, имеем

$$y'_x = (\sin x)^{\mathrm{tg} x}\left(\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x} + 1\right).$$

Пример 15. Найти производную функции $y = x^{x^3}$.

Решение. Имеем показательно-степенную функцию. Логарифмируем и дифференцируем обе части:

$$(\ln y)' = (\ln x^{x^3})',$$

получаем

$$\frac{y'_x}{y} = (x^3\ln x)', \quad \frac{y'_x}{y} = 3x^2\ln x + \frac{x^3}{x}, \quad y'_x = y \cdot x^2(3\ln x + 1).$$

Отсюда имеем:

$$y'_x = x^{x^3} \cdot x^2(3\ln x + 1) = x^{x^3+2}(3\ln x + 1).$$

Пример 16. Вычислить приближённо $\ln 0,99$.

Решение. Для вычислений приближённых значений функций используется формула

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x. \tag{1}$$

Будем находить значение функции $f(x) = \ln x$ при $x = 0,99$. Воспользуемся формулой (1). Имеем

$$\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + (\ln x)'\,\Delta x,$$

то есть

$$\ln(x+\Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x}.$$

Так как $x + \Delta x = 0,99$, то при $x = 1$ и $\Delta x = -0,01$ получаем

$$\ln 0,99 \approx \ln 1 - \frac{0,01}{1} = 0 - 0,01 = -0,01.$$

Пример 17. Вычислить приближённо $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1,05}}$.

Решение. Используем формулу (1). Так как $y = 1/\sqrt[5]{x}, x = 1$, $\Delta x = 0,05$; тогда $y(1) = 1/\sqrt[5]{1} = 1$. Находим производную функции: $y'(x) = -\dfrac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}-1} = -\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$, тогда $y'(1) = -\dfrac{1}{5} = -0,2$. Учитывая, что $dx = \Delta x = 0,05$; находим $dy = -0,2 \cdot 0,05 = -0,01$. Следовательно,

$$y(1,05) = \frac{1}{\sqrt[5]{1,05}} \approx 1 - 0,01 = 0,99.$$

Пример 18. Вычислить приближённо $\sqrt{16,01}$.

Решение. Возьмём функцию $y = \sqrt{x}$, для которой производная $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Имеем $x = 16$, $\Delta x = 0,01$; тогда используя формулу (1), получаем искомое значение

$$\sqrt{16,01} \approx \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,01 = 4 + \frac{1}{8} \cdot 0,01 = 4 + 0,00125 = 4,00125.$$

Пример 19. Найти приближённое значение $1,003^{100}$.

Решение. Для решения применим формулу (1). Возьмём функцию $y = x^{100}$, для которой положим $x = 1$, $\Delta x = 0,003$, тогда $y(1) = 1$. Учитывая, что производная функции $y' = 100x^{99}$, $y'(1) = 100$, находим приближённое значение:

$$1,003^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0,003 = 1,3.$$

Пример 20. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{4x}$.

Решение. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 3x)'}{(4x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{4}=\frac{3}{4}.$$

Пример 21. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$.

Решение. Для нахождения предела, используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{1}=3.$$

Пример 22. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

Решение. Правило Лопиталя применим дважды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(4\sin 4x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{16\cos 4x}{2}=8.$$

Пример 23. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

Решение. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(1+2\ln\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{2\frac{\cos x}{\sin x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x\cos x)'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cos x-x\sin x}=\frac{1}{2}.$$

Пример 24. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\dfrac{4}{x^2}-8x-15$ на отрезке $[-2;-0,5]$.

Решение. 1. Находим производную функции:

$$y'=\left(\frac{4}{x^2}-8x-15\right)'=-\frac{8}{x^3}-8=-\frac{8+8x^3}{x^3}.$$

2. Решив уравнение $y'=0$, $-\dfrac{8+8x^3}{x^3}=0$, получаем, что $x=-1$ – критическая точка, принадлежащая интервалу $(-2;-0,5)$.

3. Вычисляем значения функции в точке $x=-1$ и на концах заданного отрезка: $f(-1)=-3$, $f(-2)=2$, $f(-0,5)=5$.

4. Выбирая наибольшее и наименьшее значения, получаем:

$$\max_{[-2;-0,5]} f(x)=f(-0,5)=5, \qquad \min_{[-2;-0,5]} f(x)=f(-1)=-3.$$

Пример 25. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x+\ln\cos x$ на отрезке $[\pi/6;\pi/3]$.

Решение. 1. Находим производную функции:

$$y'=(x+\ln\cos x)'=1+\frac{1}{\cos x}(\cos x)'=1-\frac{\sin x}{\cos x}=1-\mathrm{tg}x.$$

2. Найдём критические точки, принадлежащие интервалу $(\pi/6;\pi/3)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 1-\mathrm{tg}x=0, \quad \mathrm{tg}x=1, \quad x=\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Но только критическая точка $x=\pi/4\in(\pi/6;\pi/3)$.

3. Вычисляем значения функции в этой критической точке и на концах отрезка $[\pi/6;\pi/3]$:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+\ln\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,38;$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\ln\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0,44;$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+\ln\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\ln\frac{1}{2}\approx 0,35.$$

4. Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее:

$$\max_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]} y=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \min_{\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]} y=y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+\ln\frac{1}{2}.$$

Пример 26. Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ и построить её график.

Решение. 1. Область определения функции $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Функция $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ является нечётной, так как

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x).$$

Следовательно, её график симметричен относительно начала координат. Для построения достаточно исследовать функцию при $x \geq 0$.

3. Если $x = 0$, то $y = 0$, значит, график пересекает ось Oy в точке $(0;\ 0)$. Если $y = 0$, $\dfrac{x}{1+x^2} = 0$, то $x = 0$. График пересекает ось Ox в точке $(0;\ 0)$.

4. Функция знакоположительна $(y > 0)$ на интервале $(0; +\infty)$; знакоотрицательная $(y < 0)$ на $(-\infty; 0)$.

5. Вертикальных асимптот нет. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \ \ b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right) = 0,$$

следовательно, $y = 0$ – горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

6. Определим интервалы возрастания и убывания функции и точки экстремума функции. Найдём производную:

$$y' = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Критические точки: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

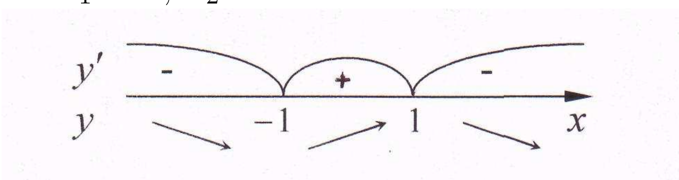

Рис. 1

Если $x \in (-\infty; -1)$ и $x \in (1; -\infty)$, то $y' < 0$ (рис. 1), значит, функция убывает на этих интервалах; если $x \in (-1; 1)$, то $y' > 0$, функция возрастает на интервале $(-1; 1)$.

Вычислим $y_{\min} = f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $y_{\max} = f(1) = \dfrac{1}{2}$.

7. Исследуем график функции на выпуклость. Находим

$$y'' = \frac{-2x(1+x^2)^2 - (1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3},$$

тогда критические точки II рода определяем из равенства:

$$\frac{2x^3 - 6x}{(1+x^2)^3} = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0, \ x = -\sqrt{3}, \ x = \sqrt{3}.$$

Установим знак второй производной справа и слева от этих точек (рис. 2).

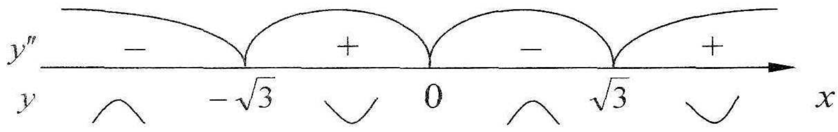

Рис. 2

8. График исследуемой функции изображён на рис. 3.

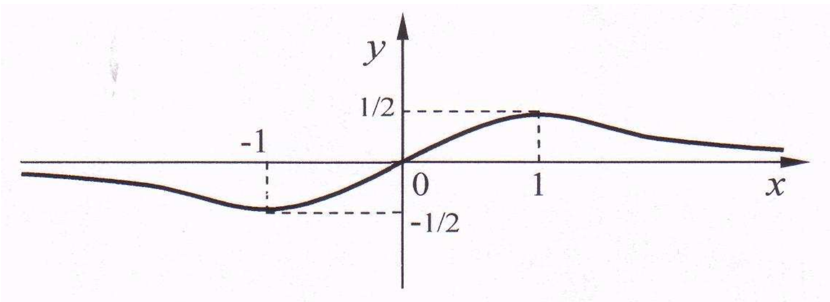

Рис. 3

Пример 27. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$ и построить её график.

Решение. 1. Область определения: $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Точка $x = 1$ – точка разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = \lim_{x \to 1+} \frac{x^3}{2(x-1)^2} = +\infty.$$

2. Функция общего вида, так как область определения не симметрична относительно начала координат.

3. Точки пересечения с осями координат.

С осью Ox: $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{2(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

С осью Oy: $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{0^3}{2(0-1)^2} = 0$.

Таким образом, $(0; 0)$ – единственная точка пересечения графика функции с осями координат.

4. Определим промежутки знакопостоянства функции. Решая неравенства $y > 0$ и $y < 0$, получаем, что график функции находится выше оси Ox при $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ и ниже оси Ox при $x \in (-\infty; 0)$.

5. Найдём асимптоты графика. Очевидно, $x = 1$ – вертикальная асимптота.

Найдём наклонную асимптоту. Имеем

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{2}x\right] = 1.$$

Итак, $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ – наклонная асимптота.

6. Вычислим производную

$$y' = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{2(x-1)^4} =$$

$$= \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{2(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{2(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{2(x-1)^3}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки $x = 0$ и $x = 3$.

Определим промежутки возрастания и убывания функции.

При $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (0; 1)$ производная $f'(x) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает; при $x \in (1; 3)$ производная $f'(x) < 0 \Rightarrow$ функция убывает; при $x \in (3; +\infty)$ производная $f'(x) > 0 \Rightarrow$ функция возрастает.

При переходе слева направо через точку $x = 3$ производная меняет знак с минуса на плюс ($f'(x) < 0$ при $1 < x < 3$; $f'(x) > 0$ при $x > 3$). Таким образом, в точке $x = 3$ функция имеет минимум и $f_{\min} = f(3) = 27/8$.

7. Вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x)(x-1)^3 - 3(x^3 - 3x^2)(x-1)^2}{2(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(3x^2 - 6x)(x-1) - 3(x^3 - 3x^2)}{2(x-1)^4} = \frac{3x}{(x-1)^4}.$$

Определим направление выпуклости графика и точки перегиба.

При $x \in (-\infty; 0)$ вторая производная $f''(x) < 0 \Rightarrow$ график выпуклый вверх; при $x \in (0; 1)$ и при $x \in (1; +\infty)$: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ график выпуклый вниз; в точке $x = 0$: $f''(0) = 0$. Так как функция непрерывна в точке $x = 0$ и при переходе через эту точку вторая производная меняет знак, то $(0; 0)$ – точка перегиба графика функции.

8. Используя результаты исследования, построим график функции (рис. 4).

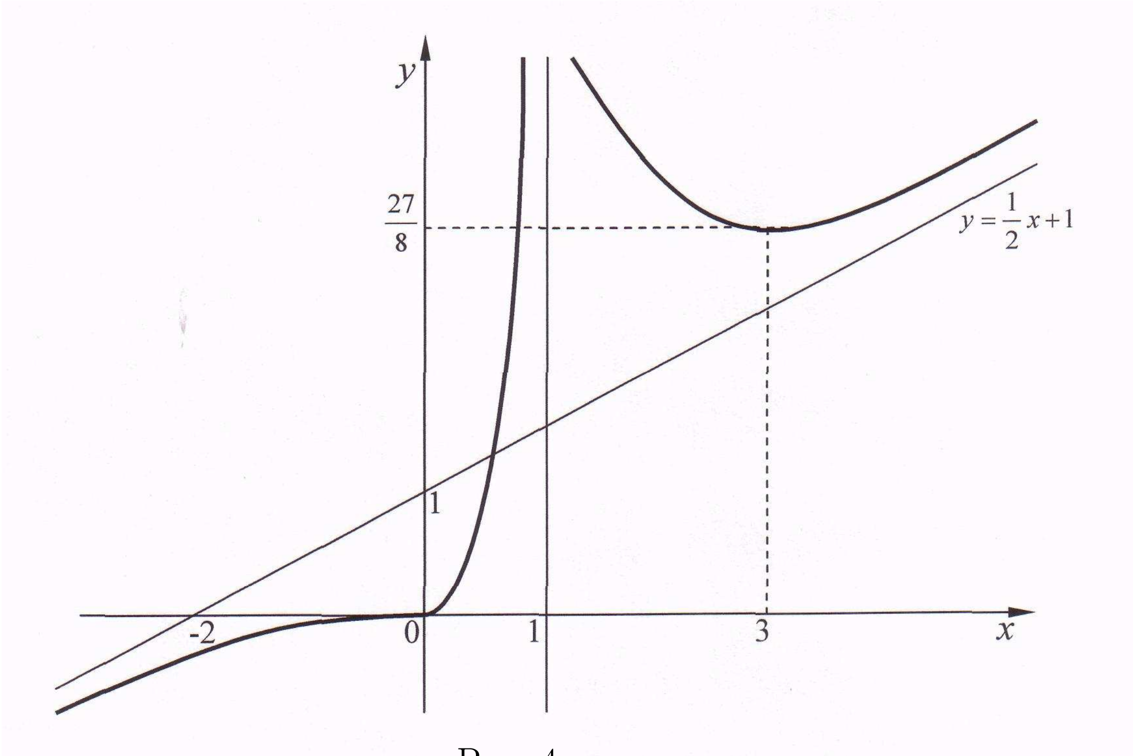

Рис. 4

Пример 28. Составить уравнение касательной и нормали к линии, заданной уравнением $y = -x^3$, в указанной точке $M\,(1/2, -1/8)$. Вычислить кривизну кривой в этой точке.

Решение. Уравнения касательной и нормали к кривой имеют вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Имеем $y' = -3x^2$, в точке с абсциссой $x_0 = 1/2$ эта производная равна $f'(1/2) = -3/4$, тогда получим уравнение касательной

$$y - \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ или } y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4};$$

и уравнение нормали

$$y - \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{-\frac{3}{4}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ или } y = \frac{4}{3}x - \frac{19}{24}.$$

Кривизна кривой вычисляется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Имеем $y' = -3x^2$, $y'' = -6x$. При $x = 1/2$ эти производные принимают значения $y' = -3/4$, $y'' = -3$, тогда

$$k = \frac{|-3|}{(1 + 9/16)^{3/2}} = \frac{3}{\frac{125}{64}} = \frac{192}{125}.$$

Раздел VII. Интегральное исчисление

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные методы интегрирования. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции. Понятие определенного интеграла. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, длина дуги кривой, объем тела, площадь поверхности тела вращения. Приложения определенного интеграла в экономике. Приближенное вычисление определенных интегралов: формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования. Интегралы от разрывных функций.

