МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-АГРАРИЕВ

МАЙКОП - 2021

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б-38

Печатается по решению научно-технического совета ФГБОУ ВО «Майкопский государственный технологический университет»

Рецензенты:

Козлов В.А. – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики, физики и методики их преподавания ФГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет»;

Шевякова О.П. - канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «Майкопский государственный технологический университет»

Составитель:

Беданокова С.Ю. – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики, физики и системного анализа ФГБОУ ВО «Майкопский государственный технологический университет»

Б-38 МАТЕМАТИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ-АГРАРИЕВ: учебно-методическое пособие. - Майкоп: Изд-во «ИП Кучеренко В.О.», 2021 – 135 с.
ISBN 978-5-907004-74-0

Учебно-методическое пособие содержит теоретический и практический материал по следующим разделам высшей математики: элементы линейной и векторной алгебры, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, введение в математический анализ, основы интегрирования и ряды. По каждому разделы имеются задачи для самостоятельной работы студентов и итоговые контрольные работы.

Пособие предназначено для студентов-аграриев, изучающих дисциплину «Математика».

ISBN 978-5-907004-74-0
9 785907 004740

УДК 51(07)
ББК 22.1

Оглавление

Предисловие

Математика изучает мир с помощью абстрактных моделей, в которых реальные объекты и явления заменяются идеализированными. Исследуя математическую модель, можно раскрыть причины явления, научиться управлять явлениями природы и технологическими и социальными процессами.

В результате освоения дисциплины студент должен знать основные понятия и методы элементарной математики, геометрии, алгебры и начал математического анализа. Уметь производить действия с числами, использовать основные алгебраические тождества для преобразования алгебраических выражений, выполнять геометрические построения, доказывать математические утверждения. Владеть приемами вычислений на калькуляторе инженерного типа, навыками использования математических справочников.

Учебно-методическое пособие включает следующие разделы: линейная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, векторная алгебра, введение в математический анализ, основы интегрального исчисления, ряды.

В пособии приведены основные теоретические сведения, решения типовых примеров и задач, задачи и упражнения для самостоятельной работы, контрольные вопросы и контрольные работы по каждому разделу.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов Аграрного факультета ФГБОУ ВО «Майкопский государственный технологический университет».

1. Элементы линейной алгебры

1.1. Матрицы

Определение. Прямоугольная таблица чисел вида

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется *матрицей.*

Здесь a_{ij} – действительные числа $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, называемые *элементами матрицы*; индекс i – указывает номер строки; индекс j – указывает номер столбца, в которых расположен этот элемент.

Матрицы обозначают прописными буквами A,B,C и т.д. Матрицу записывают в сокращенном виде:

$$A=(a_{ij}),\ \text{где}\ \ i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}.$$

Виды матриц

1) Матрица, содержащая один столбец $(n=1)$, называется *матрицей-столбцом*. Матрица, содержащая одну строку $(m=1)$, называется *матрицей-строкой*:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad B=(a_{11}\ a_{12} \ldots\ a_{1n}).$$

2) Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей*. Обозначается буквой O:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Матрица, у которой число строк равно числу столбцов $m=n$ называется *квадратной матрицей*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Число n называется *порядком матрицы*.

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ – побочную диагональ.

4) *Диагональной матрицей* называется квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

5) Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной матрицей* и обозначается буквой E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

6) Квадратная матрица называется *треугольной матрицей*, если все её элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Причем матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *верхней треугольной*, а матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

называется *нижней треугольной*.

Определение. Две матрицы A и B называются *равными* $(A = B)$, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны:

$$a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Линейные операции над матрицами

Сумма матриц

Суммой матриц A и B одинакового размера называется матрица C того же размера, любой элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Если $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$, то $A + B = C$, где $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример.

Если $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, то

$C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число α называется матрица, любой элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы A на число α.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 8 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = 3, \qquad 3A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 & 15 \\ 24 & 12 & -6 & 21 \end{pmatrix}.$$

Свойства операций

Пусть A, B, C, O – матрицы, имеющие одинаковый размер, α и β – некоторые числа. Тогда:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

5. $(\alpha\beta)A = (\alpha A)\beta$;

6. $A + O = A$;

7. $0 \cdot A = O$.

Транспонирование матриц

Определение. Матрица, полученная из данной заменой любой её строки столбцом с тем же номером, называется матрицей *транспонированной* к данной и обозначается A^T.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Дважды транспонированная матрица равна исходной матрице:

$$(A^T)^T = A.$$

Произведение матриц

Определение. Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k} = (c_{ij})$, элемент которой c_{ij}, стоящий в i-ой строке и j -ом столбце равен сумме произведений соответствующих элементов i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

$$C_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}\, b_{sj}, \qquad \begin{matrix} i = \overline{1,m}, \\ j = \overline{1,k}. \end{matrix}$$

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{2} & -2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0-1+4 & 1-1-4 \\ 0+2+6 & 0+2-6 \\ 0+4+2 & 1+4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$,

$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+15 & 0-6 \\ 4-5 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 17 \end{pmatrix}$,

$AB \neq BA$.

Определение. Матрицы A и B называются *перестановочными*, если

$$AB = BA.$$

Свойства произведения матриц

Пусть A, B, C и E – матрицы соответствующих размеров (чтобы произведения матриц были определены), α – некоторое число. Тогда:

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
4. $AE = EA = A$.

1.2. Определители

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число, называемое *определителем (детерминантом)* n-го порядка этой матрицы. Обозначается: $detA,\ |A|,\ \Delta$.

Рассмотрим определители 2-го и 3-го порядков.

Пусть дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда ее определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

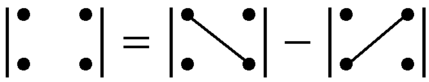
Для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$-a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Вычисление определителя второго порядка иллюстрируется схемой:

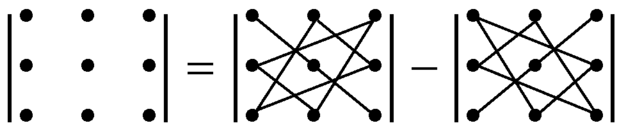


Пример.

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 + 15 = 27.$

При вычислении определителя 3-го порядка пользуются правилом треугольников, которое символически можно записать так:



Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) \cdot (-4) -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot 0 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) =$$

$$= -15 + 0 + 48 - 6 + 0 - 18 = 9.$$

Определение. *Минором* элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается M_{ij}.

Пример.

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$, минор элемента a_{23} равен

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 3 - 36 - 0 + 6 = -33.$$

Определение. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Пример.

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 5 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, алгебраическим дополнением элемента a_{13} является число

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 9 = 19.$$

Теорема. Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки определителя на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$
$$1 \le i \le n.$$

Эта формула называется *разложением определителя по i-ой строке*.

Аналогичное утверждение имеет место и для разложения определителя по любому столбцу. Данная формула сводит вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителей $(n-1)$-го порядка.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 3 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 2 \cdot A_{24} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -303.$$

Свойства определителей

1. Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

2. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (столбца) может быть вынесен за знак определителя.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 16 & 3 & 7 \\ 20 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 8 & 3 & 7 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 100 & 31 & 45 \\ 100 & 31 & 45 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 8 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственно элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}^{(-2)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix}^{(-3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Замечание. Определитель, все элементы которого под (или над) главной диагональю равны нулю, равен произведению чисел на главной диагонали.

6. Если все элементы некоторой строки или столбца равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Если элементы двух строк или двух столбцов определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Если любой элемент n-ой строки определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-ой строке имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые. Элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 9 \\ 10 & 1 & 2 \\ 12 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 7 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.3. Обратная матрица

Пусть дана квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю: $\Delta = detA \neq 0$. В противном случае ($\Delta = 0$), матрица A называется *вырожденной*.

Определение. Матрицей, *союзной (присоединенной)* к матрице A называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} данной матрицы A (определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Определение. *Элементарными преобразованиями* матрицы называются:

а) перестановка местами двух строк матрицы;

б) умножение всех элементов строки матрицы на число, отличное от нуля;

в) прибавление ко всем элементам строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Определение. Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной* матрице A, если выполняется условие

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Теорема. Матрица, обратная к невырожденной матрице A, равна

$$A^{-1} = \frac{A^*}{det\,A} = \frac{1}{det\,A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Свойства обратной матрицы

1. $det\,(A^{-1}) = \frac{1}{det\,A}$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Методы вычисления обратной матрицы

а) Алгоритм вычисления A^{-1} с помощью присоединенной (союзной) матрицы:

1) вычислить определитель $det\ A$;
2) найти алгебраические дополнения A_{ij} ее элементов a_{ij} матрицы A;
3) составить матрицу A^*, присоединенную к матрице A;
4) каждый элемент матрицы A^* разделить на определитель $det\ A$ матрицы A.

Пример. Найти A^{-1} для $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

1) $det\ A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 2 + 3 - 2 - 6 - 6 = 3 \neq 0.$

2) $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6,$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 3) = -3,$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0,$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(6 - 2) = -4,$

$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5,$

$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 1) = -1,$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1,$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2,$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$

3) $A^* = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot A^* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

б) Алгоритм нахождения обратной матрицы методом элементарных преобразований:

1) найти $det\ A$;
2) составить расширенную матрицу $(A|E)$;
3) элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу к виду $(E|A^{-1})$.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

$det\ A = 3 \neq 0$.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1.4. Ранг матрицы

Определение. Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$. Выделим в ней k строк и k столбцов $\big(k \leq min(m,n)\big)$. Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются *минорами* k -го порядка этой матрицы.

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 10 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$.

Миноры 2-го порядка матрицы $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$, $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix}$, $M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$ и так далее.

Миноры 3-го порядка матрицы $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 10 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 8 \end{vmatrix}$.

Определение. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом матрицы*. Обозначается $r(A)$.

Определение. Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*.

У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Свойства ранга матрицы

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевую строку, то ранг матрицы не изменится.
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Вычисление ранга матрицы

Примеры.

$$1)\ A=\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\4&-2&5&1&7\\2&-1&1&8&2\end{pmatrix}\begin{matrix}-2\\ \ \\ \ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&-2&10&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\ \\ -2\\ \ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&3&-2&4\\0&0&-1&5&-1\end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{vmatrix}-1&3\\0&-1\end{vmatrix}=1-0=1$$

$r(A)=2.$

$$2)\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\2&-1&-3&4\\5&1&-1&7\\7&7&9&1\end{pmatrix}\begin{matrix}-2,-5,-7\\ \ \\ \ \\ \ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&-14&-26&12\\0&-14&-26&8\end{pmatrix}\begin{matrix}\ \\ -2\\ \ \\ \ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&0&0&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&5&-1\\0&-7&-13&6\\0&0&0&-4\end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{vmatrix}3&5&-1\\-7&-13&6\\0&0&4\end{vmatrix}=4\cdot(-1)^6\begin{vmatrix}3&5\\-7&-13\end{vmatrix}=$$

$$=4\cdot(-39+35)=-16,$$

$r(A)=3.$

$$3)\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\0&1&1&1&0\\1&3&4&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\0&1&1&1&0\\0&1&1&1&-2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&0&1\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$M_3=\begin{vmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&0&-2\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}=-2\cdot3=-6,$$

$r(A)=3.$

$$4)\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{matrix}-4,-7\\ \ \\ \ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\begin{matrix}\ \\ -2\\ \ \end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\end{pmatrix},$$

$$M_2=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-3-0=-3,$$

$$r(A)=2.$$

1.5. Системы линейных уравнений

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1,\\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\cdots+a_{mn}\,x_n=b_m,\end{cases}$$

где числа $a_{ij}(i=\overline{1,m};j=\overline{1,n})$ – называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными коэффициентами, $x_1,x_2,\dots,x_n$ – неизвестные.