Свойства неопределённого интеграла

1. *Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции*:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. *Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению*:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. *Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной*:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad k = \text{const}.$$

5. *Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

6. *Если* $\int f(x)dx = F(x) + C$, *то и* $\int f(u)du = F(u) + C$, *где* $u = \varphi(x)$ *– произвольная функция, имеющая непрерывную производную.*

В частности,

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C, \quad a \neq 0.$$

Таблица основных неопределённых интегралов

1. $\int 0\, du = C.$

2. $\int u^n\, du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \int du = u + C; \int u\, du = \dfrac{u^2}{2} + C;$

   $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C; \int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C.$

4. $\int \sin u\, du = -\cos u + C.$

5. $\int \cos u\, du = \sin u + C.$

6. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$

7. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$

8. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C.$

9. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + C.$

10. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C; \quad \int e^u du = e^u + C.$

11. $\int \dfrac{du}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{u}{a} + C; \quad \int \dfrac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C; \quad \int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C.$

13. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C.$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2\pm a}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a}\right| + C.$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\left(2\sin x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{5}{25+x^2}\right)dx.$

Решение. Используя формулы 4, 2, 11 таблицы основных интегралов, получим

$$\int\left(2\sin x - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{25+x^2}\right)dx =$$
$$= \int 2\sin x dx - \int\frac{dx}{2\sqrt{x}} + \int\frac{5dx}{25+x^2} =$$
$$= 2\int\sin x\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x}} + 5\int\frac{dx}{5^2+x^2} =$$
$$= 2(-\cos x) + C_1 - \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x} + C_2 + 5\cdot\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{5} + C_3 =$$
$$= -2\cos x - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}\frac{x}{5} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\dfrac{dx}{2x^2-32}.$

Решение. Вынесем 1/2 за знак интеграла, используя формулу 13 таблицы основных интегралов, где $a = 4$, получим

$$\int\frac{dx}{2x^2-32} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C.$$

Пример 3. Найти $\int\dfrac{dx}{7-6x}.$

Решение. Для того, чтобы вычислить интеграл, заметим, что $dx = -\frac{1}{6}\,d(7-6x)$. Используя формулу 3 таблицы основных интегралов, имеем

$$\int \frac{dx}{7-6x} = -\frac{1}{6}\int \frac{d(7-6x)}{7-6x} = -\frac{1}{6}\ln|7-6x| + C.$$

Пример 4. Найти $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1}$.

Решение. Выполнив подведение под знак дифференциала, имеем

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x^2+1} = \int \operatorname{arctg} x\,d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C.$$

Пример 5. Найти $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

Решение. Для того, чтобы вычислить интеграл, заметим, что $xdx = -\frac{1}{2}\,d(5-x^2)$. Тогда, выполнив подведение под знак дифференциала и используя формулу 2 таблицы основных интегралов, найдём

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5-x^2)}{\sqrt{5-x^2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5-x^2} + C = -\sqrt{5-x^2} + C.$$

Пример 6. Найти $\displaystyle\int x^2 e^{2x^3+1}dx$.

Решение. Так как $x^2dx = \frac{1}{6}d(2x^3+1)$, то, выполнив подведение под знак дифференциала, получим

$$\int x^2 e^{2x^3+1}dx = \frac{1}{6}\int e^{2x^3+1}d(2x^3+1) = \frac{1}{6}\,e^{2x^3+1} + C.$$

Пример 7. Найти $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^4-7}\,dx$.

Решение. Положим $\sqrt{x^4-7} = t$, тогда $x^4 - 7 = t^2$. Дифференцируя обе части равенства, получим $4x^3dx = 2t\,dt$. Отсюда найдём, что $x^3dx = \frac{1}{2}\,t\,dt$. Значит,

$$\int x^3\sqrt{x^4-7}\,dx = \int \sqrt{x^4-7}\,x^3\,dx = \int t\cdot\frac{1}{2}\,t\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int t^2\,dt = \frac{1}{6}\,t^3 + C = \frac{1}{6}\sqrt{(x^4-7)^3} + C.$$

Пример 8. Найти $\displaystyle\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{16-\sin^4 x}}$.

Решение. Пусть $\sin^2 x = t$, тогда $2\sin x\cos x\,dx = dt$ или $\sin 2x\,dx = dt$.

В результате получаем

$$\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{16-\sin^4 x}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{4} + C = \arcsin\frac{\sin^2 x}{4} + C.$$

Пример 9. Найти $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{x^8-4}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^8-4} = \left| \begin{array}{c} x^4 = t \Rightarrow 4x^3\,dx = dt, \\ x^3\,dx = (1/4)dt \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-2^2} =$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^4-2}{x^4+2}\right| + C.$$

Пример 10. Найти $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+3}$.

Решение. Найдём

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+3} = \left| \begin{array}{c} e^x = t, \\ e^x\,dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Решение. Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов

$$\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Применяя соответствующие подстановки, получим

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} 1-x^2 = t \\ xdx = (-1/2)\,dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t}+C_1 = -\sqrt{1-x^2}+C_1,$$

$$\int \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{c} \arcsin x = z \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz \end{array} \right| = \int z\,dz = \frac{1}{2}\,z^2 + C_2 = \frac{1}{2}\,\arcsin^2 x + C_2.$$

Значит,

$$\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\,\arcsin^2 x + C.$$

Пример 12. Вычислить $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$.

Решение. Положим здесь $u=\arcsin x$, $dv=dx$, откуда

$$du = d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad v=\int dv = \int dx = x.$$

По формуле интегрирования по частям имеем

$$\int \underbrace{\arcsin x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v}\underbrace{\arcsin x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v}\underbrace{\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}}_{du} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 13. Вычислить $\displaystyle\int (2x+1)\cos 3x dx$.

Решение. Имеем

$$\int \underbrace{(2x+1)}_{u}\underbrace{\cos 3x dx}_{dv} = \left|\begin{array}{c} u=2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = \cos 3x dx \Rightarrow v=(1/3)\sin 3x \end{array}\right| =$$

$$= \underbrace{(2x+1)}_{u}\underbrace{\frac{1}{3}\sin 3x}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{3}\sin 3x}_{v}\ \underbrace{2dx}_{du} =$$

$$= \frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x -$$

$$-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C = \frac{1}{3}(2x+1)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + C.$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\displaystyle\int (x^2-5)e^{-x}dx$.

Решение. Положим $u=x^2-5$, $dv=e^{-x}\,dx$, откуда $du=2x\,dx$, $v=-e^{-x}$. Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int (x^2-5)e^{-x}dx = -(x^2-5)e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx.$$

Полученный интеграл не является табличным, но можно заметить, что по сравнению с исходным интегралом степень многочлена в подынтегральном выражении уменьшилась на единицу, при этом второй сомножитель того же типа, что и в исходном интеграле. Применяя формулу интегрирования по частям ещё раз, найдём

$$\int xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{vmatrix} =$$
$$= -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

Окончательно будем иметь

$$\int (x^2-5)e^{-x}dx = -(x^2-5)e^{-x}+2(-xe^{-x}-e^{-x})+C = (3-2x-x^2)e^{-x}+C.$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int e^{2x}\cos x dx$.

Решение. Полагая $u = e^{2x}$, $dv = \cos x dx$, получим, что $v = \sin x$, $du = 2e^{2x}dx$. Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x dx.$$

К полученному интегралу снова применим метод интегрирования по частям, полагая $u = e^{2x}$, $dv = \sin x dx$, найдём $du = 2e^{2x}dx$, $v = -\cos x$, тогда

$$\int e^{2x}\sin x dx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x dx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим

$$\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x dx.$$

Откуда

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x).$$

Значит,

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{5}\, e^{2x}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

В окончательном результате мы прибавили к первообразной функции произвольную постоянную.

Пример 16. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\, dx$.

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь. Все корни знаменателя действительные и простые, по теореме 1.3

подынтегральную функцию можно представить в виде суммы простейших дробей I типа:

$$\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{x-1}.$$

Освободившись от знаменателя, получим тождество

$$15x^2-4x-81\equiv A(x+4)(x-1)+B(x-3)(x-1)+C(x-3)(x+4). \quad (1.9)$$

После преобразований имеем

$$15x^2-4x-81\equiv (A+B+C)x^2+(3A-4B+C)x+(-4A+3B-12C).$$

Далее, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений для определения коэффициентов

$$\begin{cases} A+B+C=15,\\ 3A-4B+C=-4,\\ -4A+3B-12C=-81.\end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим $A=3,\ B=5,\ C=7.$

Таким образом, разложение рациональной дроби на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}=\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x+4}+\frac{7}{x-1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{15x^2-4x-81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\,dx=3\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x+4}+7\int\frac{dx}{x-1}=$$
$$=3\ln|x-3|+5\ln|x+4|+7\ln|x-1|+C=$$
$$=\ln\left|(x-3)^3(x+4)^5(x-1)^7\right|+C.$$

Пример 17. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(x+2)(x-1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, знаменатель которой имеет простой корень $x=-2$ и корень $x=1$ кратности 2. Поэтому разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\,,$$

откуда
$$x^2 \equiv A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2).$$

При $x = 1$ получим $1 = 3C$, откуда $C = 1/3$. При $x = -2$ имеем $4 = 9A$, откуда $A = 4/9$. Возьмём ещё одно частное значение x, например, $x = 0$. Получим уравнение $0 = A - 2B + 2C$, учитывая найденные значения A и C, получим $B = 5/9$.

Следовательно,
$$\frac{x^2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{x+2} + \frac{\frac{5}{9}}{x-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}.$$

Тогда
$$\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{4}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{5}{9}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{4}{9}\ln|x+2| + \frac{5}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} + C =$$
$$= \ln\left|\sqrt[9]{(x+2)^4(x-1)^5}\right| - \frac{1}{3(x-1)} + C.$$

Пример 18. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение. Используем формулу Ньютона – Лейбница:
$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x} = \ln x\,\Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Пример 19. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Используем формулу Ньютона – Лейбница:
$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 20. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$.

Решение. Положим $5x-1=t$, тогда $5dx=dt$, $dx=(1/5)dt$. Новые пределы интегрирования: $t_1=5\cdot 1-1=4$, $t_2=5\cdot 2-1=9$. Поэтому

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \int\limits_1^2 (5x-1)^{-1/2}dx =$$

$$= \frac{1}{5}\int\limits_4^9 t^{-1/2}dt = \frac{2}{5}t^{1/2}\Big|_4^9 = \frac{2}{5}(9^{1/2}-4^{1/2}) = \frac{2}{5}.$$

Пример 21. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 (2x^3+1)^4\,x^2\,dx$.

Решение. Положим $2x^3+1=t$, тогда $6x^2dx=dt$, $x^2dx=(1/6)dt$. Новые пределы интегрирования: $t_1=2\cdot 0^3+1=1$, $t_2=2\cdot 1^3+1=3$. Таким образом,

$$\int\limits_0^1 (2x^3+1)^4\,x^2\,dx = \frac{1}{6}\int\limits_1^3 t^4\,dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{t^5}{5}\Big|_1^3 = \frac{1}{30}(3^5-1^5) = 8\frac{1}{15}.$$

Пример 22. Вычислить интеграл $\int\limits_e^4 x\ln x dx$.

Решение. Положим $u=\ln x$, $dv=xdx$, тогда $du=\dfrac{dx}{x}$, $v=\dfrac{x^2}{2}$. Используя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int\limits_e^4 x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_e^4 - \frac{1}{2}\int\limits_e^4 x^2\frac{dx}{x} =$$

$$= 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}x^2\Big|_e^4 = 8\ln 4 - \frac{e^2}{2} - 4 + \frac{e^2}{4} = 8\ln 4 - 4 - \frac{e^2}{4}.$$

Пример 23. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x dx$.

Решение. Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^{\pi/2} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u=x \Rightarrow du=dx \\ dv=\sin x dx \Rightarrow v=-\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + 0 + \sin x\,\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

Пример 24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \ln x$, осью Ox и прямыми $x = e$, $x = e^2$ (рис. 5).

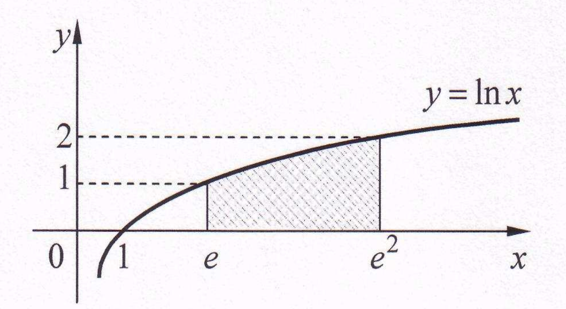

Рис. 5

Решение. Согласно формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$, а также используя интегрирование по частям, находим искомую площадь

$$S = \int\limits_e^{e^2} \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x\ln x\,\Big|_e^{e^2} - \int\limits_e^{e^2} x\frac{dx}{x} =$$

$$= x\ln x\,\Big|_e^{e^2} - \int\limits_e^{e^2} dx = x(\ln x - 1)\,\Big|_e^{e^2} = e^2 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = 4x - x^2$.

Решение. Приравнивая правые части этих уравнений, находим абсциссы точек пересечения указанных кривых: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ (рис. 6).

Следовательно,

$$S = \int\limits_0^3 \left[4x - x^2 - (x^2 - 2x)\right] dx =$$

$$= \int\limits_0^3 (6x - 2x^2)dx = \left(3x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\,\Big|_0^3 = 9 \text{ (кв. ед.)}$$

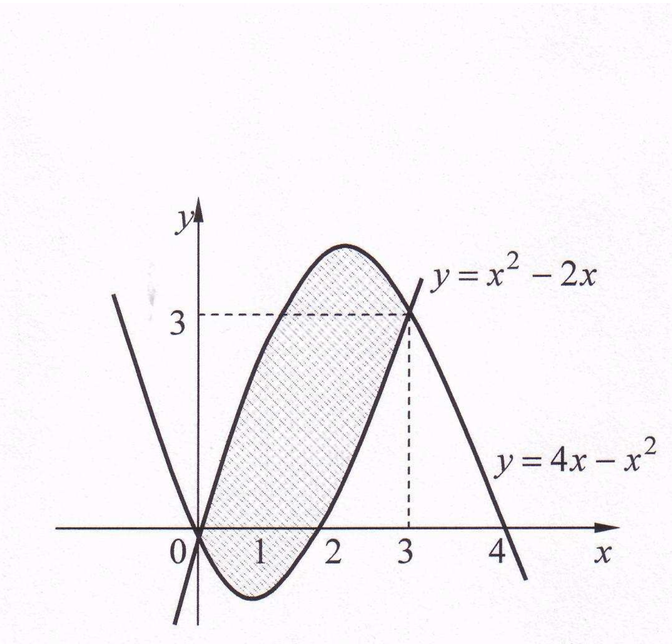

Рис. 6

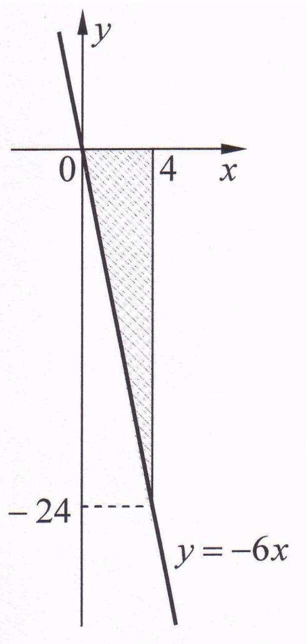

Рис. 7

Пример 26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -6x$, $y = 0$, $x = 4$.