Определение. *Решением системы* называется n значений неизвестных $x_1=c_1,x_2=c_2,\dots,x_n=c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Определение. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и, *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Определение. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и, *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Определение. Две системы называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Систему линейных уравнений можно записать в матричной форме $A\cdot X=B$, где

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных данной системы уравнений,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец из неизвестных x_j,

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – вектор-столбец из свободных коэффициентов b_i.

Определение. *Расширенной матрицей системы* называется матрица $\bar{A}$ системы, дополненная столбцом свободных коэффициентов

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Методы решения невырожденных систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1, \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \cdots + a_{nn}\,x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

В матричной форме система уравнений имеет вид:

$$A \cdot X = B, \tag{1.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Основная матрица A системы квадратная. Определитель этой матрицы

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ называется *определителем системы*. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной*.

Метод обратной матрицы

Умножив обе части уравнения (1.2) слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.3)$$

Отыскание решения системы по формуле (1.3) называют матричным способом решения системы.

Метод Крамера

Теорема. Пусть Δ – определитель матрицы системы, а Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных коэффициентов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений (1.1) имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},\ j = \overline{1, n}. \qquad (1.4)$$

Формулы вычисления неизвестных (1.4) носят название формул Крамера.

Пример. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$x_1 = \frac{3}{2}, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$.

Матричный метод.

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\Delta} A^* \cdot B,$$

$$\Delta = -2,$$

$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=9+2=11,$

$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(6-2)=-4,$

$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5,$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-(6+1)=-7,$

$A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3-1=2,$

$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(-1-2)=3,$

$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1,$

$A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0,$

$A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1,$

$X=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}11 & -7 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ -5 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}11-14+0\\ -4+4+0\\ -5+6+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/2\\ 0\\ -1/2\end{pmatrix},$

Ответ: $\begin{pmatrix}3/2\\ 0\\ -1/2\end{pmatrix}$.

1.6. Решение произвольных систем линейных уравнений

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными общего вида:

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1,\\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\cdots+a_{mn}\,x_n=b_m.\end{cases}\tag{1.5}$$

Теорема Кронекера-Капелли.

Для того, чтобы система (1.5) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы

$$r(A)=r(\bar{A}).$$

Наиболее универсальным методом решения системы линейных уравнений является метод Гаусса, который заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований:

1) перестановка уравнений местами;
2) удаление из системы уравнений, все коэффициенты и свободные коэффициенты которых равны нулю;
3) умножение обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое число;
4) прибавление к уравнению другого уравнения этой системы, умноженного на некоторое число.

Элементарные преобразования системы удобнее проводить с расширенной матрицей.

Алгоритм метода Гаусса

1. Выписать расширенную матрицу системы и привести ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.
2. Определить ранг матрицы и сравнить с рангом расширенной матрицы. Если $r(A) \neq r(\bar{A})$, то система несовместна и решение окончено. Если $r(A) = r(\bar{A}) = r$, то система совместна.
3. Сравнить ранг r с числом неизвестных n. Возможны два случая:

   а) если $r = n$, то система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные;

   б) если $r < n$, то система имеет бесконечное множество решений. Переходим к пункту 4.
4. Выбрать базисный минор: неизвестные, входящие в базисный минор называются базисными, остальные – свободными.
5. Выразить базисные неизвестные через свободные. Для этого восстановить по полученной матрице систему уравнений.
6. Придать свободным неизвестным произвольные значения

$x_{r+1} = c_1;\ x_{r+2} = c_2; \cdots;\ x_n = c_{n-r}$ и решить полученную систему относительно базисных неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_r$.

7. Записать общее решение системы в виде матрицы-столбца:

$$X(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ \cdots \\ x_r(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Пример 1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 5 & -6 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{-3,-2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 14 & -15 \\ 0 & 7 & -4 & 7 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 14 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 10 \end{array}\right),$$

$r(A) = r(\bar{A}) = 3 < 4$,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 3, \\ 7x_2 - 5x_3 + 14x_4 = -15, \\ x_3 - 7x_4 = 10, \end{cases}$$

x_1, x_2, x_3 – базисные неизвестные,

x_4 – свободная неизвестная,

пусть $x_4 = c$, тогда

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 + 3c, \\ 7x_2 - 5x_3 = -15 - 14c, \\ x_3 = 10 + 7c, \end{cases}$$

$$7x_2 = -15 - 14c + 5x_3 = -15 - 14c + 5(10 + 7c) =$$
$$= -15 - 14c + 50 + 35c = 35 + 21c \Leftrightarrow x_2 = 5 + 3c.$$

$$x_1 = 3 + 3c + 2(5 + 3c) - 10 - 7c = 3 + 2c.$$

$X(c) = \begin{pmatrix} 3 + 2c \\ 5 + 3c \\ 10 + 7c \\ c \end{pmatrix}$ – общее решение системы.

Пример 2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & 11 \\ 2 & -4 & -2 & 8 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & -10 & 2 & -8 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -10/7 \\ \\ \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} \end{array}\right)$$

$$r(A) = r(\bar{A}) = 3 = 3.$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ \quad -7x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad -\frac{6}{7}x_3 = -\frac{6}{7}, \end{cases} \Rightarrow$$

$x_1 = 8 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 8 + 2 - 3 = 7,$

$x_2 = \frac{(-5-2\cdot 1)}{-7} = \frac{-7}{-7} = 1,$

$x_3 = 1.$

Ответ: $(7; 1; 1)$.

Задания для самостоятельной работы

№ 1. Даны три матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -7 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти:

1) $A + B + C$; 2) $A - B - C$;

3) $3A - 2B + C$; 4) $2A + 4B - 3C$.

№ 2. Найти произведения AB и BA двух квадратных матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

№ 3. Найти произведения AB и BA двух квадратных матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

№ 4. Вычислить определители второго порядка.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}.$$

№ 5. Вычислить определители третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

№ 6. Вычислить определители четвертого порядка.

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

№ 7. Найти матрицы, обратные данным.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

№ 8. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

№ 9. Решить системы уравнений методом Крамера.

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

№ 10. Решить системы уравнений методом Гаусса.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$

2. Элементы векторной алгебры

2.1. Векторы

Определение. *Вектором* называется направленный прямолинейный отрезок.

Если начало вектора в точке A, а конец в точке B, то вектор обозначают $\overline{AB}$ или $\bar{a}$. Вектор $\overline{BA}$ называется противоположным вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$.

Определение. *Длиной* или *модулем вектора* называют расстояние между его началом и концом. Обозначается $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$.

Определение. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается $\bar{e}$.

Определение. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, называется *ортом вектора* $\bar{a}$.

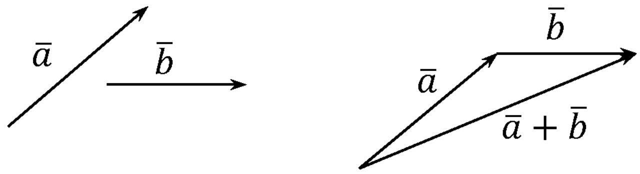
Определение. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Определение. Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

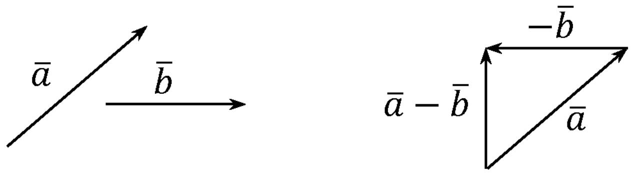
Определение. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарные, одинаково направленные и равны по длине.

Определение. *Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ* называется вектор $\lambda\bar{a}$, модуль которого равен $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

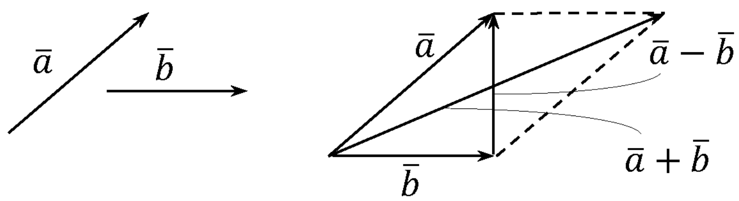
Определение. *Суммой двух векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, соединяющий начало вектора $\bar{a}$ с концом вектора $\bar{b}$ при условии, что начало вектора $\bar{b}$ совмещено с концом вектора $\bar{a}$:



Определение. *Разностью* $\bar{a}-\bar{b}$ *векторов* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c}$, что $\bar{c}+\bar{b}=\bar{a}$. Разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равна сумме вектора $\bar{a}$ и противоположного вектора $-\bar{b}$, т.е. $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+\left(-\bar{b}\right)$:



Если векторы неколлинеарные, то можно воспользоваться правилом параллелограмма: сумма векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, начала которых совмещены, изображается вектором с тем же началом, совпадающим с диагональю параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$; разность векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ изображается вектором, совпадающим со второй диагональю того же параллелограмма, конец которого находится в конце вектора $\bar{a}$.



Операции сложения и вычитания векторов, умножение вектора на число называются *линейными операциями над векторами.*

Свойства линейных операций

1. $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;
2. $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}=\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right)$;
3. $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{o}$;

4. $\bar{a} + \bar{o} = \bar{a}$;

5. $\lambda_1(\lambda_2\bar{a}) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2)\bar{a}$;

6. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{a} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{a}$;

7. $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$;

8. $0 \cdot \bar{a} = \bar{o}$;

9. $\lambda \cdot \bar{o} = \bar{o}$.

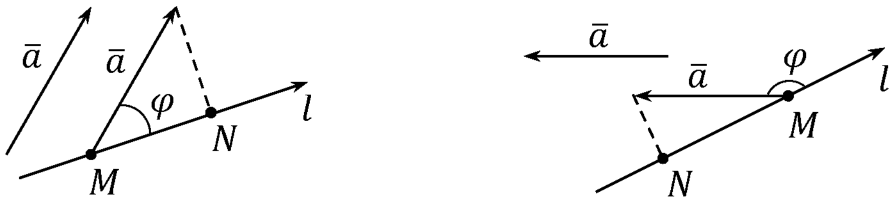
Определение. *Проекцией вектора* $\bar{a}$ на ось l называется число

$$\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|cos\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le \pi,$$

где φ – угол между положительным направлением оси l и направлением вектора $\bar{a}$.

Геометрически проекция вектора $\bar{a}$ представляет собой длину отрезка MN, взятого со знаком " + ", если $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ и со знаком " − ", если $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ отрезок превращается в точку и $\text{пр}_l\bar{a} = 0$.



Определение. *Координатами вектора* $\bar{a}$ называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Их обозначают буквами x, y, z и записывают $\bar{a} = (x, y, z)$.

Если точка $A(x_1, y_1, z_1)$ и точка $B(x_2, y_2, z_2)$, то вектор

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы своими координатами, т.е. $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

1) $\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$;

2) $\lambda\bar{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$;

3) $|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Пусть углы вектора $\bar{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. По определению проекции вектора на ось, имеем

$$\text{пр}_{Ox}\bar{a} = x = |\bar{a}|cos\alpha,$$

$$\text{пр}_{Oy}\bar{a} = y = |\bar{a}|cos\beta,$$

$$\text{пр}_{Oz}\bar{a} = z = |\bar{a}|cos\gamma,$$

или, что тоже самое,

$$cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}.$$

Числа $cos\alpha, cos\beta, cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$, при этом

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1,$$

т.е. сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице.

Определение. *Линейной комбинацией векторов* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называется вектор $\bar{a}$, определяемый по формуле

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n,$$

где λ_i – некоторые числа, $i = \overline{1,n}$.

Определение. Если для системы n векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ равенство

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots + \lambda_n\bar{a}_n = 0$$

верно только в случае, когда все $\lambda_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, то эта система векторов называется *линейно независимой*. Если же равенство выполняется когда хотя бы одно из λ_i отлично о нуля, то система векторов называется *линейно зависимой*.

Три упорядоченных линейно независимых единичных вектора $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в трехмерном пространстве называют *базисом*. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов всегда образуют базис. *Базис* называется *ортонормированным*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

Любой вектор $\bar{a}$ в пространстве можно разложить по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, т.е. представить $\bar{a}$ в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\bar{a} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3,$$

где x, y, z являются координатами вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Вектор $\bar{a}$ в координатном пространстве $Oxyz$ может быть представлен в виде:

$$\bar{a} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k},$$

где x, y, z проекции вектора $\bar{a}$ на соответствующие оси, а $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ – орты этих осей.

2.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

Скалярное произведение

Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Обозначается $(\bar{a}, \bar{b}), \bar{a} \cdot \bar{b}$:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| cos\varphi.$$

Свойства скалярного произведения

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.
2. $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$.
3. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.
4. $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$ – скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.
5. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ненулевые взаимно перпендикулярные, то их скалярное произведение равно нулю.

Выражение скалярного произведения через координаты

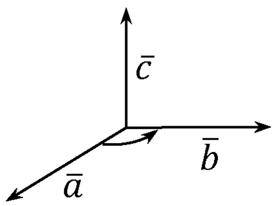
Пусть заданы два вектора $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат, т.е.

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

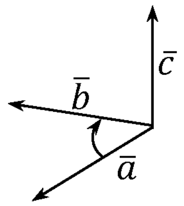
Векторное произведение

Определение. Три некомпланарных вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку векторов*, если с конца третьего вектора $\bar{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\bar{a}$

ко второму вектору $\bar{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую тройку векторов*, если по часовой стрелке.



правая тройка



левая тройка

Определение. *Векторным произведением* вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, который:

1) перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т.е.

$$|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\varphi, \text{ где } \varphi = \left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right);$$

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение обозначается $\bar{a} \times \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]$.

Свойства векторного произведения

1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.
2. $\lambda \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) = (\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda\bar{b})$.
3. $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$.
4. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т.е.

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \times \bar{b} = \bar{o}.$$

Выражение векторного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, тогда

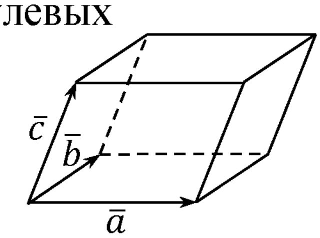
$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение

Определение. *Смешанным произведением* трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение $\bar{b} \times \bar{c}$, т.е. $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$.

Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е.
$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}).$$
2. Смешанное произведение не изменится, если поменять местами знаки векторного и скалярного произведения, т.е.
$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}.$$
В силу этого свойства смешанное произведение записывают в виде $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.
3. При перестановке любых двух векторов, смешанное произведение меняет знак:
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}, \qquad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}, \qquad \bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}.$$
4. Смешанное произведение ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.
5. Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, т.е.
$$V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$$



Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы векторы $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\bar{c} = (x_3, y_3, z_3)$, тогда
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы

№ 1. Найти проекцию вектора $\bar{a}$ на ось l, образующую с ним угол φ, в каждом из указанных случаев:

1) $|\bar{a}| = 4,\ \varphi = 0^\circ$; 2) $|\bar{a}| = 3,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$; 3) $|\bar{a}| = 5,\ \varphi = \pi$;

4) $|\bar{a}| = 6,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$; 5) $|\bar{a}| = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{\pi}{3}$; 6) $|\bar{a}| = 2,\ \varphi = \frac{3}{4}\pi$.

№ 2. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если известны углы α, β, γ, образуемые им с осями Ox, Oy, Oz прямоугольной декартовой системы координат, и его длина:

1) $|\bar{a}| = 4,\ \alpha = 60^\circ,\ \beta = 45^\circ,\ \gamma = 60^\circ$;

2) $|\bar{a}| = 8,\ \alpha = 135^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 60^\circ$;

3) $|\bar{a}| = 2,\ \alpha = 120^\circ,\ \beta = 45^\circ,\ \gamma = 120^\circ$;

4) $|\bar{a}| = 6,\ \alpha = 120^\circ,\ \beta = 60^\circ,\ \gamma = 45^\circ$.

№ 3. Даны векторы: $\bar{a} = (1, -2, 3),\ \bar{b} = (2, 1, 4),\ \bar{c} = (-3, 4, 5)$. Найти векторы: $3\bar{a}$; $2\bar{b}$; $-3\bar{c}$; $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$; $2\bar{a} - 3\bar{b} + 4\bar{c}$.

№ 4. Найти координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ и его длину в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(4, -5, 2),\ M_2(2, -3, 1)$; 2) $M_1(7, 3, -2),\ M_2(4, 3, 2)$;

3) $M_1(9, 4, -3),\ M_2(3, -4, -3)$; 4) $M_1(1, 5, -7),\ M_2(6, 5, 5)$;

5) $M_1(3, -2, 2),\ M_2(-1, 0, 2)$; 6) $M_1(3, 2, 0),\ M_2(5, 3, -1)$.

№ 5. Дан треугольник с вершинами $A(7, 5, -4)$, $B(4, 9, 1)$, $C(6, -3, -7)$. Вычислить длину медианы, проведенной из вершины A, и периметр треугольника.

№ 6. Точки $A(9, -11, 5)$, $B(7, 4, -2)$, $C(-7, 13, -3)$ являются последовательными вершинами ромба. Найти четвертую вершину D. Вычислить периметр ромба и длины его диагоналей.

№ 7. Найти синус угла между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

1) $\bar{a} = (2, -4, 4)$, $\bar{b} = (2, 1, -2)$;

2) $\bar{a} = (2, 1, -2)$, $\bar{b} = (6, -3, 2)$;

3) $\bar{a} = (2, 2, 1)$, $\bar{b} = (11, 10, 2)$;

4) $\bar{a} = (2, 1, 2)$, $\bar{b} = (-2, 2, 1)$.

№ 8. Даны два вектора: $\bar{a} = (10, 2, -11)$, $\bar{b} = (-2, 1, -2)$. Вычислить проекцию каждого из них на ось другого вектора.

№ 9. Вычислить скалярное произведение вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, образующих угол φ в каждом из следующих случаев:

1) $|\bar{a}| = 2, |\bar{b}| = 5, \varphi = 0$; 2) $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4, \varphi = \pi/3$;

3) $|\bar{a}| = 7, |\bar{b}| = 9, \varphi = \pi/2$; 4) $|\bar{a}| = 6, |\bar{b}| = \sqrt{2}, \varphi = 3\pi/4$.

№ 10. Найти углы между векторами, заданными координатами:

1) $\bar{a} = (5, 6)$, $\bar{b} = (6, -5)$;

2) $\bar{a} = (3, 4)$, $\bar{b} = (5, 12)$;

3) $\bar{a} = (4, -10, 1)$, $\bar{b} = (11, -8, -7)$;

4) $\bar{a} = (2, 1, -2)$, $\bar{b} = (2, 4, 4)$.

№ 11. Дан четырехугольник с вершинами в точках $A(1, -3, 5)$, $B(-2, 4, 1)$, $C(6, -1, -3)$, $D(5, 6, -8)$. Найти скалярные произведения:

1) $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$; 3) $\overline{CD} \cdot \overline{BA}$;

2) $\overline{BC} \cdot \overline{CD}$; 4) $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$; 5) $\overline{AC} \cdot \overline{AD}$.

№ 12. Найти внутренние углы треугольника с вершинами $A(1, 7, 2)$, $B(5, -3, 3)$, $C(12, -1, -5)$.

№ 13. Найти векторное произведение $[\bar{a}, \bar{b}]$ в каждом из следующих случаев:

1) $\bar{a} = 7\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 6\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - 2\bar{k}$;

2) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 11\bar{\jmath} - 10\bar{k},\ \bar{b} = 3\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - 2\bar{k}$;
3) $\bar{a} = (1, 2, -2),\ \bar{b} = (8, 6, 4)$;
4) $\bar{a} = (1, -5, 8),\ \bar{b} = (3, 6, -2)$.

№ 14. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (2, 1, 2),\ \bar{b} = (3, -4, 2)$.

№ 15. Вычислить площадь параллелограмма, три последовательные вершины которого находятся в точках $A(7, -5, 6), B(9, -4, 8), C(6, 0, 6)$.

№ 16. Вычислить смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:
1) $\bar{a} = (-4, -3, -9),\ \bar{b} = (1, 0, -1),\ \bar{c} = (-5, -4, 3)$;
2) $\bar{a} = (1, 2, 1),\ \bar{b} = (1, 2, -2),\ \bar{c} = (8, 6, 4)$;
3) $\bar{a} = (1, 2, 3),\ \bar{b} = (3, 1, 2),\ \bar{c} = (2, 3, 1)$;
4) $\bar{a} = (9, 7, 8),\ \bar{b} = (6, 4, 5),\ \bar{c} = (1, 2, 3)$.

№ 17. Выяснить, компланарны ли векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:
1) $\bar{a} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 3\bar{k},\ \bar{b} = 4\bar{\imath} + 5\bar{\jmath} + 6\bar{k},\ \bar{c} = 7\bar{\imath} + 8\bar{\jmath} + 9\bar{k}$;
2) $\bar{a} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + 5\bar{k},\ \bar{b} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 6\bar{k},\ \bar{c} = 8\bar{\imath} + 9\bar{\jmath} + 7\bar{k}$;
3) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 2\bar{k},\ \bar{b} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 2\bar{k},\ \bar{c} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$;
4) $\bar{a} = \bar{\imath} + 7\bar{\jmath} + \bar{k},\ \bar{b} = 8\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 8\bar{k},\ \bar{c} = \bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + \bar{k}$.

№ 18. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:
1) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 3\bar{k},\ \bar{b} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 2\bar{k},\ \bar{c} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}$;
2) $\bar{a} = 4\bar{\imath} - 5\bar{\jmath} + \bar{k},\ \bar{b} = -2\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + \bar{k},\ \bar{c} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 3\bar{k}$;
3) $\bar{a} = 2\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 3\bar{k},\ \bar{b} = 3\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 2\bar{k},\ \bar{c} = \bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}$;
4) $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q},\ \bar{b} = \bar{p} - 4\bar{q},\ \bar{c} = 3\bar{p} + 5\bar{q}$,
где $|\bar{p}| = 1/2$; $|\bar{q}| = 4$.

№ 19. Вычислить объем треугольной пирамиды $ABCD$:

1) $A(6,1,4)$, $B(2,-2,-5)$, $C(7,1,3)$, $D(1,-3,7)$;

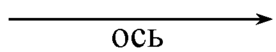
2) $A(1,2,6)$, $B(0,3,8)$, $C(-5,-1,4)$, $D(-3,2,-6)$.

№ 20. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(2,1,1)$, $B(6,-2,2)$, $C(4,3,2)$, $D(-6,8,7)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины D.

3. Аналитическая геометрия на плоскости

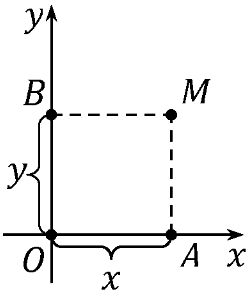
3.1. Система координат на плоскости

Определение. Прямая с выбранным на ней положительным направлением называется осью.



ось

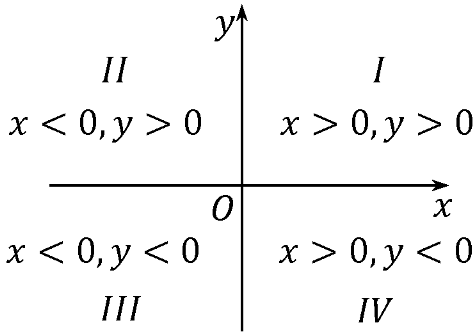
Определение. Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и одинаковую единицу масштаба, образуют прямоугольно-декартовую систему координат на плоскости.