Решение. Фигура расположена под осью Ox (рис. 7). Искомая площадь находится по формуле:

$$S = \left| -\int\limits_0^4 6x dx \right| = \left| -3x^2 \Big|_0^4 \right| = |-48| = 48 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 27. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$, вокруг оси Ox (рис. 8).

Решение. Воспользуемся формулой

$$V_x = \pi \int\limits_a^b y^2 \, dx = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2 \, dx,$$

получаем

$$V = \pi \int\limits_{-1}^0 (e^x)^2 \, dx = \pi \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{-1}^0 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \text{ (куб. ед.)}$$

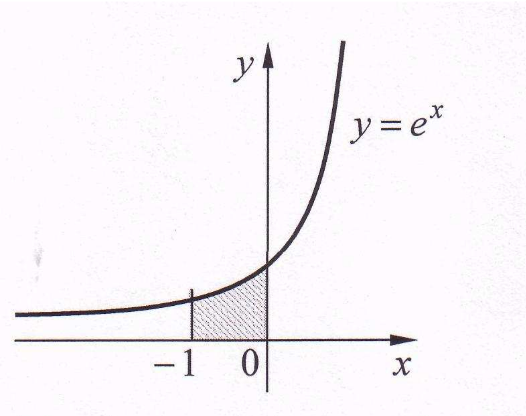

Рис. 8

Пример 28. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1,$$

то есть интеграл сходится к 1.

Пример 29. Вычислить интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2 \lim_{b \to +\infty} (\sqrt{b} - 1) = \infty,$$

то есть интеграл расходится.

Пример 30. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Вычислим каждый из интегралов в правой части:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{a}^{0} = \lim_{a \to -\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = \frac{\pi}{2},$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$

Пример 31. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. При $x = 1$ подынтегральная функция не определена. Получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\xi\to 0} \int\limits_0^{1-\xi} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} dx = -\lim_{\xi\to 0} 2\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\xi} = -\lim_{\xi\to 0} 2(\sqrt{\xi} - 1) = 2,$$

то есть несобственный интеграл сходится.

Пример 32. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение. В точке $x = 0$ подынтегральная функция $y = 1/x$ терпит разрыв, тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to 0} \int\limits_\xi^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to 0} \ln x \Big|_\xi^1 = \lim_{\xi\to 0} (\ln 1 - \ln \xi) = +\infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл расходится.

Раздел VIII. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Функции двух переменных (основные понятия). Предел функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных. Частные производные первого порядка. Частные производные высших порядков. Полный дифференциал функции. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков. Производная сложной функции. Полная производная. Дифференцирование неявной функции. Производная по направлению. Градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Экстремум функции двух переменных. Условный экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. Эмпирические формулы. Метод наименьших квадратов. Понятие двойного интеграла. Функции нескольких переменных в экономической теории.

Пример 1. Показать, что функция $z = e^{xy}$ удовлеворяет уравнению:

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. 1. Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{xy})'_x = e^{xy}(xy)'_x = ye^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (ye^{xy})'_x = y(e^{xy})'_x = y \cdot ye^{xy} = y^2e^{xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^{xy})'_y = e^{xy}(xy)'_y = xe^{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (xe^{xy})'_y = x(e^{xy})'_y = x \cdot xe^{xy} = x^2e^{xy}.$$

2. Подставим полученные значения в заданное уравнение, получаем

$$x^2 \cdot y^2e^{xy} - y^2 \cdot x^2e^{xy} = 0, \quad e^{xy}(x^2y^2 - y^2x^2) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Показать, что функция $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ удовлеворяет уравнению:

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{x^3}{y} = 0.$$

Решение. 1. Найдём частные производные:
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(\dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)'_x = \dfrac{1}{2y} \cdot 2x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2} - 0 = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2};$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(\dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)'_y = \dfrac{x^2}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{y}\right)'_y + 0 + 0 - \left(-\dfrac{1}{y^2}\right) =$
$= \dfrac{x^2}{2}\left(-\dfrac{1}{y^2}\right) + \dfrac{1}{y^2} = -\dfrac{x^2}{2y^2} + \dfrac{1}{y^2}.$
2. Подставим полученные значения в заданное уравнение, тогда

$$x^2\left(\frac{x}{y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}\right) + y^2\left(-\frac{x^2}{2y^2} + \frac{1}{y^2}\right) - \frac{x^3}{y} = 0.$$

Расроем скобки, получим

$$\frac{x^3}{y} + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{x^3}{y} = 0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Найти полный дифференциал функции

$$z = \ln(5x^2 + 4y^2).$$

Решение. Полный дифференциал функции находится по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{1}$$

Найдём частные производные
$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln(5x^2 + 4y^2)\right)'_x = \dfrac{(5x^2 + 4y^2)'_x}{5x^2 + 4y^2} = \dfrac{10x}{5x^2 + 4y^2};$
$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln(5x^2 + 4y^2)\right)'_y = \dfrac{(5x^2 + 4y^2)'_y}{5x^2 + 4y^2} = \dfrac{8y}{5x^2 + 4y^2}.$

Тогда, подставляя в формулу (1), получим
$dz = \dfrac{10x}{5x^2 + 4y^2}\,dx + \dfrac{8y}{5x^2 + 4y^2}\,dy$ или $dz = \dfrac{10xdx + 8ydy}{5x^2 + 4y^2}.$

Пример 4. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sqrt[4]{4x^2 - y^2 + 4y}.$$

Решение. Для нахождения полного дифференциала функции воспользуемся формулой (1), для этого найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\sqrt[4]{4x^2 - y^2 + 4y}\right)'_x = \frac{1}{4}\left(4x^2 - y^2 + 4y\right)^{-\frac{3}{4}}\left(4x^2 - y^2 + 4y\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4x^2 - y^2 + 4y\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot 8x = \frac{2x}{\sqrt[4]{(4x^2 - y^2 + 4y)^3}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\sqrt[4]{4x^2 - y^2 + 4y}\right)'_y = \frac{1}{4}\left(4x^2 - y^2 + 4y\right)^{-\frac{3}{4}}\left(4x^2 - y^2 + 4y\right)'_y =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4x^2 - y^2 + 4y\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot (-2y + 4) = \frac{-0,5y + 1}{\sqrt[4]{(4x^2 - y^2 + 4y)^3}}.$$

Получаем

$$dz = \frac{2x}{\sqrt[4]{(4x^2 - y^2 + 4y)^3}}\,dx + \frac{-0,5y + 1}{\sqrt[4]{(4x^2 - y^2 + 4y)^3}}\,dy.$$

Пример 5. Найти градиент функции $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$ в точке $A(2;3)$ и производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}\,(3;4)$.

Решение. 1. Градиент функции – это вектор с началом в заданной точке, имеющий своими координатами частные производные, т.е.

$$\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x};\ \frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{2}$$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg}\,(xy^2)\right)'_x = \frac{(xy^2)'_x}{1 + (xy^2)^2} = \frac{y^2}{1 + x^2y^4};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\operatorname{arctg}\,(xy^2)\right)'_y = \frac{(xy^2)'_y}{1 + (xy^2)^2} = \frac{2xy}{1 + x^2y^4}.$$

Найдём значения производных в точке $A\,(2;3)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = \frac{3^2}{1 + 2^2 \cdot 3^4} = \frac{9}{1 + 4 \cdot 81} = \frac{9}{325}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{1 + 2^2 \cdot 3^4} = \frac{12}{325}.$$

По формуле (2) получаем: $\operatorname{grad} z(A) = \left(\frac{9}{325};\ \frac{12}{325}\right)$.

2. Производная функции по направлению вектора находится по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta. \tag{3}$$

Найдём направляющие косинусы вектора:

$$\cos\alpha = \frac{x_{\vec{a}}}{|\vec{a}|} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}, \qquad \cos\beta = \frac{y_{\vec{a}}}{|\vec{a}|} = \frac{4}{5}.$$

Подставляем в (3), находим: $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \dfrac{9}{325}\cdot\dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{325}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{13}$.

Пример 6. Найти градиент функции $z = 5x^2 + 6xy$ в точке $A\,(2;1)$ и производную в точке A по направлению вектора $\vec{a}\,(1;2)$.

Решение. 1. Найдём частные производные функции и их значения в точке $A\,(2;1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(5x^2+6xy\right)'_x = 10x+6y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A = 10\cdot 2 + 6\cdot 1 = 26;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(5x^2+6xy\right)'_y = 6x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A = 6\cdot 2 = 12.$$

По формуле (2) находим градиент функции: $\mathrm{grad}\,z(A) = (26;\ 12)$.

2. Производную по направлению найдём по формуле (3).

Имеем $\cos\alpha = \dfrac{x_{\vec{a}}}{|\vec{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\quad \cos\beta = \dfrac{y_{\vec{a}}}{|\vec{a}|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{a}} = 26\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 12\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{50}{\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}.$$

Пример 7. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{8} + \dfrac{z^2}{2} = 0$ в точке $M\,(-3;-2;2)$.

Решение. Для поверхности $F(x,y,z) = 0$ уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0, \tag{4}$$

уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \tag{5}$$

Найдём частные производные функции и их значения в точке M:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2}\right)'_x = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M = \frac{-3}{3} = -1;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2}\right)'_y = \frac{2y}{8} = \frac{y}{4}, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{2}\right)'_z = \frac{2z}{2} = z, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M = 2$$

Подставляя значения производных в (4), (5), получаем уравнение касательной плоскости в точке:

$$-1\,(x+3) - \frac{1}{2}\,(y+2) + 2\,(z-2) = 0,$$

$$-x - \frac{1}{2}y + 2z - 8 = 0, \quad 2x + y - 4z + 16 = 0,$$

и уравнение нормали:

$$\frac{x+3}{-1} = \frac{y+2}{-0,5} = \frac{z-2}{2}.$$

Пример 8. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 + 8y^2 - 6xy + 5$ в точке $M\,(6;3;5)$.

Решение. Найдём частные производные функции и их значения в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 + 8y^2 - 6xy + 5\right)'_x = 2x - 6y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2\cdot 6 - 6\cdot 3 = -6;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 + 8y^2 - 6xy + 5\right)'_y = 16y - 6x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 16\cdot 3 - 6\cdot 6 = 12.$$

Уравнение касательной плоскости для функции $z = f(x, y)$:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}\,(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}\,(y - y_0)\,,$$

тогда

$$z - 5 = -6\,(x-6) + 12\,(y-3)$$

или

$$6x - 12y + z - 5 = 0.$$

Уравнение нормали для функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}$$

или

$$\frac{x - 6}{-6} = \frac{y - 3}{12} = \frac{z - 5}{-1}.$$

Пример 9. Исследовать функцию $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$ на экстремум.

Решение. 1. Найдём частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(4x - 4y - x^2 - y^2\right)'_x = 4 - 2x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(4x - 4y - x^2 - y^2\right)'_y = -4 - 2y.$$

2. Решив систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases}$ найдём стационарные точки. Имеем

$$\begin{cases} 4 - 2x = 0, \\ -4 - 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2, \\ y = -2. \end{cases}$$

Значит, $P(2, -2)$ – стационарная точка.

3. Найдём частные производные второго порядка и их значения в стационарной точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4 - 2x)'_x = -2, \quad A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_P = -2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4 - 2x)'_y = 0, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_P = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-4 - 2y)'_y = -2, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_P = -2.$$

Проверим выполнение достаточного условия существования экстремума:

$$\Delta = AC - B^2, \quad \Delta = -2 \cdot (-2) - 0^2 = 4 > 0,$$

при этом $A < 0$, тогда $P(2, -2)$ – точка максимума.

4. $z_{\max} = z(2, -2) = 4 \cdot 2 - 4 \cdot (-2) - 2^2 - (-2)^2 = 8.$

Пример 10. Исследовать функцию $z = e^x(x + y^2)$ на экстремум.

Решение. 1. Найдём частные производные первого порядка
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^x(x+y^2)\right)'_x = (e^x)'_x\,(x+y^2) + e^x\left(x+y^2\right)'_x = e^x(x+y^2+1),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^x(x+y^2)\right)'_y = e^x\left(x+y^2\right)'_y = 2ye^x.$$

2. Решив систему уравнений
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} e^x(x+y^2+1) = 0, \\ 2ye^x = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \end{cases}$$
находим стационарную точку $P(-1,0)$.

3. Найдём частные производные второго порядка и их значения в точке P:
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(e^x(x+y^2+1)\right)'_x = (e^x)'_x\,(x+y^2+1) + e^x\left(x+y^2+1\right)'_x =$$
$$= e^x(x+y^2+2), \quad A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_P = e^{-1}(-1+0^2+2) = \frac{1}{e};$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(e^x(x+y^2+1)\right)'_y = e^x\left(x+y^2+1\right)'_y = 2ye^x,$$
$$B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_P = 2\cdot 0\cdot e^{-1} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2ye^x)'_y = 2e^x, \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_P = 2e^{-1} = \frac{2}{e}.$$
Проверим выполнение достаточного условия:
$$\Delta = AC - B^2, \quad \Delta = \frac{1}{e}\cdot\frac{2}{e} - 0 = \frac{2}{e^2} > 0,$$
при этом $A > 0$, тогда $P(-1,0)$ – точка минимума.

4. $z_{\min} = z(-1,0) = e^{-1}(-1+0^2) = -1/e$.

Пример 11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + 6xy$ в замкнутой области $\overline{D}$, заданной системой неравенств $-1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$.

Решение. 1. Изобразим область $\overline{D}$ на координатной плоскости Oxy. Данная замкнутая область $\overline{D}$ представляет собой квадрат $ABCE$ (рис. 9).

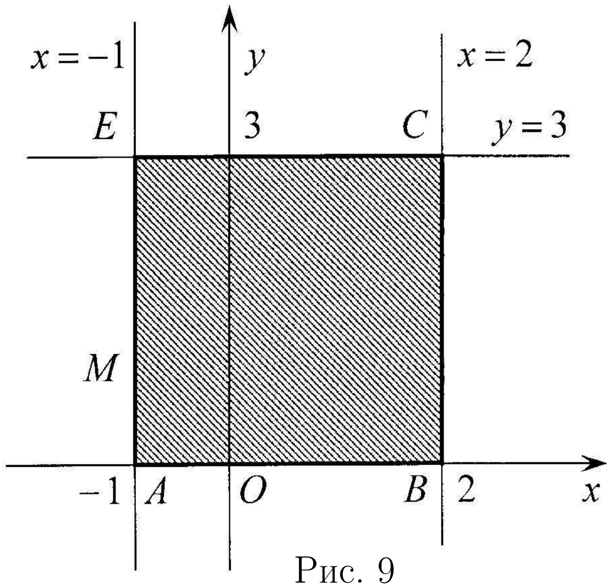

Рис. 9

2. Найдём стационарные точки внутри области $\overline{D}$. Для этого вычислим частные производные функции $z'_x = (x^2 + 3y^2 + 6xy)'_x = 2x + 6y$, $z'_y = (x^2 + 3y^2 + 6xy)'_y = 6y + 6x$, и решим систему

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 6y = 0, \\ 6y + 6x = 0. \end{cases}$$

Решение системы $x = 0$, $y = 0$. Точка $O(0;0)$ принадлежит границе области, значит, внутри области стационарных точек нет.

3. Исследуем поведение функции на границе области. Найдём наименьшее и наибольшее значения функции на каждом участке границы.