Ось Ox называется *осью абсцисс*.
Ось Oy называется *осью ординат*.
Точка O – *началом координат*.
Плоскость, в которой расположены оси Ox и Oy, называется *координатной плоскостью* и обозначается Oxy.

Пусть M – произвольная точка плоскости. Опустим из нее перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy. *Прямоугольными координатами* x и y точки M называются величины OA и OB: $x = OA; y = OB$.

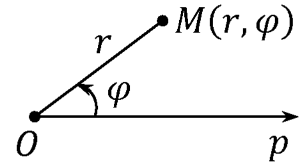
Координаты x и y точки M называются соответственно ее *абсциссой* и *ординатой*. Символ $M(x, y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y.



Оси координат разбивают плоскость на четыре части, их называют *четвертями*, *квадрантами* или *координатными углами* и нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV.

Полярная система координат

Полярная система координат задается точкой O, называемой *полюсом*, лучом Op, называемым *полярной осью,* и масштаба для измерения длин отрезков.



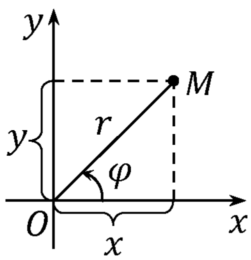
Пусть задана полярная система координат и пусть точка M – произвольная точка плоскости. Положение точки M определяется двумя числами: ее расстоянием r от полюса O и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (отсчет углов ведется в направлении, противоположном движению часовой стрелки).

Числа r и φ называются *полярными координатами точки* M, пишут $M(r,\varphi)$, при этом r называется *полярным радиусом,* φ *– полярным углом*.

Полярный угол φ изменяется в пределах $0 \le \varphi < 2\pi$; полярный радиус r изменяется $0 \le r < +\infty$.

Связь между прямоугольными и полярными координатами

Совместим полюс O с началом координат системы Oxy, а полярную ось – с положительной полуосью Ox. Пусть x и y – прямоугольные координаты точки M, а r и φ – ее полярные координаты.



Прямоугольные координаты точки M выражаются через полярные координаты точки следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \cdot cos\varphi, \\ y = r \cdot sin\varphi. \end{cases}$$

Полярные координаты точки M выражаются через декартовы координаты формулами:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

Пример. Дана точка $M(-1;-\sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки M.

$r=\sqrt{1+3}=2$. Так как точка M находится в третьем координатном углу, то:

$$tg\varphi=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{4}{3}\pi,\qquad M\left(2;\frac{4}{3}\pi\right).$$

Приложения метода координат на плоскости

1. Расстояние между двумя точками.

Пусть в декартовой системе координат даны точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, тогда расстояние d между точками M_1 и M_2 определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

2. Деление отрезка в данном отношении.

Если точка $M(x,y)$ делит отрезок с концами $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ в отношении $\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$, то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\;\; y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, при делении пополам, т.е. в отношении $\lambda=1$,

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\;\; y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$ определяется по формуле

$$S=\frac{1}{2}|\Delta|,\text{ где }\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}.$$

3.2. Линии первого порядка. Прямая

Пусть на плоскости задана система координат. Рассмотрим уравнение вида

$$F(x,y)=0.\qquad(3.1)$$

Определение. Уравнение (3.1) называется *уравнением линии* L в заданной системе координат, если этому уравнению удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Из определения следует, что линия L представляет собой множество всех тех точек плоскости $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению (3.1). Говорят, что уравнение (3.1) определяет (задает) линию L.

Линия L может определяться и уравнением вида

$$F(r, \varphi) = 0,$$

содержащим полярные координаты.

В аналитической геометрии на плоскости возникают две основные задачи. Первая: зная геометрические свойства кривой, найти ее уравнение; вторая: зная уравнение кривой, изучить ее форму и свойства.

Простейшей из линий является прямая. Разным способом задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Общее уравнение прямой

Уравнение первой степени относительно x и y, т.е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \ A^2 + B^2 \neq 0, \tag{3.2}$$

определяет на плоскости прямую.

Это уравнение называют *общим уравнением прямой.*

Частные случаи расположения прямой на плоскости:

а) $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая проходит через начало координат;

б) $A = 0, C \neq 0, B \neq 0$ – прямая параллельна оси Ox;

в) $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ – прямая параллельна оси Oy;

г) $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая совпадает с осью Oy;

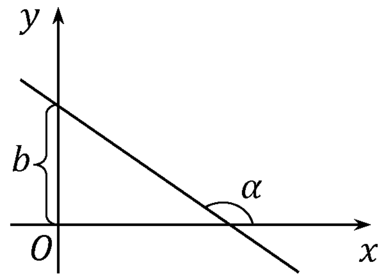
д) А$= C = 0, B \neq 0$ – прямая совпадает с осью Ox;

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если $B \neq 0$, то уравнение (3.2) можно записать в виде $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Полагая $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$ получим уравнение

$$y = kx + b. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом.* Величину $k = tg\alpha$, где α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox, называют *угловым коэффициентом*, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy.



Уравнение прямой «в отрезках»

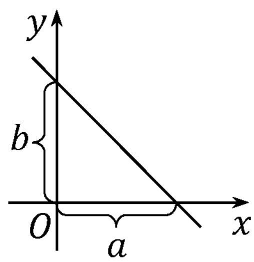
Общее уравнение (3.2) при условии, что ни один из коэффициентов A, B и C не равен нулю, преобразуем к виду

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

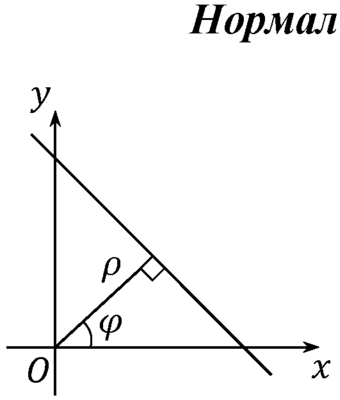
Вводя обозначения $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$, получаем

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) называют *уравнением прямой «в отрезках».* Числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на осях координат.



Нормальное уравнение прямой



Если обе части общего уравнения (3.2) умножить на число

$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое

называется *нормирующим множителем*, причем знак берется противоположным знаку свободного коэффициента C, то получится уравнение

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho = 0. \qquad (3.5)$$

Это уравнение называется нормальным уравнением прямой, ρ – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, φ – угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в данном направлении

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (3.6)$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ записывается в виде

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (3.7)$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой имеет вид $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то уравнение прямой имеет вид $y = y_1$.

Угол между прямыми

Если известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 двух прямых, то один из углов φ между этими прямыми определяется по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

второй угол равен $\pi - \varphi$.

Условия параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$.

Условия перпендикулярности двух прямых: $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.3. Линии второго порядка на плоскости

Рассмотрим линии, определяемые уравнениями второй степени относительно текущих координат

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (3.8)$$

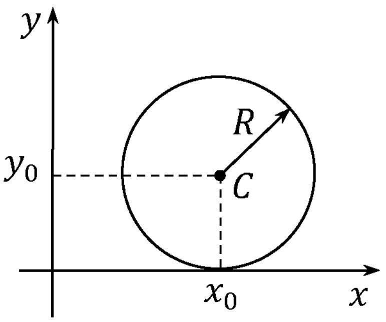
Коэффициенты уравнения – действительные числа, и по крайней мере одно из чисел A, B и C отлично от нуля. Такие линии называются *линиями (кривыми) второго порядка*.

Окружность

Определение. *Окружность* – множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Окружность радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \qquad (3.9)$$



Уравнение (3.9) называют *каноническим уравнением окружности*.

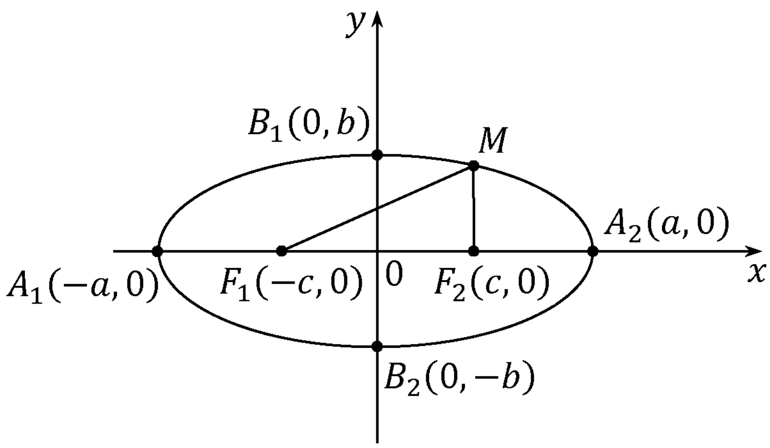
В общем уравнении кривой второго порядка (3.8) для уравнения окружности выполнены два условия:

а) коэффициенты при x^2 и y^2 равны между собой;

б) отсутствует слагаемое, содержащее произведение xy текущих координат.

Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.



Обозначим фокусы через F_1 и F_2, расстояние между ними через $2c$, а сумму расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов через $2a$, т.е.
$F_1F_2 = 2c$,
$F_1M + F_2M = 2a$.

Выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2, то получим *каноническое уравнение эллипса*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \;\; a^2 = b^2 + c^2. \qquad (3.10)$$

Здесь a называется *большой полуосью эллипса*;

b называется *малой полуосью эллипса*;

A_1, A_2, B_1, B_2 называются *вершинами эллипса*;

$O(0;0)$ называется *центром эллипса*.

Определение. Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется *эксцентриситетом эллипса* и обозначается ε (эпсилон)

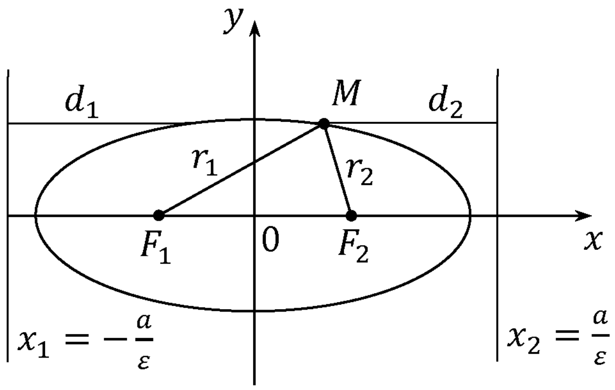
$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1. \qquad (3.11)$$

Определение. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2 . Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются *фокальными радиусами точки* M , и определяются формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x,$$
$$r_2 = a - \varepsilon x. \qquad (3.12)$$

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами эллипса*.

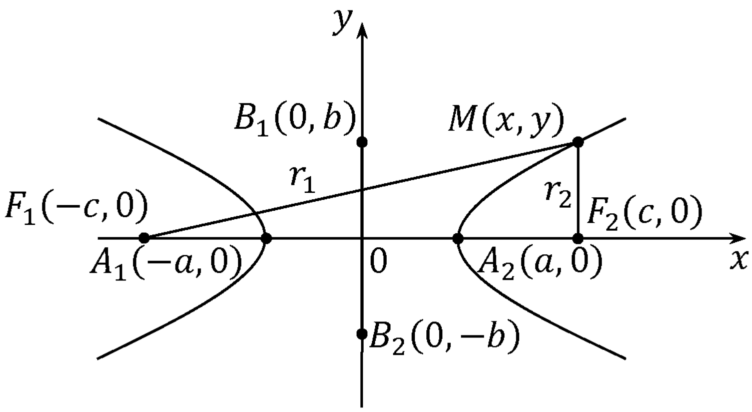
Теорема. Пусть M произвольная точка эллипса, r_1 и r_2 – ее фокальные радиусы, d_1 – расстояние от точки M до левой директрисы, d_2 – до правой. Тогда $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$, где ε – эксцентриситет эллипса.



Гипербола

Определение.

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.



Каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3.13)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Здесь число a – *действительная полуось гиперболы*,
b – *мнимая полуось гиперболы*.

Точки A_1, A_2 – *вершины гиперболы.*

Числа $|F_1M| = r_1$ и $|F_2M| = r_2$ называются *фокальными радиусами точки* M.

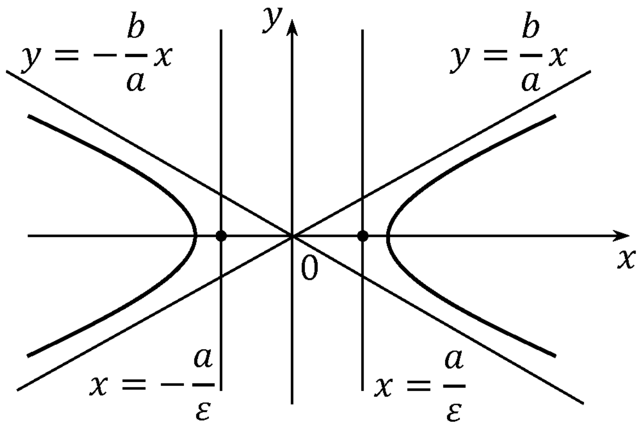
Фокальные радиусы определяются формулами:

$$r_1 = |a + \varepsilon x|,\ \ r_2 = |\varepsilon x - a|.$$

Отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ называется *эксцентриситетом гиперболы.*

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы.*

Прямые $y = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами гиперболы.*

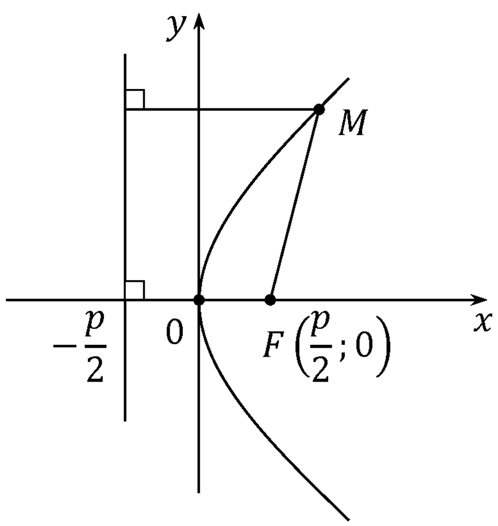


Парабола

Определение. *Параболой* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной прямой, называемой *директрисой* и данной точки F, называемой *фокусом.*

Если директрисой параболы является прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, то каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px,\ \ p > 0. \tag{3.14}$$



Начало координат является вершиной параболы, а ось абсцисс – ее осью симметрии.

$FM = r$ называется *фокальным радиусом.*

Задания для самостоятельной работы

№ 1. Найти прямоугольно-декартовые координаты точек, заданных полярными координатами: $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(6,-\frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3,-\frac{\pi}{6}\right)$, $E\left(4,-\frac{\pi}{2}\right)$, $F(5,\pi)$.

№ 2. Зная прямоугольно-декартовые координаты точек $A(-1,1)$, $B(0,2)$, $C(3,0)$, $D(8,-6)$, $E(1,1)$, $F(-2,-2)$, найти их полярные координаты.

№ 3. Зная две противолежащие вершины ромба $A(-3,-1)$, $C(1,7)$, найти две другие его вершины при условии, что длина стороны ромба равна 5.

№ 4. Даны три вершины $A(-3,-2)$, $B(-1,3)$, $C(5,4)$ параллелограмма $ABCD$. Найти четвертую вершину D и центр S.

№ 5. Даны вершины треугольника $A(6,-6)$, $B(2,-3)$, $C(8,5)$. Найти длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине B.

№ 6. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(-4,3)$, $B(5,6)$, $C(8,-3)$.

№ 7. Составить уравнение прямых, параллельных биссектрисе первого координатного угла и отсекающих от оси Oy отрезки, величины которых соответственно $b_1 = 2,\ b_2 = -5$.

№ 8. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $C(4,3)$.

№ 9. Записать уравнения прямых, отсекающих на оси Oy отрезок $b = -3$ и образующих с осью Ox соответственно углы: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 45°$, $\varphi_3 = 60°$, $\varphi_4 = 135°$.

№ 10. Записать уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с осью Ox соответственно углы: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 30°$, $\varphi_3 = 45°$, $\varphi_4 = 90°$, $\varphi_5 = 135°$.

№ 11. Записать уравнение окружности радиусом $R = 7$ с центром в точке $C(-3, 5)$.

№ 12. Записать уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок MN, где $M(2, -3)$, $N(-6, 3)$.

№ 13. Найти координаты центра и радиус окружности:

1) $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$; 3) $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$;

2) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 12y - 3 = 0$; 4) $3x^2 + 3y^2 - 16y = 0$.

№ 14. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку $M(1, 2)$.

№ 15. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$. Проверить, лежит ли точка $M(3, 2)$ на данном эллипсе. Найти точки, симметричные точке M относительно: каждой координатной оси; начала координат.

№ 16. Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$. Найти точки эллипса, для которых:

1) $x = 0$; 2) $x = 6$; 3) $x = 3\sqrt{2}$; 4) $y = 2$; 5) $y = 2\sqrt{3}$.

№ 17. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет каждого эллипса, заданного соответствующим уравнением:

1) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$; 2) $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1$; 3) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$; 4) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$.

Построить указанные линии.

№ 18. Записать уравнение геометрического места точек плоскости, для каждой из которых разность расстояний до двух точек $F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$ по абсолютной величине равна 8.

№ 19. Записать каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

1) действительная ось равна 14, мнимая ось равна 10;

2) расстояние между фокусами равно 20, действительная ось равна 12;

3) действительная ось равна 6, эксцентриситет равен $5/3$;

4) расстояние между фокусами равно 26, эксцентриситет равен 2,6.

№ 20. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и асимптоты каждой гиперболы, заданной уравнением:

1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 3) $-\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$.

Построить эти гиперболы.

№ 21. Записать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от указанных точки и прямой:

1) $F(1,0),\ x=-1$; 3) $F(-2,0),\ x=2$;

2) $F(0;1{,}5),\ y=-1{,}5$; 4) $F(0,-3),\ y=3$.

№ 22. Найти фокус и записать уравнение директрисы каждой параболы, заданной уравнением:

1) $y^2=8x$; 2) $y^2=-10x$; 3) $x^2=2y$;

4) $x^2=-4y$; 5) $3x^2-4y=0$; 6) $5x^2+8y=0$;

7) $7y^2 + 20x = 0$;   8) $9y^2 + 16x = 0$.

Построить данные параболы, их фокусы и директрисы относительно прямоугольной декартовой системы координат.

№ 23. Записать каноническое уравнение параболы, если известно, что:

1) фокус находится в точке $F(4, 0)$;

2) фокус находится в точке $F(0, 3)$;

3) директриса имеет уравнение $x - 3 = 0$;

4) директриса имеет уравнение $y - 2 = 0$.

№ 24. Дано уравнение параболы $5y^2 - 4x = 0$. Проверив, лежит ли точка $M(5, -2)$ на параболе, вычислить ее фокальный радиус.

№ 25. Найти точки пересечения параболы и прямой в каждом из следующих случаев:

1) $y^2 = 16x,\ 4x - y - 8 = 0$;   2) $y^2 = -9x,\ 3x + 4y - 9 = 0$.

№ 26. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $M(5, 4)$, $N\left(7, -2\sqrt{2}\right)$. Найти точки пересечения параболы с координатными осями.

4. Аналитическая геометрия в пространстве

Поверхность в пространстве можно рассматривать как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-либо условию.

Прямоугольная система координат $Oxyz$ в пространстве позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и числами x, y, z – их координатами. Свойство, общее всем точкам поверхности, можно записать в виде уравнения, связывающего координаты всех точек поверхности.

Определение. *Уравнением* данной *поверхности* в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (4.1)$$

которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности.

Переменные x, y, z в уравнении (4.1) называются текущими координатами точек поверхности.

4.1. Плоскость

Простейшей поверхностью является плоскость. Плоскость в пространстве $Oxyz$ можно задать разными способами.

Общее уравнение плоскости

Всякое уравнение первой степени относительно x, y, z

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4.2)$$

где A, B, C – заданные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, задает плоскость.

Уравнение (4.2) называется *общим уравнением плоскости.*

Частные случаи общего уравнения плоскости:

Значение коэффициентов	*Уравнение плоскости*	*Расположение плоскости в пространстве*
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	проходит через начало координат
$A = 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$	$By + Cz + D = 0$	параллельно оси Ox (перпендикулярно плоскости Oyz)
$B = 0, A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$	$Ax + Cz + D = 0$	параллельно оси Oy (перпендикулярно плоскости Oxz)
$C = 0, A \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$	$Ax + By + D = 0$	параллельно оси Oz (перпендикулярно плоскости Oxy)
$A = D = 0, B \neq 0, C \neq 0$	$By + Cz = 0$	проходит через ось Ox
$B = D = 0, A \neq 0, C \neq 0$	$Ax + Cz = 0$	проходит через ось Oy
$C = D = 0, A \neq 0, B \neq 0$	$Ax + By = 0$	проходит через ось Oz
$A = B = 0, C \neq 0, D \neq 0$	$Cz + D = 0$	перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости Oxy)
$A = C = 0, B \neq 0, D \neq 0$	$By +$	перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости Oxz)
$B = C = 0, A \neq 0, D \neq 0$	$Ax + D = 0$	перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости Oyz)

Значение коэффициентов	*Уравнение плоскости*	*Расположение плоскости в пространстве*
$A = B = D = 0, C \neq 0$	$Cz = 0$	плоскость Oxy
$A = C = D = 0, B \neq 0$	$By = 0$	плоскость Oxz
$B = C = D = 0, A \neq 0$	$Ax = 0$	плоскость Oyz

Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору

Пусть плоскость задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\bar{n} = (A, B, C)$, перпендикулярный этой плоскости, то ее уравнение имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4.3)$$

Уравнение (4.3) называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A, B, C)$. Вектор $\bar{n} = (A, B, C)$ называется *нормальным вектором* данной плоскости.

Уравнение плоскости в «отрезках»

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy, Oz сответственно отрезки a, b, c, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (4.4)$$

Уравнение (4.4) называется *уравнением плоскости в «отрезках»*.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Если плоскость проходит через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.5)$$

Угол между плоскостями

Пусть заданы две плоскости

Q_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$;

Q_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Угол φ между плоскостями определяется по формуле

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\,. \qquad (4.6)$$

Условие параллельности плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние от заданной точки до плоскости находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,. \qquad (4.7)$$

4.2. Прямая

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ имеет вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4.8)$$

Канонические уравнения прямой

Канонические уравнения прямой определяют прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельно вектору $\bar{s} = (m, n, p)$:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \qquad (4.9)$$

вектор $\bar{s}=(m,n,p)$ называется *направляющим вектором прямой.*

Общее уравнение прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (4.10)$$

Параметрические уравнения прямой

От канонических уравнений (4.9), вводя параметр t, переходят к параметрическим уравнениям

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \qquad (4.11)$$

Угол между двумя прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями:

$$L_1: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1};$$

$$L_2: \ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Угол φ между прямыми определяется по формуле

$$cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (4.12)$$

Условие параллельности двух прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Пусть заданы плоскость $Q\colon Ax+By+Cz+D=0$ и прямая $L\colon \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,

то угол между этой прямой и плоскостью можно найти по формуле

$$sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\,. \qquad (4.13)$$

Условие параллельности прямой и плоскости:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Задания для самостоятельной работы

№ 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и имеющей нормальный вектор $\bar{n}$, в каждом из следующих случаев:

1) $M_0(4,3,-2),\ \bar{n}=(1,-7,5)$;

2) $M_0(1,-6,8),\ \bar{n}=(2,1,-2)$.