На отрезке AB прямой $y = 0$, $x \in [-1;2]$, данная функция является функцией одной переменной x: $z = x^2$. Найдём стационарные точки этой функции, принадлежащие отрезку $[-1;2]$. Так как $z' = 2x$, то $z' = 0$ при $x = 0$. Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в точке $O(0;0)$, а также в граничных точках $A(-1;0)$ и $B(2;0)$. Вычислим значения функции во всех этих точках: $z(O) = 0$, $z(A) = 1$, $z(B) = 4$.

На отрезке BC: $x = 2$, $0 \le y \le 3$, данная функция является функцией одной переменной y: $z = 3y^2 + 12y + 4$. Найдём стационарные точки этой функции, принадлежащие отрезку $[0;3]$. Так как $z' = 6y + 12$, то $z' = 0$ при $y = -2$. Точка $y = -2$ не принадлежит отрезку $[0;3]$. Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в граничных точках $B(2;0)$ и $C(2;3)$. Вычислим значение функции в точке C: $z(C) = 67$.

На отрезке CE: $y = 3$, $-1 \le x \le 2$, данная функция является функцией одной переменной x: $z = x^2 + 18x + 27$. Так как $z' = 2x + 18$, то

$z' = 0$ при $x = -9$. Стационарных точек этой функции, принадлежащих отрезку $[-1; 2]$, нет. Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в граничных точках $C(2; 3)$ и $E(-1; 3)$. Вычислим значение функции в точке E: $z(E) = 10$.

На отрезке AE: $x = -1$, $0 \leq y \leq 3$, данная функция является функцией одной переменной y: $z = 3y^2 - 6y + 1$. Найдём стационарные точки этой функции, принадлежащие отрезку $[0; 3]$. Так как $z' = 6y - 6$, то $z' = 0$ при $y = 1$. Точка $y = 1$ принадлежит отрезку $[0; 3]$. Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в точке $M(-1; 1)$, а также в граничных точках $A(-1; 0)$ и $E(-1; 3)$. Вычислим значение функции в точке M: $z(M) = -2$.

4. Сопоставляя значения функции в точках A, O, B, C, E, M, приходим к выводу, что данная функция $z = x^2 + 3y^2 + 6xy$ в области $\overline{D}$, заданной системой неравенств $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, достигает минимального значения в точке M, причём $z_{\min} = z(-1; 1) = -2$, и максимального значения в точке C, причём $z_{\max} = z(2; 3) = 67$.

Пример 12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 + 4x + y^2 - 2xy$ в замкнутой области $\overline{D}$, заданной системой неравенств $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y + 2 \geq 0$.

Решение. 1. Изобразим область $\overline{D}$ на координатной плоскости Oxy. Замкнутая область $\overline{D}$ представляет собой треугольник AOB (рис. 10).

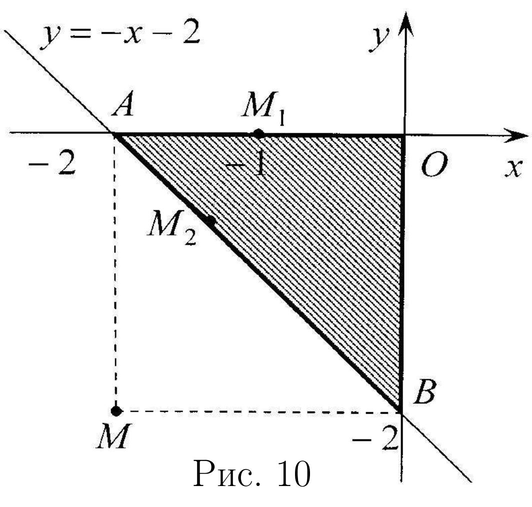

Рис. 10

2. Найдём стационарные точки внутри области $\overline{D}$. Для этого составим систему уравнений

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0.
\end{cases}
$$

Для заданной функции система имеет вид

$$
\begin{cases}
4x + 4 - 2y = 0, \\
2y - 2x = 0.
\end{cases}
$$

Система имеет решение $x = -2$, $y = -2$. Точка $M(-2; -2)$ не принадлежит заданной области, значит, внутри области стационарных точек нет.

3. Исследуем поведение функции на границе области.

На отрезке OA: $y = 0$, $-2 \le x \le 0$, данная функция является функцией одной переменной x: $z = 2x^2 + 4x$. Найдём стационарные точки этой функции, принадлежащие отрезку $[-2; 0]$. Так как $z' = 4x + 4$, то $z' = 0$ при $x = -1$. Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в точке $M_1(-1, 0)$, а также в граничных точках $A(-2; 0)$ и $O(0; 0)$. Вычислим значения функции во всех этих точках: $z(M_1) = -2$, $z(A) = 0$, $z(O) = 0$.

На отрезке OB: $x = 0$, $-2 \le y \le 0$, данная функция является функцией одной переменной y: $z = y^2$. Найдём стационарные точки этой функции, принадлежащие отрезку $[-2; 0]$. Так как $z' = 2y$, то $z' = 0$ при $y = 0$. Точка $y = 0$ совпадает с концом отрезка $[-2; 0]$. Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в граничных точках $B(0; -2)$ и $O(0; 0)$. Вычислим значение функции в точке B: $z(B) = 4$.

На отрезке AB: $y = -x - 2$, $-2 \le x \le 0$, данная функция является функцией одной переменной x: $z = 5x^2 + 12x + 4$. Так как $z' = 10x + 12$, то $z' = 0$ при $x = -1,2$. Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в точке $M_2(-1,2; -0,8)$ или в граничных точках $A(-2; 0)$ и $B(0; -2)$. Вычислим значение функции в точке M_2: $z(M_2) = -3,2$.

4. Сравним значения функции в точках O, M_1, A, M_2, B.

Данная функция $z = 2x^2 + 4x + y^2 - 2xy$ в области $\overline{D}$, заданной системой неравенств $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y + 2 \ge 0$, достигает минимального значения в точке M_2, причём $z_{\min} = z(-1,2; -0,8) = -3,2$, и максимального значения в точке B, причём $z_{\max} = z(0; -2) = 4$.

Пример 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 10 + 2xy - x^2$ в замкнутой области $\overline{D}$, заданной системой неравенств $0 \le y \le 4 - x^2$.

Решение. 1. Изобразим замкнутую область $\overline{D}$ на координатной плоскости Oxy (рис. 11).

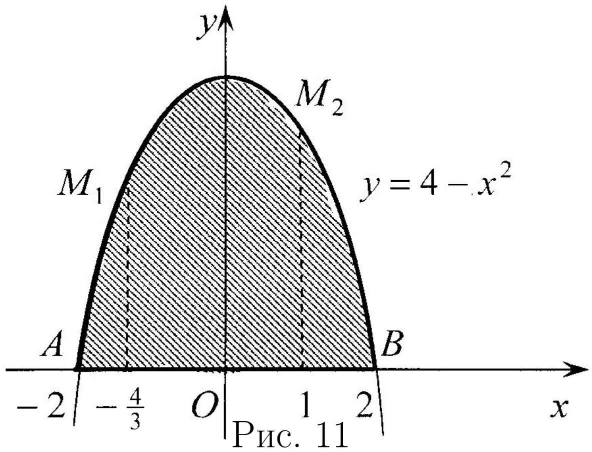

Рис. 11

2. Найдём стационарные точки внутри области $\overline{D}$. Для этого вычислим частные производные функции $z'_x = (10 + 2xy - x^2)'_x = 2y - 2x$, $z'_y = (10 + 2xy - x^2)'_y = 2x$, и решим систему

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2y - 2x = 0, \\ 2x = 0. \end{cases}$$

Решение системы $x = 0$, $y = 0$. Точка $O(0;0)$ принадлежит границе области, значит, внутри области стационарных точек нет.

3. Исследуем поведение функции на границе области. Найдём наименьшее и наибольшее значения функции на каждом участке границы.

На отрезке AB: $y = 0$, $-2 \le x \le 2$, данная функция является функцией одной переменной x: $z = 10 - x^2$. Найдём стационарные точки этой функции, принадлежащие отрезку $[-2;2]$. Так как $z' = -2x$, то $z' = 0$ при $x = 0$.

Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в точке $O(0;0)$, а также в граничных точках $A(-2;0)$ и $B(2;0)$. Вычислим значения функции в этих точках: $z(O) = 10$, $z(A) = 6$, $z(B) = 6$.

На дуге AB: $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$, данная функция является функцией одной переменной x: $z = -2x^3 - x^2 + 8x + 10$. Так как производная $z' = -6x^2 - 2x + 8$, то $z' = 0$ при $x = -4/3$ и при $x = 1$. Наибольшее и наименьшее значения функции могут быть в точках $M_1(-4/3;20/9)$,

$M_2(1;3)$ и в граничных точках $A(-2;0)$ и $B(2;0)$. Вычислим значения функции в точках M_1 и M_2: $z(M_1) = 8/3$, $z(M_2) = 15$.

4. Из полученных значений функции в точках A, M_1, M_2, B выберем наибольшее и наименьшее.

Наибольшее значение функции $z_{\max} = 15$ в точке $M_2(1;3)$, а наименьшее – $z_{\min} = 8/3$ в точке $M_1(-4/3;20/9)$.

Пример 14. Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x,y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$ (x – количество единиц первого ресурса, y – второго). Стоимость единицы первого ресурса – 4, второго – $1/48$ ден. ед. Найти максимальную прибыль при использовании ресурсов.

Решение. Производственная функция в денежном выражении равна доходу от использования ресурсов. Издержки при этом составят

$$C(x,y) = 4x + \frac{1}{48}y.$$

Тогда функция прибыли будет равна

$$P(x,y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y} - 4x - \frac{1}{48}y.$$

Требуется найти максимум этой функции.

Найдём стационарные точки функции, для этого вычислим частные производные и приравняем их к нулю, получим систему

$$\begin{cases} P'_x = 0, \\ P'_y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 15x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} - 4 = 0, \\ 10x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{48} = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдём $x = 6750^2$, $y = 1800^3$.

Частные производные второго порядка функции прибыли равны:

$$P''_{xx} = -\frac{15}{2}x^{-\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{3}}, \quad P''_{xy} = 5x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}, \quad P''_{yy} = -\frac{20}{3}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{5}{3}}.$$

Тогда $\Delta = P''_{xx}P''_{yy} - (P''_{xy})^2 = 25\ x^{-1}y^{-\frac{4}{3}}$.

Так как $\Delta > 0$ и $P''_{xx} < 0$, то найденная точка $M(6750^2;1800^3)$ является точкой максимума функции прибыли. Соответствующее значение прибыли равно $P(M) = 60\ 750\ 000$ ден. ед.

Раздел IX. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Геометрическая вероятность. Сумма двух событий. Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Произведение событий, условная вероятность. Теорема умножения для зависимых событий. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Формула Пуассона.

Пример 1. Наудачу указывается месяц и число некоторого не високосного года. Какова вероятность того, что это будет воскресенье, если всего в этом году 53 воскресенья, а соответствие чисел дням недели неизвестно?

Решение. Имеем $n = 365$ – всего дней в году, $m = 53$ – благоприятных исходов, тогда $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{53}{365}$.

Пример 2. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара – белые?

Решение. Число всех исходов $n = C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2!\,8!} = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$. Число же исходов, благоприятствующих событию A, определяется равенством $m = C_6^2$, то есть $m = \dfrac{6!}{2!\,4!} = \dfrac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Следовательно, $P(A) = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$.

Пример 3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75; для второго – 0,8; для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель; хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение. Рассмотрим события: A – первый стрелок попал, B – второй стрелок попал, C – третий стрелок попал. По условию вероятности этих событий равны $P(A) = 0,75$; $P(B) = 0,8$; $P(C) = 0,9$. Так как события независимы, то вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель, будет равна

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,75 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,54.$$

Найдем $P(\overline{A}) = 1 - 0,75 = 0,25$ – вероятность промаха первого стрелка, $P(\overline{B}) = 1 - 0,8 = 0,2$ – вероятность промаха второго стрелка, $P(\overline{C}) = 1 - 0,9 = 0,1$ – вероятность промаха третьего стрелка.

Тогда вероятность того, что все три стрелка промахнутся, будет равна $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) = 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,005$.

Событие D – хотя бы один стрелок попал, противоположно событию $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$. Значит, $P(D) = 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 1 - 0,005 = 0,995$.

Пример 4. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором – 10 белых и 10 черных шаров, в третьем – 20 черных шаров. Из выбранного наудачу ящика вынули белый шар. Вычислить вероятность того, что шар вынут из первого ящика.

Решение. Рассмотрим событие A – взятый наудачу шар белый. Выдвинем гипотезы: H_1 – выбрали первый ящик, H_2 – выбрали второй ящик, H_3 – выбрали третий ящик.

Так как ящики одинаковы, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$.

$P(A/H_1) = 1$ – вероятность извлечения белого шара из первого ящика; вероятность извлечения белого шара из второго ящика: $P(A/H_2) = 10/20 = 1/2$; вероятность извлечения белого шара из третьего ящика: $P(A/H_3) = 0$.

По формуле полной вероятности найдем вероятность того, что из наудачу выбранного ящика достали белый шар:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Искомую вероятность $P(H_1/A)$ – вероятность того, что выбранный белый шар взят из первого ящика, находим по формуле Байеса:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1 \cdot (1/3)}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Пример 5. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдут: а) четыре; б) не менее четырех.

Решение. а) Воспользуемся формулой Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Подставив значения $n = 5$, $k = 4$; $p = 0,9$; $q = 1 - p = 0,1$, имеем:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,9^4 \cdot 0,1 = \frac{5!}{4!\,1!} \cdot 0,6561 \cdot 0,1 = 5 \cdot 0,06561 = 0,32805.$$

б) Искомое событие A состоит в том, что из пяти посеянных семян взойдут или четыре, или пять. Таким образом, $P(A) = P_5(4) + P_5(5)$.

Первое слагаемое уже найдено. Вычислим второе:

$$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,9^5 \cdot 0,1^0 = \frac{5!}{5!\,0!} \cdot 0,59049 \cdot 1 = 0,59049.$$

Следовательно, $P(A) = 0,32805 + 0,59049 = 0,91854$.

Пример 6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Было выполнено 600 выстрелов. Найти вероятность того, что было зафиксировано 330 попаданий; от 330 до 375 попаданий. Найти наивероятнейшее число попаданий.

Решение. 1) Так как число испытаний n велико, то применим приближенную локальную формулу Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-x^2/2},$$

значения $\varphi(x)$ даются в приложении 1.

По условию $n = 600$, $k = 330$, $p = 0,6$; $q = 1 - 0,6 = 0,4$; тогда

$$x = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = \frac{-30}{12} = -2,5.$$

По таблице приложения 1 находим, что $\varphi(-2,5) = \varphi(2,5) = 0,0175$. Следовательно,

$$P_{600}(330) \approx \frac{1}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} \cdot 0,0175 \approx 0,001.$$

2) Применим интегральную формулу Лапласа

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

По условию $n = 600$, $p = 0,6$; $k_1 = 330$, $k_2 = 375$. Найдем

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{330 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -2,5;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{375 - 600 \cdot 0,6}{\sqrt{600 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = 1,25.$$

По таблице приложения 2 находим: $\Phi(1,25) = 0,3944$; $\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) = -0,4938$.