№ 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через три указанные точки:

1) $M_1(9,-11,5),\ M_2(7,4,-2),\ M_3(-7,13,-3)$;

2) $M_1(-1,2,1),\ M_2(-3,1,2),\ M_3(3,-2,2)$.

№ 3. Записать уравнение плоскости, проходящей через две точки M_1, M_2 и параллельной данному вектору $\bar{a}$:

1) $M_1(1,-2,-1),\ M_2(4,1,1),\ \bar{a}=(5,3,4)$;

2) $M_1(3,2,1),\ M_2(1,-4,3),\ \bar{a}=(2,-1,-2)$.

№ 4. Найти углы между двумя плоскостями:

1) $5x + 4y - 2z - 3 = 0,\ 20x + 16y - 8z + 5 = 0$;

2) $3x - 2y + 5z + 2 = 0,\ x + 4y + z - 4 = 0$;

3) $11x - 8y - 7z + 6 = 0,\ 4x - 10y + z - 5 = 0$;

4) $5x - y + 3z - 2 = 0, -x + 2y + 10z - 7 = 0$;

5) $3x - 5y - 4z + 9 = 0,\ x + 2y - z + 4 = 0$;

6) $x - 2z + 8 = 0,\ y - 5z + 7 = 0$.

№ 5. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -3, 2)$ и параллельной плоскости $7x + 3y - 8z - 5 = 0$.

№ 6. Записать уравнение плоскости, проходящей через начало координат, перпендикулярной плоскости $5x - 2y + 5z + 3 = 0$ и образующей с плоскостью $x - 4y - 8z + 7 = 0$ угол $\varphi = 45^{\circ}$.

№ 7. Вычислить расстояния от данных точек M_1, M_2 до указанных плоскостей:

1) $x - 2y + 2z - 3 = 0,\ M_1(4, 2, -1),\ M_2(-3, 5, -7)$;

2) $2x + 3y - 6z - 7 = 0,\ M_1(-2, 5, 1),\ M_2(9, 1, 2)$;

3) $10x - 11y + 2z - 45 = 0,\ M_1(0, 1, -2),\ M_2(6, -1, 2)$.

№ 8. Найти направляющие косинусы и длину перпендикуляра, проведенного из начала координат к плоскости

$2x + 10y - 11z - 60 = 0$.

№ 9. Дана треугольная пирамида с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(-11, 3, -3)$, $C(5, 2, 4)$, $D(2, 2, -5)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины D к грани ABC.

№ 10. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

1) $2x + y - 2z - 6 = 0,\ 2x + y - 2z - 15 = 0$;

2) $3x - 2y + 6z - 7 = 0,\ 3x - 2y + 6z - 35 = 0$;

3) $2x - 10y + 11z + 30 = 0,\ 2x - 10y + 11z - 45 = 0$.

№ 11. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1,-2,3)$ параллельно:

1) вектору $a = (4,5,-7)$;

2) оси Ox; 3) оси Oy; 4) оси Oz.

№ 12. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(9,-8,-5)$ перпендикулярно:

1) плоскости $2x + 3y + 4z - 11 = 0$;

2) плоскости Oyz; 3) плоскости Oxz; 4) плоскости Oxy.

№ 13. Найти направляющие косинусы прямых:

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{1}$; 2) $\frac{x+8}{6} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+4}{-3}$;

3) $x = 4 - 10t,\ y = 9 + 2t,\ z = 3 - 11t$;

4) $x = 7 - 12t,\ y = 9 + 5t,\ z = 4$.

№ 14. Найти косинус угла между двумя прямыми:

1) $\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-7}{-2}$ и $\frac{x-8}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-1}{2}$;

2) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+6}{7} = \frac{z+2}{8}$ и $\frac{x+5}{-8} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+4}{7}$;

3) $x = 1 + 3t,\ y = 9 - 2t,\ z = 8 + 4t$ и
$x = -7 + 6t,\ y = 2 - 4t,\ z = 1 + 8t$;

4) $x = 3 + 2t,\ y = 7 + 10t,\ z = -5 + 11t$ и
$x = 8 + t,\ y = 9 + 2t,\ z = 6 + 2t$.

№ 15. Составить параметрические уравнения следующих прямых:

1) $4x - 3y + 2z - 1 = 0,\ 5x - 2y + 3z - 3 = 0$;

2) $x - 3y + z + 3 = 0,\ 3x + y - 2z - 6 = 0$;

3) $x + 2y + z - 1 = 0,\ 2x + 2y - 3z + 6 = 0$;

4) $x + y + z - 3 = 0,\ x - y + z - 1 = 0$.

№ 16. Составить канонические уравнения следующих прямых:

1) $3x - 2y + z - 2 = 0,\ 4x + y - 3z - 2 = 0$;

2) $2x + 3y + 2z - 4 = 0,\ x + 4y + 5z - 6 = 0$.

№ 17. Записать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(4, 3, -6)$ параллельно прямой $7x + y + z - 8 = 0$, $6x + y - 2z - 7 = 0$.

№ 18. Записать уравнения плоскости, проходящей через точку $M(2, -1, -3)$ и прямую $x + 2y - 3z - 3 = 0$, $2x + y + z - 7 = 0$.

№ 19. Найти угол между прямой и плоскостью в каждом из следующих случаев:

1) $x = 5 + 11t, y = 4 - 8t, z = 3 - 7t;\ 7x + 2y - 8z - 10 = 0$;

2) $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+4}{2}; 2x - 4y + 2z = 0$;

3) $x - 3y + z + 3 = 0,\ 3x + y - 2z - 6 = 0$;
$x - 2y - z + 5 = 0$;

4) $x + y + z - 5 = 0,\ x + 2y + 3z - 6 = 0$;
$2x + 2y - 2z + 7 = 0$.

№ 20. Найти точку пересечения прямой $x = 1 + 3t$,
$y = -2 + 4t$, $z = 5 - 2t$ с плоскостью $6x - 5y + 3z - 7 = 0$.

5. Введение в математический анализ

5.1. Числовые последовательности

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие определенное действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность*:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \tag{5.1}$$

числа $x_1, x_2, \dots$ называются *элементами последовательности*;
символ x_n – *общим элементом последовательности*;
число n – номер этого элемента.

Сокращенно последовательность обозначают $\{x_n\}$.

Последовательность может быть задана формулой ее общего элемента, эта формула позволяет вычислить любой элемент последовательности по номеру n.

Пример.

1) $x_n = \frac{1}{n}$ задает последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

2) $x_n = 1 + (-1)^n$ задает последовательность $0,2,0,2 \dots$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если существует число $M > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \le M.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого $M > 0$ существует элемент x_n этой последовательности, удовлетворяющий неравенству

$$|x_n| > M.$$

Пример.

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и $\{2\}$ – ограниченные,

$\{2^n\}$ – неограниченная.

Определение. Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для каждого положительного числа ε, сколько бы мало оно не было, существует такой номер N, что все значения x_n, у которых номер $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Неравенство (5.2) равносильно неравенствам

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \qquad \text{или} \quad a - \varepsilon < x_n < \varepsilon + a. \tag{5.3}$$

Определение. Открытый промежуток $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, с центром в точке a, называется *ε–окрестностью* этой *точки*.

Геометрический смысл предела последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ означает, что для любой ε –окрестности точки a найдется натуральное число N, что все значения x_n, для которых $n > N$, попадут в ε–окрестность точки a.

Пример.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

$\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon, \qquad \left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon,$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon, \qquad n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}, \qquad n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Например, для

$$\varepsilon = 0{,}01, \qquad \frac{1 - 0{,}01}{0{,}01} = 99, \qquad n > 99.$$

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty.$$

Например,

$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{3}{n+1}\right\}, \left\{\frac{(-1)^n}{n^2+2}\right\}$ – бесконечно малые,

$\{n\}, \{-n\}, \{(-1)^{n+1}n\}$ – бесконечно большие.

Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то ее обратная величина $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность.

Свойства бесконечно малых последовательностей

1. Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
2. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
3. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.
4. Произведение бесконечно малой последовательности на число есть бесконечно малая последовательность.

Арифметические операции над последовательностями

1. Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют конечные пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то сумма (разность) их также имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то и произведение их тоже имеет конечный предел, и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab.$$

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$, то отношение их также имеет конечный предел, а именно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Операции 1 (для разности) – 3 не могут применяться в тех случаях, когда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются бесконечно большими, а также при вычислении $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$, когда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ являются бесконечно малыми последовательностями.

Указанные ситуации относятся к числу задач с неопределенностью, а их решение называют раскрытием неопределенности:

$\frac{0}{0}$ (отношение бесконечно малых),

$\frac{\infty}{\infty}$ (отношение бесконечно больших),

$\infty - \infty$ (разность бесконечно больших),

$0 \cdot \infty$ (произведение бесконечно малой на бесконечно большую).

5.2. Функции одной переменной

Определение. Пусть даны два множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется *функцией* и записывается $y = f(x)$.

При этом x называют *независимой переменной* (*аргументом*), y – *зависимой переменной* (*значением функции*).

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют *область определения функции*, обозначают $D(f)$.

Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют *область значений функции*, обозначают $E(f)$.

Если элементами множеств X и Y являются действительные числа, то функцию f называют *числовой функцией*.

Чтобы задать функцию, необходимо указать правило, по которому зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический.

Аналитический способ

Функция задается одной или несколькими формулами.

Например, $y = \frac{x-2}{x^2}$, $y = \begin{cases} x^2, x \leq 0, \\ x, x > 0. \end{cases}$

Графический способ

Функция задается графиком.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, для каждой из которых x является значением аргумента, а y – соответствующим значением функции.

Табличный способ

Функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции.

Основные характеристики функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Определение. Функция называется *возрастающей* (*убывающей*) на промежутке X, если для любой пары x_1 и $x_2 \in X$ из $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) [f(x_1) < f(x_2)]$;

Если же из $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) [f(x_1) \leq f(x_2)]$, то функцию называют *неубывающей* (*невозрастающей*).

Возрастающие, убывающие, неубывающие, невозрастающие функции называются *монотонными функциями*.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует положительное число M такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$.

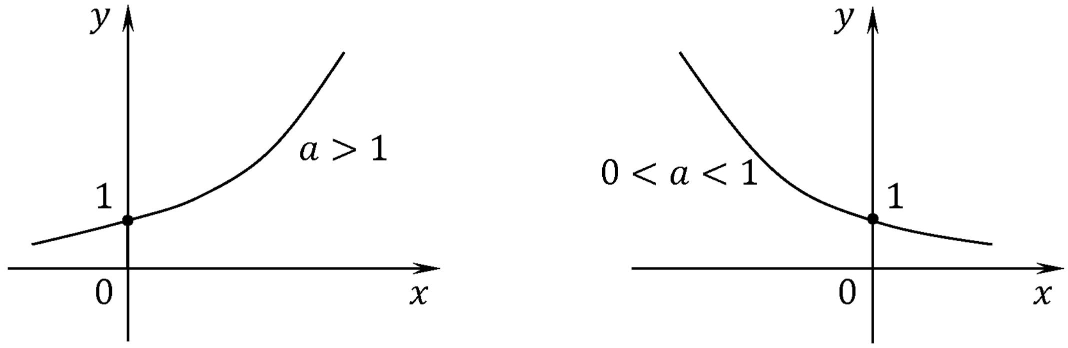
Определение. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T > 0$, такое, что $\forall\ x \in D(f)$ справедливо равенство:

$$f(x - T) = f(x + T) = f(x).$$

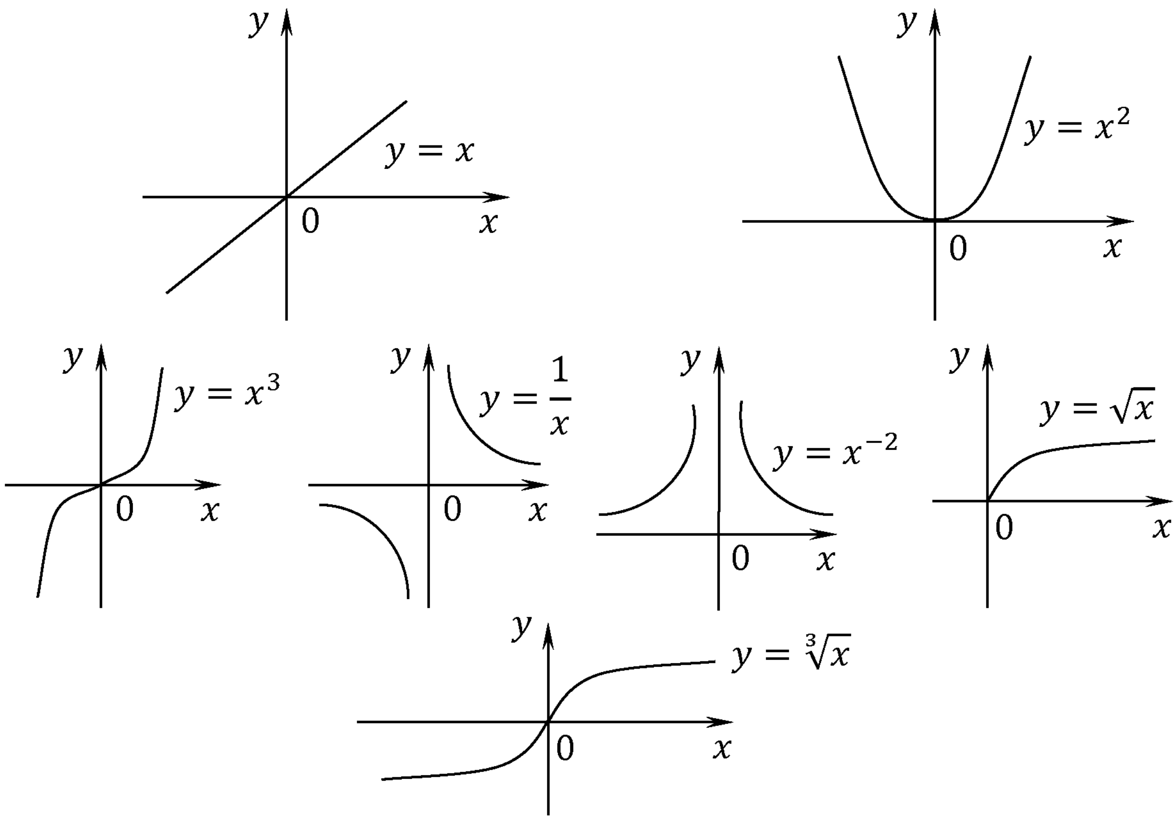
Число T называется *периодом функции.*

Основные элементарные функции

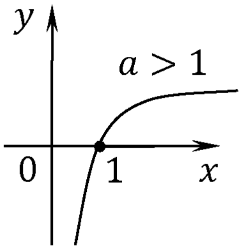
1. *Показательная* $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$.

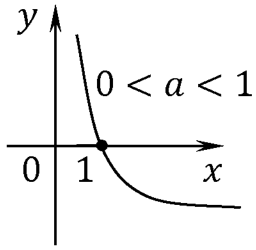


2. *Степенная* $y = x^\alpha,\ \alpha \in R$.

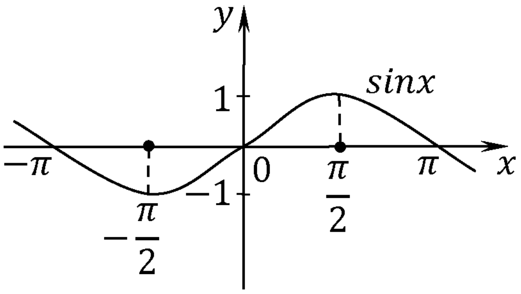


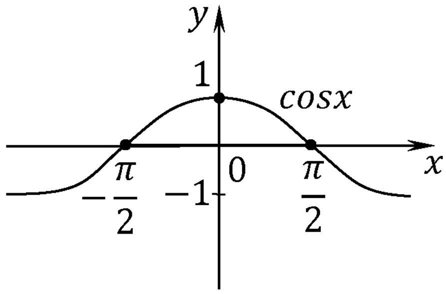
3. *Логарифмическая* $y = \log_a x$, $a > 0,\ a \neq 1$.

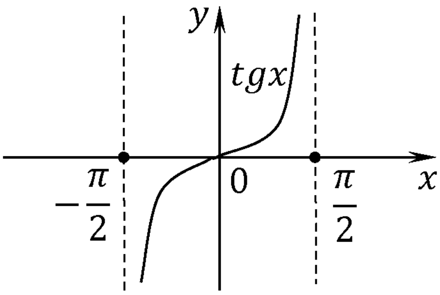


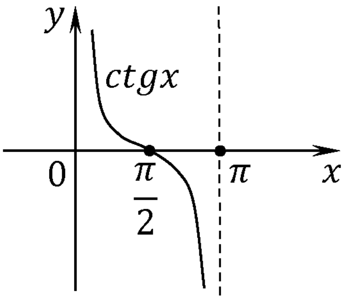


4. *Тригонометрические функции* $y = cosx$, $y = sinx$,
$y = tgx$, $y = ctgx$.









5.3. Предел функции

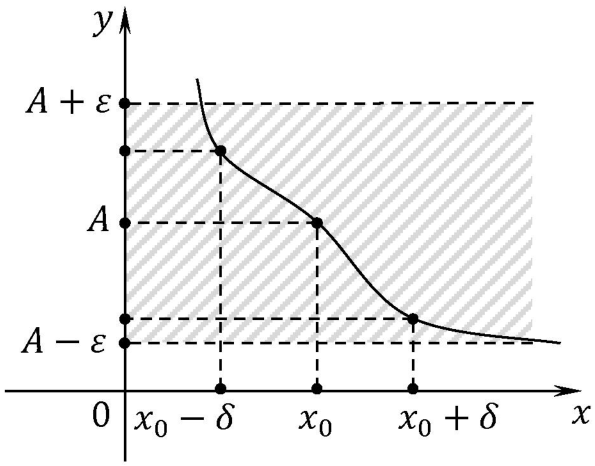
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Предел записывается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Геометрический смысл предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, означает, что для любой ε-окрестности точки A найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A.



Односторонние пределы

При нахождении предела функции считается, что x стремится к x_0 произвольным образом. Однако в некоторых случаях на значение предела влияет то, каким именно образом x приближается к x_0. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Определение. Число A_1 называется *пределом функции* $y = f(x)$ *слева* в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \epsilon (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon.$$

Предел слева записывают: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$.

Определение. Число A_2 называется *пределом функции* $y = f(x)$ *справа* в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \epsilon (x_0; x_0 + \delta)$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A_2| < \varepsilon.$$

Предел справа записывается: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2$.

Пределы функции слева и справа называются *односторонними пределами*.

Теорема. *(О связи между односторонними пределами и пределом функции в точке).* Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют как правый, так и левый пределы, и они равны. В этом случае предел функции равен односторонним пределам.

Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если предел ее в этой точке равен нулю, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Во всех этих случаях $f(x) \to 0$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x)| > \varepsilon.$$

Записывается: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Если $f(x)$ стремится к бесконечности и принимает лишь положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, лишь отрицательные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Аналогично определяют бесконечно большие функции при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

3. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая функция.

4. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть бесконечно малая функция.

Теорема. *(О связи между бесконечно малой функцией и бесконечно большой функцией).* Если функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция $(\alpha(x) \neq 0)$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция. И наоборот: если $f(x)$ – бесконечно большая функция, то $\frac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция.

Свойства пределов функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке x_0 пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, тогда:

1) предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \pm \varphi(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = A \pm B;$$

2) предел произведения двух функций равен произведению их пределов

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B;$$

3) постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to x_0} \big(c \cdot f(x)\big) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A;$$

4) предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \ \left(\lim_{x \to x_0} g(x) = B \neq 0\right).$$

Операции 1,2,4 – не могут применяться в тех случаях, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно большими функциями, а также при вычислении $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми функциями.

Указанные ситуации относятся к числу задач с неопределенностью, а их решение называют раскрытием неопределенности: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$.

Замечательные пределы

Теорема. *(Первый замечательный предел)*. Предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Следствия:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tg\, x}{x} = 1.$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{arctg\, x}{x} = 1.$

Первый замечательный предел часто используют при вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции.

Теорема. *(Второй замечательный предел)*. Предел функции $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ при $x \to \infty$ равен числу e:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Следствия:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1.$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^{x} - 1}{x} = \ln a.$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$
5. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

5.4. Производная функции

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на интервале $(a; b)$. Рассмотрим два значения аргумента x_0 и x из этого интервала. Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается Δx.

Таким образом, $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$ и говорят, что первоначальное значение переменной получило некоторое приращение.

Значение функции в точке x_0 было $f(x_0)$, в точке x значение функции стало $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$. Разность $f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается Δy.

Таким образом, $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Составим отношение приращения функции к приращению аргумента.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Определение. *Производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю (если предел существует). Обозначается $f'(x_0)$. Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение. Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a; b)$, называется *дифференцируемой* в этом интервале. Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Геометрический смысл производной

Пусть на плоскости Oxy кривая задана уравнением $y = f(x)$. Производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$. В этом заключается геометрический смысл производной.

Уравнение касательной будет:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ где } f'(x_0) = k = tg\alpha.$$

Определение. Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью к кривой*.

Уравнение нормали имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0), \text{ где } k = f'(x_0).$$

Физический смысл производной

Если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит физический смысл производной.

Пример.

1) $S = s(t)$ – закон движения точки, то скорость точки в момент времени t_0 равна $v(t_0) = s'(t_0)$,
2) $P = p(t)$ – размер популяции бактерий, то скорость роста популяций в момент времени t_0 равна $p'(t_0)$,
3) $M = m(t)$ – количество вещества, вступившего в химическую реакцию, тогда $m'(t_0)$ – скорость химической реакции в данный момент времени t_0,
4) $Q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через проводник, тогда $J = q'(t_0)$ – сила тока в момент времени t_0.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Таким образом, из дифференцируемости функции следует ее непрерывность. Обратное утверждение теоремы неверно: существует непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми.

Например, $y = |x|$.

Замечание 1. Если существуют различные пределы $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ слева и справа, то говорят, что функция имеет односторонние производные, и обозначают соответственно $f'_-(x)$ и $f'_+(x)$.

Если $f'_-(x) \neq f'_+(x)$, то производная в точке не существует. Не существует производных и в точке разрыва функции.

Замечание 2. Производная $y' = f'(x)$ непрерывной функции $y = f(x)$ сама не обязательно является непрерывной.

Если функция $y = f(x)$ в некотором интервале $(a; b)$ имеет непрерывную производную $y' = f'(x)$, то функция называется *гладкой*.

Правила дифференцирования

Нахождение производной функции непосредственно по определению часто связано с определенными трудностями. На практике функции дифференцируют с помощью ряда правил и формул.