Подставив эти значения в формулу, получим искомую вероятность

$$P_{600}(300 \le k \le 375) \approx 0,3944 - (-0,4938) = 0,8882.$$

3) Наивероятнейшее число попаданий k_0 определим из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Используя условия задачи, получим

$$600 \cdot 0,6 - 0,4 \le k_0 \le 600 \cdot 0,6 + 0,4;$$

$$359,6 \le k_0 \le 360,6.$$

Так как k_0 – целое число, удовлетворяющее двойному неравенству, то наивероятнейшее число попаданий $k_0 = 360$.

Пример 7. Из склада в магазин отправлено 1000 бутылок минеральной воды. Для каждой бутылки вероятность того, что она разобьется в пути, равна 0,003. Найти вероятность того, что магазин получит разбитых бутылок: а) две, б) менее двух, в) более двух, г) хотя бы одну; д) от двух до четырех.

Решение. Здесь $n = 1000$, $p = 0,003$; $npq = 1000 \cdot 0,003 \cdot 0,997 < 10$. Следовательно, будем использовать формулу Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}, \quad \lambda = np = 1000 \cdot 0,003 = 3.$$

Зная λ и k, соответствующие вероятности находим из таблицы приложения 3.

а) При $k = 2$ получим $P_{1000}(2) \approx 0,224042$.

б) При $k < 2$ имеем $P_{1000}(k < 2) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) \approx 0,049787 + 0,149361 = 0,199148$.

в) При $k > 2$ найдем $P_{1000}(k > 2) = 1 - P_{1000}(k \le 2) = 1 - (P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2)) \approx 1 - (0,049787 + 0,149361 + 0,224042) = 0,57681$.

г) При $k \ge 1$ получим $P_{1000}(k \ge 1) = 1 - P_{1000}(0) \approx 1 - 0,049787 = 0,950213$.

д) Если $2 \le k \le 4$, то $P_{1000}(2 \le k \le 4) = P_{1000}(2) + P_{1000}(3) + P_{1000}(4) = 0,224042 + 0,224042 + 0,168031 = 0,616115$.

Раздел X. Случайные величины

Виды случайных величин. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Многоугольник распределения. Биномиальное распределение, распределение Пуассона дискретных случайных величин. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства математического ожидания. Дисперсия дискретной случайной величины. Свойства дисперсии. Среднее квадратическое отклонение. Функция распределения вероятностей случайной величины, её свойства. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, её свойства. Числовые характеристики непрерывных случайных величин. Закон равномерного распределения. Функция распределения, математическое ожидание, дисперсия равномерно - распределённой случайной величины.Нормальное распределение, вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал. Вычисление вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины. Правило трёх сигм. Показательное распределение. Вероятность попадания в интервал показательно распределенной случайной величины. Система двух случайных величин. Предельные теоремы теории вероятностей. Цепи Маркова.

Пример 1. Опыт состоит из трех независимых бросаний монеты, при каждом из которых герб выпадает с вероятностью $p = 0,5$. Для случайного числа появлений герба построить ряд распределения и найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. 1) Случайная величина X может принимать четыре значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Так как в каждом опыте вероятность выпадения герба постоянна и равна $p = 0,5$; то для вычисления вероятностей возможных значений воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Тогда

$$p_1 = P(X = x_1) = P_3(0) = C_3^0 \cdot 0,5^0 \cdot 0,5^3 = 0,125;$$

$$p_2 = P(X = x_2) = P_3(1) = C_3^1 \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^2 = 0,375;$$

$$p_3 = P(X = x_3) = 0,375; \quad p_4 = P(X = x_4) = 0,125.$$

Проверка: $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 0,125 + 0,375 + 0,375 + 0,125 = 1.$

Получили биномиальный закон распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

2) Математическое ожидание найдем по формуле $M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i$, тогда $M(X) = 0 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,125 = 1,5$.

Дисперсию найдем по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Построим дополнительную таблицу:

x_i^2	0	1	4	9
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

Тогда $M(X^2) = 0 \cdot 0,125 + 1 \cdot 0,375 + 4 \cdot 0,375 + 9 \cdot 0,125 = 3$. Значит, $D(X) = 3 - 1,5^2 = 0,75$.

Среднее квадратическое отклонение равно

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,75} \approx 0,866.$$

Замечание. Так как полученное распределение является биномиальным, то найти числовые характеристики можно, используя формулы $M(X) = np$, $D(X) = npq$, где n – число испытаний, p – вероятность появления события, q – вероятность непоявления события. Имеем $M(X) = 3 \cdot 0,5 = 1,5$; $D(X) = 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,75$.

Пример 2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ (x-2)^3, & 2 \le x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(2; 2,5)$, построить графики $f(x)$, $F(x)$.

Решение. 1) Плотность распределения равна производной от функции распределения, то есть $f(x) = F'(x)$, поэтому

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ 3(x-2)^2, & 2 \le x < 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Построим графики функций $F(x)$ (рис. 12) и $f(x)$ (рис. 13).

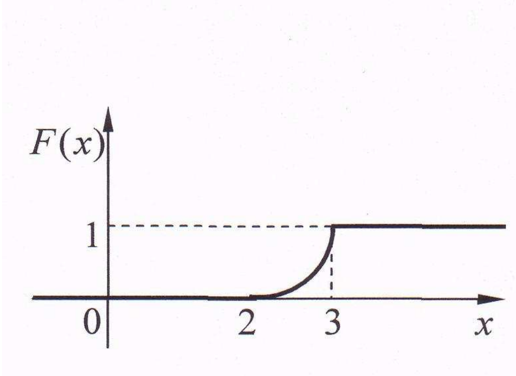

Рис. 12

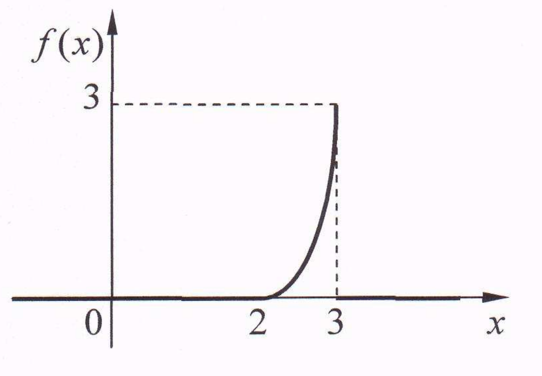

Рис. 13

2) Используя формулы

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx; \quad D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2,$$

найдем числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Имеем

$$M(X) = \int_2^3 x \cdot 3(x-2)^2\,dx = 3\int_2^3 (x^3 - 4x^2 + 4x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\,x^4 - 4x^3 + 6x^2\right)\Big|_2^3 = 60,75 - 108 + 54 - 12 + 32 - 24 = 2,75.$$

Тогда

$$D(X) = \int_2^3 x^2 \cdot 3(x-2)^2\,dx - 2,75^2 = 3\int_2^3 (x^4 - 4x^3 + 4x^2)\,dx - 2,75^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{5}\,x^5 - 3x^4 + 4x^3\right)\Big|_2^3 - 2,75^2 =$$

$$= 145,8 - 243 + 108 - 19,2 + 48 - 32 - 7,5625 = 0,0375.$$

3) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, равна определенному ин-

тегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b:

$$P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Учитывая условия задачи, получим

$$P(2 < X < 2,5) = 3\int\limits_2^{2,5}(x-2)^2\,dx = (x-2)^3\Big|_2^{2,5} =$$
$$= (2,5-2)^3 - (2-2)^3 = 0,5^3 = 0,125.$$

Пример 3. Заданы математическое ожидание $a = 0$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1; 2); б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 0,02$.

Решение. а) Вероятность попадания в интервал $(\alpha;\ \beta)$ случайной величины X, подчиненной нормальному закону, определяется через значения функции Лапласа по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Поэтому

$$P(1 < X < 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{1-0}{1}\right) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3414 = 0,1359.$$

б) Вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше δ, равна

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Тогда

$$P(|X - 0| < 0,02) = 2\Phi\left(\frac{0,02}{1}\right) = 2\Phi(0,02) = 2 \cdot 0,3989 = 0,7978.$$

Раздел XI. Элементы математической статистики

Генеральная и выборочная совокупности. Вариационные ряды. Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Графическое изображение вариационных рядов. Числовые характеристики вариационных рядов: средняя арифметическая, мода и медиана, дисперсия,среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, начальные и центральные моменты, асимметрия и эксцесс. Оценки параметров распределения. Методы получения оценок. Понятие интервального оценивания параметров.Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ. Проверка статистических гипотез. Критерий К. Пирсона. Регрессионный анализ. Дисперсионный анализ.

Пример 1. На телефонной станции производились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Наблюдения в течение часа дали следующие результаты:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
3 & 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 7 & 2 & 0 \\
2 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 2 & 1 & 4 & 3 & 4 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1 \\
3 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 5
\end{array}$$

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_{\text{в}}$, $D_{\text{в}}$, S^2.

Решение. 1) Составим вариационный ряд, для этого запишем варианты в возрастающем порядке и найдем соответствующие им частоты, то есть сколько раз та или иная варианта встречается в выборке. Результаты запишем в таблицу:

x_i	0	1	2	3	4	5	7
n_i	8	17	16	10	6	2	1

Контроль: объем выборки $n = \sum_{i=1}^{7} n_i = 60$.

2) Построим полигон частот – ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), $\ldots$, (x_k, n_k), где x_i – варианты выборки, n_i – соответствующие им частоты (рис. 14).

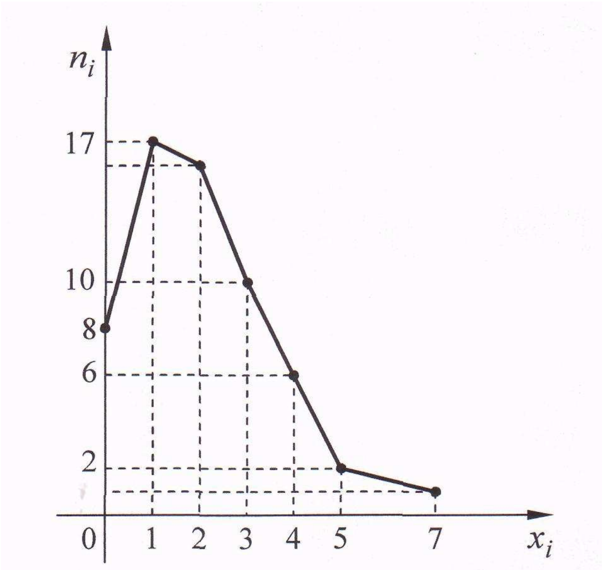

Рис. 14

3) Несмещенной оценкой генеральной средней является выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}}$, которая находится по формуле $\overline{x}_{\text{в}} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$. Имеем

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{8 \cdot 0 + 17 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 7}{60} = \frac{120}{60} = 2.$$

4) Смещенной оценкой генеральной дисперсии является выборочная дисперсия $D_{\text{в}}$, которую вычислим по формуле $D_{\text{в}} = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2$, где $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$, $\overline{x^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n}$. Имеем

$$\overline{x^2} = \frac{8 \cdot 0^2 + 17 \cdot 1^2 + 16 \cdot 2^2 + 10 \cdot 3^2 + 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 7^2}{60} = \frac{366}{60} = 6,1;$$

$$\overline{x} = \overline{x}_{\text{в}} = 2, \qquad D_{\text{в}} = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2 = 6,1 - 2^2 = 2,1.$$

5) Несмещенной оценкой генеральной дисперсии является исправленная выборочная дисперсия S^2, которую найдем по формуле:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_{\text{в}} = \frac{60}{59} \cdot 2,1 \approx 2,14.$$

Пример 2. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0,95$ неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}} = 14$ и объем выборки $n = 25$.

Решение. Доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $_{\text{в}}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности с заданной надежностью γ вычисляется по формуле

$$\overline{x}_{\text{в}} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

где $t\sigma/\sqrt{n} = \delta$ – точность оценки, n – объем выборки, t – значение функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$.

Все величины, кроме t известны. Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \gamma/2 = 0,95/2 = 0,475$. По таблице значений функции Лапласа (см. приложение 2) находим $t = 1,96$. Подставив исходные данные в формулу (2), получим

$$14 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} < a < 14 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}, \qquad 12,04 < a < 15,96.$$

Таким образом, $(12,04; 15,96)$ – искомый доверительный интервал.

Пример 3. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмп. частоты	6	16	38	74	106	85	30	14
теор. частоты	3	14	42	82	99	76	37	13

Решение. Вычислим $\chi^2_{\text{набл.}}$, для чего составим расчетную табл. 1.

Контроль: $\chi^2_{\text{набл.}} = 7,19$ и $\left[\sum n_i^2/n_i'\right] - n = 373,19 - 366 = 7,19$.

Значит, вычисления произведены правильно.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп выборки (число различных вариант) $s = 8$; $k = 8 - 3 = 5$. По таблице критических точек распределения χ^2 (см. приложение 4), по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = 5$ находим $\chi^2_{\text{кр.}}(0,05;\ 5) = 11,1$.

Так как $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{кр.}}$, то нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

Таблица 1

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$(n_i - n'_i)^2/n'_i$	n_i^2	n_i^2/n'_i
1	6	3	3	9	3	36	12
2	13	14	-1	1	0,07	169	12,07
3	38	42	-4	16	0,38	1444	34,38
4	74	82	-8	64	0,78	5476	66,78
5	106	99	7	49	0,49	11236	113,49
6	85	76	9	81	1,07	7225	95,07
7	30	37	-7	49	1,32	900	24,32
8	14	13	1	1	0,08	196	15,08
Σ	366	366			$\chi^2_{\text{набл.}} = 7,19$		373,19

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Задачи, приводящие к понятию производной.

2. Определение производной, её геометрический и механический смысл.

3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

4. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций.

5. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.

6. Производные высших порядков.

7. Дифференцирование неявно и параметрически заданных функций.

8. Логарифмическое дифференцирование.

9. Понятие дифференциала функции, его геометрический смысл. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям.

10. Основные теоремы дифференциального исчисления.

11. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей.

12. Интервалы монотонности, алгоритм их отыскания. Экстремум функции.

13. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке.

14. Выпуклость графика функции, точки перегиба.

15. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения её графика.

16. Приложения производной в экономической теории.

17. Первообразная функция и неопределенный интеграл.

18. Свойства неопределенного интеграла.

19. Таблица основных неопределенных интегралов.

20. Основные методы интегрирования.

21. Интегралы от некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен.

22. Интегрирование рациональных функций.

23. Интегрирование иррациональных функций.

24. Интегрирование тригонометрических функций.

25. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

26. Понятие определенного интеграла.

27. Основные свойства определенного интеграла.

28. Оценки интегралов. Формула среднего значения.

29. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона - Лейбница.

30. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

31. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, длина дуги кривой, объем тела, площадь поверхности тела вращения.

32. Приложения определенного интеграла в экономике.

33. Приближенное вычисление определенных интегралов: формула прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона.

34. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от разрывных функций.

35. Признаки сходимости несобственных интегралов.

36. Функции двух переменных (основные понятия).

37. Геометрическое изображение функции двух переменных.

38. Предел функции двух переменных.

39. Непрерывность функции двух переменных.

40. Частные производные первого порядка.

41. Частные производные высших порядков.

42. Дифференцируемость и полный дифференциал функции.

43. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

44. Дифференциалы высших порядков.

45. Производная сложной функции. Полная производная.

46. Дифференцирование неявной функции.

47. Производная по направлению. Градиент.

48. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

49. Экстремум функции двух переменных.

50. Условный экстремум.

51. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

52. Эмпирические формулы. Метод наименьших квадратов.

53. Функции нескольких переменных в экономической теории.

54. Предмет теории вероятностей. Виды случайных событий.

55. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности.

56. Элементы комбинаторики.

57. Геометрическая вероятность.

58. Относительная частота. Свойство устойчивости относительной частоты.

59. Сумма двух событий. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

60. Произведение событий, условная вероятность. Теорема умножения для зависимых событий.

61. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий.

62. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

63. Формула Бернулли. Наиболее вероятное число успехов.

64. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

65. Формула Пуассона.

66. Виды случайных величин. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины. Многоугольник распределения.

67. Биномиальное распределение, распределение Пуассона дискретных случайных величин.

68. Простейший поток событий.

69. Операции над случайными событиями.

70. Математическое ожидание дискретной случайной величины. Свойства математического ожидания.

71. Дисперсия дискретной случайной величины. Свойства дисперсии. Среднее квадратическое отклонение.

72. Функция распределения вероятностей случайной величины, её свойства.

73. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, её свойства.

74. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

75. Закон равномерного распределения. Функция распределения, математическое ожидание, дисперсия равномерно - распределённой случайной величины.

76. Нормальное распределение, вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал.

77. Вычисление вероятности заданного отклонения нормально распределенной случайной величины. Правило трёх сигм.

78. Асимметрия и эксцесс.

79. Показательное распределение. Вероятность попадания в интервал показательно распределенной случайной величины.

80. Система двух случайных величин.

81. Предельные теоремы теории вероятностей.

82. Цепи Маркова.

83. Предмет математической статистики.

84. Генеральная и выборочная совокупности. Вариационные ряды.

85. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.

86. Графическое изображение вариационных рядов.

87. Числовые характеристики вариационных рядов: средняя арифметическая, мода и медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, начальные и центральные моменты, асимметрия и эксцесс.

88. Выборочный метод. Общие сведения о выборочном методе.Ошибки выборочного наблюдения.

89. Понятие оценки параметров распределения.

90. Методы получения оценок.

91. Понятие интервального оценивания параметров. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном σ.

92. Проверка статистических гипотез. Критерий К. Пирсона.

93. Регрессионный анализ.

94. Дисперсионный анализ.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Контрольная работа должна быть выполнена в тетради в клетку. Необходимо оставить поля шириной 2-3 см для замечаний преподавателя. На обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), номер контрольной работы.

2. В работу должны быть включены все задачи, указанные в контрольном задании.

3. Перед решением каждой задачи нужно полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

4. Решение задачи следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все свои действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

5. Студент выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

6. Контрольные работы должны быть сданы на проверку не позднее, чем за две недели до начала сессии.

7. Контрольные работы, проверенные преподавателем, вместе со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления проверенных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена. При необходимости (по требованию преподавателя) студент должен давать на экзамене устные пояснения ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этих работах.

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1. Найти производные функций.

1. а) $y = \dfrac{(3x-4)\sqrt{x}}{x^3}$; б) $y = \ln\sin 5x$.

2. а) $y = \dfrac{(x^2+1)\sqrt{x}}{x-1}$; б) $y = e^{x^2-2x+1}$.

3. а) $y = \dfrac{(x^3-1)\sqrt{x}}{x+1}$; б) $y = \operatorname{tg}\sin\sqrt{x}$.

4. а) $y = \dfrac{x^2\sqrt{x}}{x^2+1}$; б) $y = \ln^2\cos 4x$.

5. а) $y = \dfrac{x^3-27x}{x\sqrt{x}}$; б) $y = \ln^2(1+x)$.

6. а) $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2+2x-3}$; б) $y = \ln(1+2x+x^2)$.

7. а) $y = \dfrac{x\sqrt{x}}{(x+1)^2}$; б) $y = \sin^3(2x+1)$.

8. а) $y = \dfrac{(2x-1)\sqrt{x}}{1+x^3}$; б) $y = \sqrt[7]{1-2\cos x}$.

9. а) $y = \dfrac{(2x-7)\sqrt{x}}{x^2+2x-3}$; б) $y = (4x+e^x)^5$.

10. а) $y = \dfrac{1-2x^3}{x^3\sqrt{x}}$; б) $y = \ln^3(1+x^2)$.

Задание 2. Найти производные функций, используя логарифмирование.

1. $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$ 5. $y = (x^3+4)^{\operatorname{tg} x}$ 8. $y = (x+\cos x)^{x^2}$

2. $y = (\ln(1+x))^{2x}$ 6. $y = (x+3)^{\operatorname{tg} 2x}$ 9. $y = (\operatorname{tg} 7x)^{4x}$

3. $y = x^{2x} 5^x$ 7. $y = (\cos 2x)^{\cos 2x}$ 10. $y = (x + \sin x)^{x^2}$

4. $y = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}$

Задание 3. Найти производные y'_x от неявных функций.

1. $2x + y^2 - 4\sqrt{y} = 0$ 6. $x \cos y + y \sin x = 0$

2. $xy - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = 0$ 7. $\ln y + \dfrac{x}{y} - 2 = 0$

3. $x \ln y + y \ln x = 0$ 8. $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0$

4. $\operatorname{arctg}(x+y) = x$ 9. $e^x + e^y - e^{xy} - 1 = 0$

5. $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$ 10. $e^{xy} - y^2 = 0$

Задание 4. Найти производные первого и второго порядков.

1. а) $\begin{cases} x = 2t^3 + t^2 + 1; \\ y = 4t^3; \end{cases}$ б) $y = x^3 \ln x - 3x^2$.

2. а) $\begin{cases} x = 3(\cos t - t \sin t); \\ y = 3(\sin t + t \cos t); \end{cases}$ б) $y = \ln(x^3 + x^2)$.

3. а) $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = 2 \sin^2 t; \end{cases}$ б) $y = (x^2 + \sqrt{x})e^{-x}$.

4. а) $\begin{cases} x = \sqrt{t-3}; \\ y = \ln(t-2); \end{cases}$ б) $y = x^3 \ln x + 3x^2$.

5. а) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \sin 2t; \end{cases}$ б) $y = (\sqrt{3x} - 1)e^{\sqrt{3x}}$.

6. а) $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}; \\ y = \sqrt{t^3 - 1}; \end{cases}$ б) $y = x(\operatorname{arctg} x + 2^{x^2})$.

7. а) $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}; \\ y = \ln t; \end{cases}$ б) $y = \sin x(1 + \ln x)$.

8. а) $\begin{cases} x = e^t \sin t; \\ y = 2 - \cos t; \end{cases}$ б) $y = \sin \ln x(x^2 + 1)$.

9. а) $\begin{cases} x = t + \sin t; \\ y = 2 + \cos t; \end{cases}$ б) $y = (x^3 + \sqrt{x}) \cos 2x$.

10. а) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \sqrt{1 - t^3}; \end{cases}$ б) $y = e^{-2x}(x^3 - \sin x)$.

Задание 5. Найти приближенные значения.

1. $\sqrt{4,08}$	3. $1,001^{100}$	5. $\sqrt[3]{8,01}$	7. $\ln(1,03)^2$	9. $\dfrac{1}{0,997^{30}}$
2. $\dfrac{1}{2,0016^3}$	4. $1,002^{100}$	6. $1,02^{100}$	8. $\sqrt{0,997}$	10. $\sqrt[6]{1,045}$

Задание 6. Вычислить пределы функций, используя правило Лопиталя.

1. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos^3 x}{3x - \sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 2}{3 \operatorname{arctg} x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + x - 1}{3x^2 - 16x + 5}$.

3. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$.

4. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 9}{3 - x}$.

5. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 7x + 6}{(x + 2)^2}$.

6. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}^2 4x}{x \sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 21x - 11}{x^2 - 9x - 22}$.

7. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{1 - \cos x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x + 1}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{\operatorname{tg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x-1}{2x^2+5x+2}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{ctg} 7x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-1}{2x^2-x-1}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(1+3x)}{x^5+x}$.

Задание 7. Найти наибольшие и наименьшие значения функций на заданных отрезках.

1. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+4x,\ [-1;3]$
2. $f(x)=x+\ln\cos x,\ \left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$
3. $f(x)=\sqrt{1+x^2},\ [-1;2]$
4. $f(x)=\cos^2 x,\ [0;\pi]$
5. $f(x)=\dfrac{x}{x+1},\ [-0,5;3]$
6. $f(x)=x^3+\dfrac{3}{2}x^2,\ [-1;2]$
7. $f(x)=x^2+3\sqrt{x},\ [0;4]$
8. $f(x)=2x^3-3x^2-12x,\ [-2;3]$
9. $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{3}\cos 3x,\ \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
10. $f(x)=\arcsin\dfrac{x}{2},\ [0;\pi]$

Задание 8. Исследовать функции и построить их графики.

1. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$
2. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$
3. $y=\dfrac{(x-1)^3}{x^2}$
4. $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$
5. $y=\dfrac{x^2-2x-2}{x-1}$
6. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3}$
7. $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$
8. $y=\dfrac{2x-1}{(x-2)^2}$
9. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$
10. $y=\dfrac{x^4}{x^2-1}$

Задание 9. Составить уравнения касательной и нормали к линии, заданной уравнением, в указанной точке M. Вычислить кривизну кривой в этой точке.

1. $f(x) = x^2 + 4x - 26, \quad M(4, 6).$

2. $f(x) = -x^2 + 3x + 7, \quad M(5, -3).$

3. $f(x) = x^3 + 4x + 6, \quad M(-1, 1).$

4. $f(x) = 2x^3 + 3x - 9, \quad M(1, -4).$

5. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5, \quad M(3, 4).$

6. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2, \quad M(2, 2).$

7. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1, \quad M(0, 1).$

8. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6, \quad M(1, 3).$

9. $f(x) = x^2 + 2x - 5, \quad M(1, -2).$

10. $f(x) = x^2 - 3x + 4, \quad M(2, 2).$

Задание 10. Предварительно преобразовав подынтегральное выражение, найти интегралы с помощью подведения под знак дифференциала.

1. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}}\,dx$ 5. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{4x^2-7}\,dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{1-4x}{\sqrt{7-4x^2}}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x+2}{1-5x^2}\,dx$ 6. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+8}}\,dx$ 9. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2-4}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{5x-2}{\sqrt{4x^2-1}}\,dx$ 7. $\displaystyle\int \frac{x-7}{3x^2+8}\,dx$ 10. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-3x^2}}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2-1}\,dx$

Задание 11. Используя подходящие подстановки, найти неопределённые интегралы.

1. $\int \frac{1+\ln x}{x}\,dx$ 5. $\int \frac{x^2+\ln x^2}{x}\,dx$ 8. $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

2. $\int \operatorname{tg} x \ln\cos x\,dx$ 6. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}\,dx$ 9. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x\cos^2 x}$

3. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}\,dx$ 7. $\int \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}\,dx$ 10. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x+1)}\,dx$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Задание 12. Найти интегралы, используя интегрирование по частям.

1. $\int x^2\cos x\,dx$ 5. $\int \ln(1+x^2)\,dx$ 8. $\int x\cos 3x\,dx$

2. $\int x\ln^2 4x\,dx$ 6. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 4x}$ 9. $\int e^{-2x}\sin 5x\,dx$

3. $\int (x^2+1)\cos 2x\,dx$ 7. $\int x^2\sin\frac{3}{2}x\,dx$ 10. $\int e^{-3x}\sin 4x\,dx$

4. $\int e^{2x}\sin x\,dx$

Задание 13. Найти интегралы от рациональных функций.

1. $\int \frac{(1-3x)\,dx}{x^3-3x^2+2x}$ 6. $\int \frac{(x^2-2x+3)\,dx}{x^3-4x^2+3x}$

2. $\int \frac{(2x+3)\,dx}{(x-1)^2(x+1)}$ 7. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x+1)^2(x-1)}$

3. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-6x+9)(x-1)}$ 8. $\int \frac{(3x-4)\,dx}{(3x-1)(x^2-2x+1)}$

4. $\int \frac{4x\,dx}{(x-2)(x+2)^2}$ 9. $\int \frac{x\,dx}{x^3-2x^2-4x+8}$

5. $\displaystyle\int \frac{(3x+2)\,dx}{(x-1)^2(x+2)}$ 10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x-3)}$

Задание 14. Вычислить определённые интегралы, используя формулу Ньютона-Лейбница.

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+3x^3+x+1\right)\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)\,dx$

3. $\displaystyle\int_0^2 \left(4x^3-\sqrt[3]{x^2}+1\right)\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^4 \left(x^3-3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\,dx$

5. $\displaystyle\int_{1/4}^1 \frac{x-1}{\sqrt[5]{x^4}}\,dx$

6. $\displaystyle\int_1^4 \left(3x^2+\sqrt{x}-5\right)\,dx$

7. $\displaystyle\int_{1/4}^1 \left(x^4+\sqrt[5]{x}+3\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^9 \left(9\sqrt{x}-x\right)\,dx$

9. $\displaystyle\int_1^4 \left(1+5x+\frac{4\sqrt{x}}{3}\right)\,dx$

10. $\displaystyle\int_1^3 \frac{5x^8+1}{x^4}\,dx$

Задание 15. Вычислить определённые интегралы с помощью подходящих подстановок.

1. $\displaystyle\int_0^3 \frac{4dx}{\sqrt{3x+25}}$

2. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^4}}$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^4+1}\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$

9. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

3. $\int\limits_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx$ 7. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ 10. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$

4. $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[3]{2+\ln x}}{x}\,dx$

Задание 16. Вычислить определённые интегралы, используя интегрирование по частям.

1. $\int\limits_0^1 x\,e^{-x}\,dx$ 5. $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \arccos 2x\,dx$ 8. $\int\limits_{-1}^1 (1-6x)\,e^x\,dx$

2. $\int\limits_0^{\pi/2} x\ \cos x\,dx$ 6. $\int\limits_0^1 x^3\ \operatorname{arctg} x\,dx$ 9. $\int\limits_{-2}^0 (x^2+2)\,e^{x/2}\,dx$

3. $\int\limits_1^e \ln x\,dx$ 7. $\int\limits_0^1 x\ \operatorname{arctg} x\,dx$ 10. $\int\limits_1^e \sqrt{x}\ \ln x\,dx$

4. $\int\limits_1^{e-1} \ln(x+1)\,dx$

Задание 17. Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y=x^2+1,\ x+y=3.$ 6. $y=x^2-2x+5,\ x^2=9-y.$

2. $y^2=2x+1,\ x-y-1=0.$ 7. $x=(y-2)^3,\ x=4y-8.$

3. $4y=8x-x^2,\ 4y=x+6.$ 8. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$

4. $y=4x-x^2,\ y=0.$ 9. $y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=1.$

5. $y=\ln x,\ y=\ln^2 x.$ 10. $y=x^2+6x+5,\ y=0.$

Задание 18. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций (ось вращения Ox).

1. $y=-x^2+5x-6,\ y=0.$

2. $y=3\sin x,\ y=\sin x,\ 0\le x\le\pi.$

3. $y=\sin^2 x,\ x=\pi/2,\ y=0.$

4. $y=xe^x,\ y=0,\ x=1.$

5. $x^2-y=0,\ y^2-x=0.$

6. $y=5\cos x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}.$

7. $x=\sqrt[3]{y-2},\ x=1,\ y=1.$

8. $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\ x=0.$

9. $y=2x-x^2,\ y=-x+2.$

10. $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1.$

Задание 19. Исследовать на сходимость несобственные интегралы.

1. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+9}$

2. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{3}e^{3x}\,dx$

3. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$

4. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^8}$

5. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{1}(x^2+1)\,dx$

6. $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

7. $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1+\ln x}{x}\,dx$

8. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^3}$

9. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x}\,dx$

10. $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty}\sin x\,dx$

Задание 20. Вычислить несобственные интегралы.

1. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

2. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

3. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x-1}$

4. $\int\limits_{-1}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{(3x-x^2-2)}}$

5. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^3}$

6. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(x^4-81)^5}}$

7. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2x\,dx}{x^2-4}$

8. $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt{(1-\sin 3x)^5}}$

9. $\int\limits_{0{,}5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$

10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{(x-1)^2}$

Задание 21. Показать, что функция $z = f(x,y)$ удовлеворяет уравнению: $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$.

1. $z = e^{-\cos(x+2y)}, \quad F = 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
2. $z = \ln(x^2+y^2+2y+1), \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
3. $z = \sin^2(y-x), \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$
4. $z = \frac{y}{x}, \quad F = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
5. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
6. $z = x^y, \quad F = y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}.$
7. $z = e^x\cos y, \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$
8. $z = \frac{xy}{x-y}, \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2}{x-y}.$

9. $z = \dfrac{y}{y^2 - x^2}, \quad F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

10. $z = \ln(e^x - e^y), \quad F = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2.$

Задание 22. Найти полный дифференциал функции $z = f(x, y)$.

1. $z = y\, x^y$.
2. $z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2$.
3. $z = \ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$.
4. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$.
5. $z = x^2 y^4 - \dfrac{x^3}{y^3} + \dfrac{x^4}{y^2}$
6. $z = \operatorname{arctg}(xy)$.
7. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
8. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.
9. $z = x\, y^x$.
10. $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$.

Задание 23. Найти градиент функции $z = f(x, y)$ в заданной точке.

1. а) $z = x^2 + 2y^2 + 5xy - 5x + y - 1,\ P(2, 2)$;
   б) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x},\ M(1, 1)$.
2. а) $z = 3x^3 - 2y^2 - 5xy - 5x + y - 1,\ P(3, -2)$;
   б) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ M(1, 1)$.
3. а) $z = 4x^2 + 5y^2 - 6xy + x + y + 2,\ P(1, -2)$;
   б) $z = \sqrt[3]{xy},\ M(4, 2)$.
4. а) $z = 6x^3 + y^3 - 5xy + 5x + 2y + 2,\ P(1, 2)$;
   б) $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2},\ M(-1, 2)$.
5. а) $z = x^2 - 4y^2 + 2xy + 2x + 2y,\ P(3, 3)$;
   б) $z = (x^2 - 2xy + 3y - 1)^3,\ M(1, 2)$.
6. а) $z = 2x^2 + 2y^2 + 5xy + 5x + 5y - 5,\ P(1, -2)$;
   б) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x},\ M(0,5; 0,5)$.
7. а) $z = x^2 + y^2 - 2xy + x + 2y - 1,\ P(-1, 1)$;
   б) $z = \dfrac{5}{x^2 + y^2},\ M(-1, 2)$.
8. а) $z = 2x^3 + 2y^3 + x^2 y,\ P(2, -1)$;
   б) $z = (5x^2 y - 3xy^3 + y^4)^2,\ M(3, 1)$.

9. а) $z = 2x^2 - y^2 + 4xy - x - y - 1,\ P(2, -3);$
б) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2},\ M(2, 1).$
10. а) $z = x^2 - y^2 - xy - x + y - 2,\ P(3, -2);$
б) $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2},\ M(3, 2).$

Задание 24. Найти производную функции в заданной точке по направлению вектора.

1. $z = -5x^2 + 12y^2 - xy + x + 2y + 2,\ P(4, -5),\ \vec{a} = (0, 1).$
2. $z = 4x^2 + 5y^2 - 6xy + x + y + 2,\ P(2, 0),\ \vec{a} = (3, 4).$
3. $z = 6x^3 + y^3 - 5xy + 5x + 2y + 2,\ P(1, 2),\ \vec{a} = (-1, 0).$
4. $z = x^2 + 5y^2 + 2xy + 4x + 2y + 1,\ P(2, 5),\ \vec{a} = (0, -4).$
5. $z = x^2 + 3y^3 + 6xy + 5x + 4y + 12,\ P(1, 2),\ \vec{a} = (4, -3).$
6. $z = x^2 + 4y^3 + 6xy + 2x + 2y + 4,\ P(2, -1),\ \vec{a} = (2, 0).$
7. $z = -2x^2 + 5y^2 + xy + 12,\ P(2, 3),\ \vec{a} = (1, 0).$
8. $z = 3x^3 + 3y^3 + 5x^2y,\ P(1, 2),\ \vec{a} = (2, 0).$
9. $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 2x + 2y + 2,\ P(1, 1),\ \vec{a} = (0, 4).$
10. $z = x^2 + y^2 + 6xy + 5x + 2y + 22,\ P(1, 2),\ \vec{a} = (3, 4).$

Задание 25. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке.

1. а) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{8} - \dfrac{z^2}{2} = 0,\ P(0, 2, 1);$
б) $z = 2x^2 - 4y^2,\ M(2, 1, 4).$
2. а) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{8} - \dfrac{z^2}{2} = 0,\ P(0, 2, 1);$
б) $z = x^2 - 3xy + y^2,\ M(1, 1, -1).$
3. а) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{8} + \dfrac{z^2}{2} = 1,\ P(0, -2, 1);$
б) $z = \dfrac{x^2 - 6xy + y^2}{4},\ M(2, 2, -4).$
4. а) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{8} - \dfrac{z^2}{8} = 0,\ P(0, -2, 2);$
б) $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ M(3, 4, 5).$
5. а) $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{8} + \dfrac{z^2}{8} = 1,\ P(0, 2, 2);$
б) $z = \sqrt{xy},\ M(1, 4, 2).$
6. а) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{8} - \dfrac{z^2}{2} = -1,\ P(-3, -4, 3);$
б) $z = xy,\ M(1, 1, 1).$

7. а) $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{8} - z = 0,\ P(0,4,2)$;
   б) $z = x^2 + 2y^2,\ M(1,1,3)$.
8. а) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{8} - z = 0,\ P(-2,0,2)$;
   б) $z = -\sqrt{xy},\ M(2,2,-2)$.
9. а) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0,\ P(1,2,-1)$;
   б) $z = \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{8},\ M(-3,-2,1)$.
10. а) $x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 0,\ P(0,-2,2)$;
   б) $z = \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{4},\ M(0,2,-1)$.

Задание 26. Исследовать функцию $z = f(x,y)$ на экстремум.
1. $z = x^2 + 6xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.
2. $z = 2xy - 4x - 2y$.
3. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$.
4. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.
5. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$.
6. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
7. $z = 2xy - 4x - 2y$.
8. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.
9. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
10. $z = x^2 - 6xy + y^2 - 39x + 18y + 20$.

Задание 27. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - y^2 + 2xy - 2x + 2y + 3$ в заданной замкнутой области $\overline{D}$.

1. $\overline{D}$ – квадрат: $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

2. $\overline{D}$ – область, ограниченная параболой $y = 9 - x^2$ и осью Ox $(y \ge 0)$.

3. $\overline{D}$ – прямоугольник: $-1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$.

4. $\overline{D}$ – треугольник, ограниченный прямыми $x - y = -3$, $y = 0$, $x = 2$.

5. $\overline{D}$ – квадрат: $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$.

6. $\overline{D}$ – треугольник, ограниченный прямыми $x + y = 3$, $y = 0$, $x = -2$.

7. $\overline{D}$ – область, ограниченная параболой $y = x^2$ и прямой $y = 4$.

8. $\overline{D}$ – прямоугольник: $-2 \le x \le 1$, $0 \le y \le 4$.

9. $\overline{D}$ – треугольник, ограниченный прямыми $x + y = 2$, $y = -2$, $x = -2$.

10. $\overline{D}$ – треугольник, ограниченный прямыми $x + y = -2$, $y = 2$, $x = 1$.

Задание 28. Найти значения величин используемых ресурсов $(x; y)$, при которых фирма-производитель получит максимальную прибыль, если заданы производственная функция $K(x; y)$ и цены p_1 и p_2 на единицу первого и второго ресурсов.

1. $K(x; y) = 6\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$, $\quad p_1 = 1$, $p_2 = 2$.
2. $K(x; y) = 30\sqrt[3]{x}\sqrt{y}$, $\quad p_1 = 10$, $p_2 = 5$.
3. $K(x; y) = 12\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$, $\quad p_1 = 2$, $p_2 = 2/3$.
4. $K(x; y) = 12\sqrt[3]{x}\sqrt{y}$, $\quad p_1 = 4$, $p_2 = 2$.
5. $K(x; y) = 12\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$, $\quad p_1 = 4$, $p_2 = 4/3$.
6. $K(x; y) = 6\sqrt[3]{x}\sqrt{y}$, $\quad p_1 = 1$, $p_2 = 3$.
7. $K(x; y) = 24\sqrt[3]{x}\sqrt{y}$, $\quad p_1 = 2$, $p_2 = 6$.
8. $K(x; y) = 6\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$, $\quad p_1 = 2$, $p_2 = 1/3$.
9. $K(x; y) = 18\sqrt[3]{x}\sqrt{y}$, $\quad p_1 = 3$, $p_2 = 9$.
10. $K(x; y) = 15\sqrt[4]{x}\sqrt[3]{y^2}$, $\quad p_1 = 3$, $p_2 = 5/3$.

Задание 29. Используя классическое определение вероятности, решить задачи.

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна шести.

2. В ящике 50 деталей, из них 8 окрашены. Наугад вынимается деталь. Найти вероятность того, что эта деталь окажется окрашенной.

3. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число делится на 3?

4. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу выбранного жетона, содержит цифру 5.

5. В группе 20 юношей и 5 девушек. Разыгрывается билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит девушка?

6. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна семи.

7. В ящике 40 одинаковых деталей, из них 6 окрашены. Наугад вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

8. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что наугад выбранное целое число делится на 5?

9. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого, наудачу выбранного жетона, содержит цифру 6.

10. В группе 18 юношей и 6 девушек. Разыгрывается билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит юноша?

Задание 30. Используя классическое определение вероятности, решить задачи.

1. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. Какова вероятность того, что среди отобранных наугад 4 человек все четверо мужчины?

2. Студент знает 10 вопросов из 16. Найти вероятность того, что он знает два вопроса из четырех ему предложенных.

3. В ящике 15 деталей, среди которых 10 окрашены. Сборщик наугад извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что две извлеченные детали окрашены.

4. У сборщика 16 деталей, изготовленных первым заводом, и 4 детали второго завода. Наудачу взяли 2 детали. Найти вероятность того, что одна из деталей окажется изготовленной первым заводом.

5. В лотерее 1000 билетов. Из них 500 выигрышных и 500 невыигрышных. Куплено 3 билета. Какова вероятность того, что один билет выигрышный?

6. В цехе работают 4 мужчины и 6 женщин. Какова вероятность того, что среди отобранных наугад четырех человек все четверо женщины?

7. Студент знает 12 вопросов из 18. Найти вероятность того, что он знает два вопроса из четырех ему предложенных.

8. В ящике 12 деталей, из которых 8 окрашены. Сборщик наугад извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что две извлеченные детали окрашены.

9. У сборщика 20 деталей, изготовленных первым заводом, и 8 деталей – вторым заводом. Наудачу взяли 4 детали. Найти вероятность того, что одна из деталей окажется изготовленной вторым заводом.

10. В лотерее 200 билетов. Из них 100 выигрышных и 100 невыигрышных. Куплено 3 билета. Какова вероятность того, что два билета выигрышные.

Задание 31. Решить задачи, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

1. В типографии имеются 4 плоскопечатные машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

2. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,6; а вторым – 0,5. Найти вероятность того, что только один из стрелков попал в мишень.

3. Для разрушения моста достаточно попадания одной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него бросить три бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0,3; 0,4 и 0,5.

4. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,09; 0,08 и 0,07. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

5. Три станка работают независимо. Вероятности того, что в течение смены первый, второй и третий станки выйдут из строя, равны соответственно 0,05; 0,1; 0,15. Найти вероятность того, что за смену выйдет из строя только один станок.

6. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что за время t безотказно будут работать только два элемента.

7. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8; а вторым – 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

8. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого и 0,9 для второго сигнализатора. Найти вероятность того, что при аварии сработает хотя бы один сигнализатор.

9. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05; 0,06 и 0,04. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

10. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответ-

ственно равны 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

Задание 32. Используя форрмулы полной вероятности и Байеса, решить задачи.

1. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 3 : 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,3. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

2. В больницу поступают в среднем 60% больных с заболеванием А, 30% – с заболеванием В, 10% – с заболеванием С. Вероятность полного излечения болезни А равна 0,8; для болезней В и С эти вероятности соответственно равны 0,9 и 0,7. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что больной страдал болезнью А.

3. Изделие проверяется на стандартность одним из двух товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 55%, а ко второму – 45%. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9; а вторым – 0,98. Изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что изделие проверил второй товаровед.

4. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил цель из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

5. Имеются три одинаковые урны. В первой находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 7 белых и 3 черных шара, в третьей – только черные шары. Наугад выбирается урна и из нее вынимается шар. Вынутый шар оказался черным. Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны?

6. В двух ящиках содержится по 20 деталей, причем стандартных деталей в первом ящике 13, а во втором 18. Из второго ящика извлечена одна деталь и переложена в первый ящик. После этого из первого ящика извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Найти вероятность того, что из второго ящика в первый была переложена стандартная деталь.

7. В больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием А, 30% – с заболеванием В, 20% – с заболеванием С. Вероятность полного излечения болезни А равна 0,9; для болезней В и С эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,7. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что больной страдал болезнью В.

8. Изделие проверяется на стандартность одним из товароведов. Вероятность того, что изделие попадает к первому товароведу, равна 60%, а ко второму – 40%. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,8; а вторым – 0,92. Изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что изделие проверял второй товаровед.

9. В ящике 50 деталей, из них 40 высшего сорта. Наудачу извлекается одна, а затем вторая деталь, оказавшаяся высшего сорта. Определить вероятность того, что и первая деталь была высшего сорта.

10. Имеются три урны. В первой находятся 3 белых и 7 черных шаров, во второй – 4 белых и 6 черных, и в третьей – только белые шары. Наугад выбирается урна и из нее вынимается шар. Выбранный шар оказался белым. Какова вероятность того, что шар из первой урны?

Задание 33. Используя формулу Бернулли, решить задачи.

1. Монета брошена 6 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет менее двух раз.

2. В цехе 8 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент включены три мотора.

3. При высаживании рассады помидоров только 80% растений приживаются. Найти вероятность того, что из 10 посаженных кустов помидоров приживутся не менее 8.

4. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей не более двух мальчиков (вероятность рождения мальчика принять равной 0,51).

5. Монету бросают 7 раз. Найти вероятность того, что герб выпадает менее четырех раз.

6. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет менее трех раз.

7. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях событие появится более трех раз, зная, что в каждом испытании вероят-

ность появления события равна 0,7.

8. Прибор состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,3. Найти вероятность того, что откажут не более двух элементов.

9. Прибор состоит из 6 независимо работающих элементов. Вероятность того, что элемент в момент включения откажет, равна 0,2. Найти вероятность того, что в момент включения откажут менее двух элементов.

10. Вероятность того, что расход электроэнергии на протяжении одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 5 суток расход электроэнергии в течение 3 суток не превысит нормы.

Задание 34. Используя локальную и интегральную формулы Лапласа, решить задачи.

1. Вероятность появления события в 100 независимых испытаниях постоянна и равна 0,8. Найти: а) вероятность того, что событие появится не менее 50 раз; б) наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях.

2. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти: а) вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 60 мальчиков; б) наивероятнейшее число мальчиков среди новорожденных.

3. Какова вероятность того, что при 80 бросаниях игральной кости, пятерка выпадает: а) ровно 20 раз; б) от 20 до 40 раз?

4. Упаковщик укладывает 900 деталей, проверенных ОТК или изготовленных рабочими, имеющими личное клеймо. Вероятность того, что деталь помечена личным клеймом, равна 0,1. Найти: а) вероятность того, что среди них окажется 100 деталей с личным клеймом; б) наивероятнейшее число деталей с личным клеймом.

5. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: а) 75 раз; б) от 75 до 85 раз.

6. 200 станков работают независимо друг от друга, причем вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,6. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) 130 станков; б) от 110 до 130 станков.

7. Монета брошена 500 раз. Какова вероятность того, что герб появится: а) более 400 раз; б) от 300 до 400 раз?

8. Какова вероятность того, что при 100 бросаниях игральной кости, шестерка выпадает ровно 20 раз? Найти наиболее вероятное число выпадений шести очков.

9. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 120 выстрелах мишень будет поражена: а) 80 раз; б) от 80 до 100 раз.

10. Какова вероятность того, что при 100 бросаниях игральной кости единица выпадает: а) ровно 25 раз; б) от 50 до 60 раз?

Задание 35. Используя формулу Пуассона, решить задачи.

1. Завод отправил на базу 1000 изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,002. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) трех изделий; б) от 2 до 4 изделий.

2. Семена содержат 0,1% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 2000 семян обнаружить: а) 5 семян сорняков; б) более двух семян сорняков.

3. Книга издана тиражом в 50000 экземпляров. Вероятность того, что в книге имеется дефект брошюровки, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит неправильно сброшюрованных: а) 5 книг; б) хотя бы одну книгу.

4. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение часа равна 0,002. Найти вероятность того, что за час откажут: а) 4 элемента; б) от 3 до 5 элементов.

5. Вероятность появления бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 500 случайно отобранных деталей окажется бракованных: а) три детали; б) хотя бы одна деталь.

6. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,004. Найти вероятность того, что после облучения 500 бактерий останется: а) три бактерии; б) не менее 3 бактерий.

7. Завод отправил на базу 3000 изделий. Вероятность повреждения каждого изделия при транспортировке равна 0,001. Найти вероятность повреждения при транспортировке: а) двух изделий; б) от 5 до 7 изделий.

8. Семена содержат 0,2% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 1000 семян обнаружить: а) 6 семян сорняков; б) менее 2 семян сорняков.

9. В книге 500 страниц. Вероятность того, что страница книги содержит опечатку, равна 0,01. Найти вероятность того, что книга содержит с

отпечатками: а) 5 страниц; б) хотя бы одну страницу.

10. Вероятность появления бракованной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что из 500 случайно отобранных деталей окажется бракованными: а) две детали; б) от 2 до 4 деталей.

Задание 36. Решить задачи.

1. Найти закон распределения случайной величины – числа мальчиков в семье с 5 детьми, и числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2. По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания $p = 0,5$. Найти закон распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень, и числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

3. Монета подбрасывается 4 раза. Для случайной величины X – числа появлений герба составить закон распределения вероятностей, найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4. Участник игры в лапту 4 раза бьет по мячу. Вероятность попадания в мяч при каждом ударе одинакова и равна 0,8. Составить закон распределения вероятностей случайной величины X – числа попаданий в мяч, и найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

5. Устройство состоит из двух независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,2. Составить закон распределения случайной величины X – числа отказавших элементов в одном опыте, найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

6. Найти закон распределения случайной величины X – числа девочек в семье с четырьмя детьми, и числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

7. По мишени производится три независимых выстрела с вероятностью попадания $p = 0,5$. Найти закон распределения случайной величины X – числа попаданий в мишень, числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

8. Монета подбрасывается 4 раза. Для случайной величины X – числа появлений герба составить закон распределения вероятностей и найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

9. Участник игры в лапту три раза бьет по мячу. Вероятность попадания в мяч при каждом ударе одинакова и равна 0,8. Составить закон распределения вероятностей случайной величины X – числа попаданий в мяч, и найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

10. Устройство состоит из двух независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,2. Составить закон распределения случайной величины X – числа отказавших элементов в одном опыте, и найти числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Задание 37. Решить задачи.

1. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; 1/2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ (x^2 - x)/2, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(1; 1,5)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

3. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(0,5; 1)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

4. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; 1/4)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$, если случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \leq 1/3, \\ 1, & x > 1/3. \end{cases}$$

5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ x/2 - 1, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(2;3)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

6. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/9, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(1;2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

7. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(1;2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$, если случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2/4, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 6, \\ x/3 - 2, & 6 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(7;8)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ x^3 + 1, & -1 < x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1/2; 0)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

10. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^4, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины, вероятность попадания случайной величины в интервал $(0; 1/2)$ и построить графики $f(x)$, $F(x)$.

Задание 38. Решить задачи.

1. Заданы математическое ожидание $a = 10$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(8; 20)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 8$.

2. Заданы математическое ожидание $a = 7$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(3; 13)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 6$.

3. Заданы математическое ожидание $a = 8$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (4; 14) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 6$.

4. Заданы математическое ожидание $a = 9$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (5; 15) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 8$.

5. Заданы математическое ожидание $a = 10$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (6; 16) ; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 10$.

6. Заданы математическое ожидание $a = 11$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(7;\ 17)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 6$.

7. Заданы математическое ожидание $a = 12$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(8;\ 18)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 10$.

8. Заданы математическое ожидание $a = 13$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(9;\ 19)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 4$.

9. Заданы математическое ожидание $a = 14$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(10;\ 20)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 10$.

10. Заданы математическое ожидание $a = 15$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$ нормально распределенной случайной величины. Найти: а) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(11;\ 21)$; б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $|X - a|$ окажется меньше $\delta = 6$.

Задание 39. Решить задачи.

1. Имеются данные о количестве студентов в 24 группах:

28	27	26	27	28	25	22	24	20	21	20	19
25	23	24	25	22	21	23	19	21	20	22	18

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_{\text{в}}$, $D_{\text{в}}$, S^2.

2. Имеются данные о размерах обуви 50 человек:

35	35	35	36	36	36	36	36	37	37
37	37	37	37	38	38	38	38	38	38
38	38	38	38	38	38	38	39	39	39

39	39	39	39	39	39	39	40	40	40
40	40	40	40	41	41	41	41	42	42

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_\text{в}$, $D_\text{в}$, S^2.

3. Имеются данные о размерах основных фондов (в млрд. руб.) 30 предприятий:

90	75	90	70	45	40	70	50	70	85
75	85	90	75	70	40	70	85	45	85
70	90	85	45	90	85	40	50	45	40

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_\text{в}$, $D_\text{в}$, S^2.

4. Дана исходная таблица распределения 30 абитуриентов по числу баллов, полученных ими на вступительных экзаменах:

12	15	20	17	16	18	18	19	19	14
16	13	12	13	13	15	16	14	14	16
17	12	15	16	15	12	13	13	15	17

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_\text{в}$, $D_\text{в}$, S^2.

5. Оплата труда 20 рабочих (в руб.) составляет:

1500	1000	600	1000	900
1000	900	1500	1100	600
600	900	600	1100	1100
1000	900	900	600	1500

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_\text{в}$, $D_\text{в}$, S^2.

6. Имеются данные о размере обуви у 20 студентов:

36	37	36,5	40	39	40	40	42	37	36
36	42	37	40	42	39	36	37	37	36,5

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_\text{в}$, $D_\text{в}$, S^2.

7. В результате взвешивания отобранных наугад 30 клубней картофеля получены следующие данные (в граммах):

90	100	150	150	190	200	120	190	120	190
90	150	100	120	90	190	100	120	120	100
190	100	200	200	150	150	120	150	120	150

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_{\text{в}}$, $D_{\text{в}}$, S^2.

8. Имеются данные о количестве больных, посетивших врача-терапевта за 20 дней:

15	14	18	15	18	12	18	14	18	14
10	15	12	15	18	15	14	14	12	15

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_{\text{в}}$, $D_{\text{в}}$, S^2.

9. Даны результаты измерений 30 объектов:

7	5	10	8	7	11	3	9	4	10
5	9	8	4	9	6	8	7	10	12
7	9	8	10	9	9	8	5	7	7

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_{\text{в}}$, $D_{\text{в}}$, S^2.

10. Нахождение жирности молока (в %) у 20 коров дало следующие результаты:

3,7	3,5	3,6	3,6	3,7	3,7	3,7	3,7	3,8	3,9
3,8	3,8	3,8	3,9	3,9	3,9	3,9	4,0	4,0	3,8

Составить вариационный ряд и построить полигон частот. Вычислить оценки генеральной средней и генеральной дисперсии:$\overline{x}_{\text{в}}$, $D_{\text{в}}$, S^2.

Задание 40. Решить задачи.

1. Даны среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2$, выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}} = 5,4$ и объем выборки $n = 16$ нормально распределенного признака. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с заданной надежностью $\gamma = 0,95$.

2. Даны среднее квадратическое отклонение $\sigma = 3$, выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}} = 20,12$ и объем выборки $n = 25$ нормально распределенного признака. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с заданной надежностью $\gamma = 0,99$.

3. Из большой партии изготовленных деталей по выборке объема $n = 64$ найдена средняя арифметическая длина детали, равная $\overline{x}_{\text{в}} = 50$ мм. Считая, что длина детали X – нормально распределенная случайная величина, найти доверительный интервал, который с надежностью $\gamma = 0,95$ покрывает неизвестное математическое ожидание длины детали, если генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = 0,5$ мм.

4. По выборке объема $n = 49$ найдена средняя арифметическая $\overline{x}_{\text{в}} = 51$. Считая, что X – нормально распределенная случайная величина, найти доверительный интервал, который с надежностью $\gamma = 0,99$ покрывает неизвестное математическое ожидание a, если генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = 0,5$.

5. По выборке объема $n = 36$ найдена средняя арифметическая $\overline{x}_{\text{в}} = 53$. Считая, что X – нормально распределенная случайная величина, найти доверительный интервал, который с надежностью $\gamma = 0,999$ покрывает неизвестное математическое ожидание a, если генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = 0,5$.

6. По выборке объема $n = 16$ найдена средняя арифметическая $\overline{x}_{\text{в}} = 10,2$. Считая, что X – нормально распределенная случайная величина, найти доверительный интервал, который с надежностью $\gamma = 0,99$ покрывает неизвестное математическое ожидание a, если генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = 4$.

7. По выборке объема $n = 25$ найдена средняя арифметическая $\overline{x}_{\text{в}} = 16,8$. Считая, что X – нормально распределенная случайная величина, найти доверительный интервал, который с надежностью $\gamma = 0,99$ покрывает неизвестное математическое ожидание a, если генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = 5$.

8. Одним и тем же прибором со средним квадратичным отклонением случайных ошибок измерения $\sigma = 40$ м произведено 5 равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истинного расстояния до цели с надежностью $\gamma = 0,95$; зная среднее арифметическое измерений $\overline{x}_{\text{в}} = 2000$ м.

9. Выборка из большой партии электроламп содержит 100 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 1000 ч. Найти с надежностью 0,95 доверительный интервал для средней продолжительности горения ламп всей партии, если известно, что среднее квадратичное отклонение продолжительности горения лампы $\sigma = 40$ ч.

10. Из большой партии электроламп сделана выборка 100 ламп для

испытания на продолжительность горения. Средняя продолжительность горения оказалась равной 3000 ч. Предполагая, что продолжительность горения имеет нормальное распределение со средним квадратичным отклонением $\sigma = 35$ ч, найти доверительный интервал для математического ожидания a с надежностью $\gamma = 0,95$.

Задание 41. Решить задачи.

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

эмп. частоты	16	13	40	74	106	85	30	14
теор. частоты	13	14	44	82	99	76	37	13

2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмп. частоты	5	10	20	8	7
теор. частоты	6	14	18	7	5

3. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05; установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

эмп. частоты	6	8	13	15	20	16	10	7	5
теор. частоты	5	9	14	16	18	16	9	6	7

4. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05; установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

эмп. частоты	14	16	32	70	20	36	10
теор. частоты	10	24	34	80	16	22	12

5. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05; установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами, которые вычислены, исходя из гипотезы о нор-

мальном распределении генеральной совокупности X:

эмп. частоты	5	7	15	14	21	16	9	7	6
теор. частоты	6	7	14	15	23	15	8	6	6

6. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,01; установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

эмп. частоты	8	16	40	72	36	18	10
теор. частоты	10	14	44	68	33	18	13

7. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05; установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими и теоретическими частотами, которые вычислены, исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

эмп. частоты	15	16	25	30	26	21	24	20	13
теор. частоты	9	16	25	32	33	29	22	13	11

8. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмп. частоты	6	12	16	40	13	8	5
теор. частоты	4	11	15	43	15	6	6

9. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05; проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмп. частоты	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
теор. частоты	4	7	12	29	48	35	34	18	7	6

10. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05; проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты:

эмп. частоты	5	13	12	44	8	12	6
теор. частоты	2	20	12	35	15	10	6

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

Приложение 1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3433	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3883	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4783	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2,9	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3,1	4990	4990	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3,2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3,3	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
3,4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998	4998
3,5	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3,6	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,7	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	49995	49995	49995

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \lambda = np$$

Приложение 3

λ / k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
7					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
8								0,000002	0,000004

λ / k	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008101	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124007	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,41303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24								0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26									0,000002
27									0,000001

Приложение 4

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α				
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91
17	33,4	31,5	27,6	8,67	7,56
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Майкопский государственный технологический университет»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №
по математике

Вариант ________

Шифр ____________

Группа ____________

Направление: ____

Ф.И.О. ____

Дата поступления работы ___________________________________

Оценка ______________________________________

Рецензент: ____

Дата проверки контрольной работы «__» ________ 2014 г.

Подпись ____________

Дёмина Татьяна Ивановна
Куижева Саида Казбековна
Шевякова Ольга Петровна

МАТЕМАТИКА
2 семестр

Учебно-методическое пособие
для студентов направлений:
081100.62 «Государственное и муниципальное управление»
080200.62 «Менеджмент»

Подписано в печать 05.05.14.
Формат бумаги 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Усл. п. л. 6,1. Тираж 100 экз. Заказ № 1665.37

Отпечатано в типографии ИП Пермяков С.А.
426034, г. Ижевск, ул. Коммунаров, 244