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые в интервале $(a; b)$ функции, тогда:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2) $(uv)' = (u'v + v'u)$.
3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
4) $(cu)' = cu'$.

Таблица производных

1. $c' = 0, \qquad c = const.$
2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

3. $(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (e^x)' = e^x.$

4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

5. $(\sin x)' = \cos x.$

6. $(\cos x)' = -\sin x.$

7. $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

8. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

9. $(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

10. $(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Логарифмическое дифференцирование

Функцию вида $y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$, $f(x) > 0$, где и основание и показатель изменяются вместе с независимой переменной, называют *степенно-показательной.*

Операция, состоящая в последовательном применении к функции сначала логарифмирования по основанию e, а затем дифференцирования, называется *логарифмическим дифференцированием*, а ее результат

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} \; -$$

логарифмической производной от функции y.

Логарифмическое дифференцирование может быть применимо для отыскания производных не только от функций степенно-показательного типа, но и для отыскания производной от произведения нескольких функций.

Пример 1. $y = x^{\sin x}$.

Прологарифмируем функцию:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

дифференцируя это тождество по x и помня, что в левой части равенства стоит сложная функция от x, получим

$$\frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

откуда

$$y' = y \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Пример 2. $y = 2^x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot \sin^2 x.$

$\ln y = x \ln 2 + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + 2 \ln \sin x,$

$\frac{y'}{y} = \ln 2 + \frac{x}{x^2 + 4} + 2 \operatorname{ctg} x,$

$y' = \left(\ln 2 + \frac{x}{x^2 + 4} + 2 \operatorname{ctg} x\right) \cdot 2^x \cdot \sqrt{x^2 + 4} \cdot \sin^2 x.$

Производная неявной функции

Пусть функция y есть неявная функция, т.е. она задается некоторым уравнением, связывающим независимую переменную x с функцией y, не разрешенным относительно y. Тогда производную от этой функции можно найти, дифференцируя по x обе части уравнения с учетом того, что y есть функция от x.

Пример 1. $x^2 + y^2 = 1.$

Дифференцируя по x и имея ввиду, что y есть функция от x, получим

$2x + 2yy' = 0, \qquad y' = -\frac{x}{y}.$

Пример 2. $y^3 - 3xy + \sin 2y = 0.$

$3y^2 \cdot y' - 3y - 3xy' + 2y' \cdot \cos 2y = 0,$

$y' \cdot (3y^2 - 3x + 2\cos 2y) = 3y,$

$y' = \frac{3y}{3y^2 - 3x + 2\cos 2y}.$

Производные параметрически заданных функций

Определение. Задание функциональной зависимости между двумя переменными, состоящее в том, что обе переменные определяются каждая в отдельности как функции одной и той же вспомогательной переменной, называется *параметрическим*, а вспомогательная переменная – *параметром*.

Пусть y как функция от x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то производная функции $y = f(x)$, находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Вторая производная находится по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Пример. $\begin{cases} x = 2\cos t\,, \\ y = 3\sin t\,. \end{cases}$ Найти производные первого и второго порядка функции $y(x)$.

$y'_t = 3\cos t\,;\ \ x'_t = -2\sin t,$ тогда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -1{,}5\,\mathrm{ctg}\,t.$$

$y''_{tt} = -3\sin t\,;\ \ x''_{tt} = -2\cos t,$ тогда

$$y''_{xx} = \frac{-3\sin t \cdot (-2\sin t) + 2\cos t \cdot 3\cos t}{-8\sin^3 t} =$$

$$= \frac{6\sin^2 t + 6\cos^2 t}{-8\sin^3 t} = -\frac{3}{4\sin^3 t}.$$

5.5. Исследование функций при помощи производной

Признаки монотонности функции

Применение дифференциального исчисления к исследованию функции опирается на весьма простую связь, существующую между поведением функции и свойствами ее производных, прежде всего ее первой производной.

Теорема. *(необходимый признак монотонности).*
1) Если дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале возрастает, то ее производная $f'(x)$ неотрицательна: $f'(x) \geq 0$;
2) если дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале убывает, то ее производная $f'(x)$ неположительна: $f'(x) \leq 0$;
3) если функция $f(x)$ на интервале не изменяется (постоянна), то ее производная $f'(x)$ тождественно равна нулю.

Теорема. *(достаточный признак монотонности).*

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[a, b]$ и имеет производную во всех его внутренних точках. Тогда:

1) Если производная $f'(x)$ внутри интервала всюду положительна, то функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ возрастает.

2) Если производная $f'(x)$ внутри интервала всюду отрицательна, то функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ убывает.

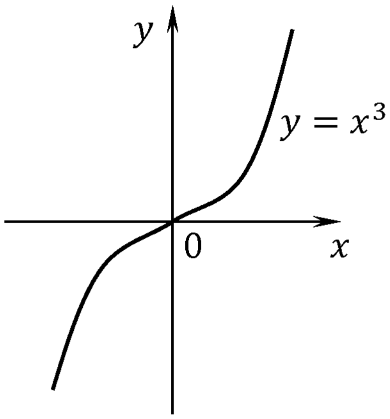
3) Если производная $f'(x)$ внутри интервала всюду равна нулю, то функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не изменяется, функция постоянна.

Экстремумы функции

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума функции* $f(x)$, если $f(x_0)$ есть наибольшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 . Аналогично. Точка x_0 называется *точкой минимума*, если $f(x_0)$ есть наименьшее значение функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.

Точки максимума и минимума объединяются названием *точки экстремума*.

Необходимый признак экстремума. Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке либо равна нулю, либо не существует. С геометрической точки зрения это означает, что касательная к графику функции в его вершине или впадине параллельна оси Ox.



Важно подчеркнуть, что необходимый признак экстремума не является достаточным, т.е. из того, что производная в данной точке обращается в нуль (или ее не существует), ещё не следует, что эта точка обязательно будет точкой экстремума.

Так , например, функция $y = x^3$ имеет производную $y' = 3x^2$, обращающуюся в нуль при $x = 0$. Однако точка $x = 0$ не является точкой экстремума.

Первый достаточный признак экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производную всюду, кроме, быть может, самой точки x_0; тогда:

если при $x < x_0$ производная $f'(x)$ положительна, а при $x > x_0$ – отрицательна, то x_0 – точка максимума;

если при $x < x_0$ производная $f'(x)$ отрицательна, а при $x > x_0$ – положительна, то x_0 – точка минимума.

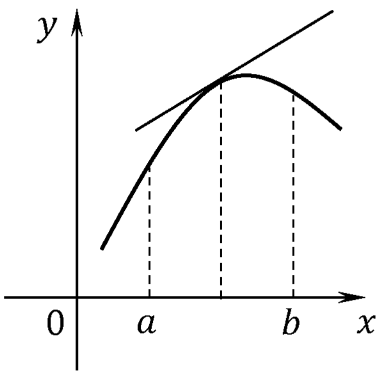
Второй достаточный признак экстремума. Если в точке x_0 первая производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$, а вторая производная не равна нулю: $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 есть точка экстремума. При этом:

если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума;

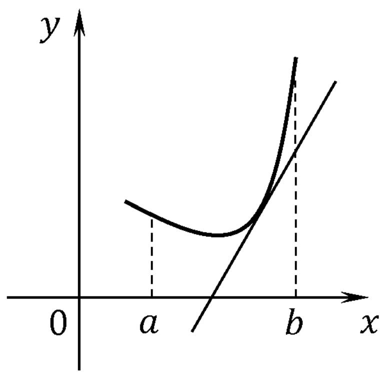
если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума.

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Определение. Функция $f(x)$ называется *выпуклой (вогнутой)* на интервале $(a; b)$, если график этой функции при

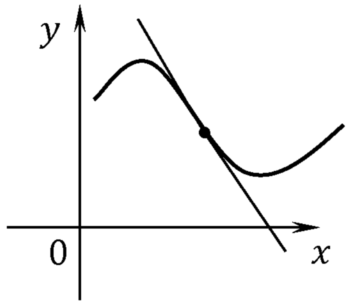


выпуклый



вогнутый

$x \epsilon (a; b)$ расположен ниже (выше) касательной, проведенной в любой его точке.



Определение. *Точкой перегиба* называется такая точка линии, которая отделяет выпуклую дугу от вогнутой. В точке перегиба касательная пересекает график; в окрестности этой точки график функции лежит по обе стороны от касательной.

Достаточное условие выпуклости (вогнутости).

Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале $(a; b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) на этом интервале, то функция $f(x)$ выпукла (вогнута) на нем.

Необходимое условие точки перегиба.

Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$, то в этой точке вторая производная функции либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба.

Пусть функция $f(x)$ имеет первую и вторую производные в точке x_0 в некоторой окрестности этой точки. Тогда, если при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак, то x_0 – точка перегиба.

Асимптоты

Определение. Прямая l называется *асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если расстояние точки графика функции $y = f(x)$ от прямой l стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Асимптоты бывают трех видов: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

а) Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ равен бесконечности.

б) Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ тогда и только тогда, когда существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$.

в) Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b\right)$.

Общая схема исследования функций и построения их графиков

1) Найти область определения функции, точки ее разрыва.
2) Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность.
3) Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
4) Найти асимптоты.
5) Найти интервалы монотонности функции и точки экстремума.
6) Найти интервалы выпуклости и вогнутости; точки перегиба.
7) Построить график функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{1+x}$.

1) Функция определена и непрерывна на всей числовой оси Ox, за исключением точки $x = -1$.
   $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т.к.
   $y(-x) = \frac{(-x)^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$.
3) Точки пересечения с осью Ox: $\frac{x^2}{1+x} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

   Точки пересечения с осью Oy: $y = \frac{0^2}{1+0} = 0$.

   Таким образом, точка $(0; 0)$ – единственная точка пересечения с осями координат.

Определим промежутки знакопостоянства функции. Функция обращается в нуль при $x = 0$.

Отметим на числовой оси нули функции и область определения; проверим знак функции на каждом промежутке.

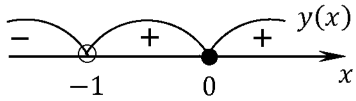


График функции находится выше оси Ox при $x \in (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. График функции находится ниже оси Ox при $x \in (-\infty; -1)$.

4) Вертикальную асимптоту ищем в точке разрыва функции, т.е. в точке $x = -1$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to-1-} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x\to-1+} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{+0} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = -1 \text{ – вертикальная асимптота.}$$

Горизонтальные асимптоты:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1+x} = \pm\infty \;\Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\cdot(1+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x} =$$

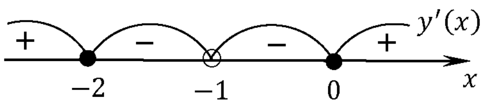
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = -1.$$

Таким образом прямая $y = x - 1$ является наклонной асимптотой.

5) Вычислим производную $y' = \frac{2x\cdot(1+x)-x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$

Приравняем производную к нулю и находим критические точки $\frac{x^2+2x}{(1+x)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -2.$

На числовой оси отметим критические точки и область определения функции.



Определим знак производной функции на каждом промежутке.

Функция возрастает при $x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$;

Функция убывает при $x \in [-2; -1) \cup (-1; 0]$;

Точка $x = -2$ является точкой максимума;

Точка $x = 0$ является точкой минимума.

Значение функции в точке максимума $y(-2) = -4$.

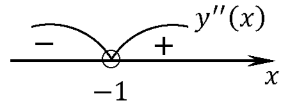
Значение функции в точке минимума $y(0) = 0$.

6) Вычислим вторую производную функции

$$y'' = \frac{(2x+2)\cdot(1+x)^2 - 2(1+x)\cdot(x^2+2x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Вторая производная в нуль нигде не обращается.

На числовой оси отметим только область определения функции и определим знак второй производной на промежутке.



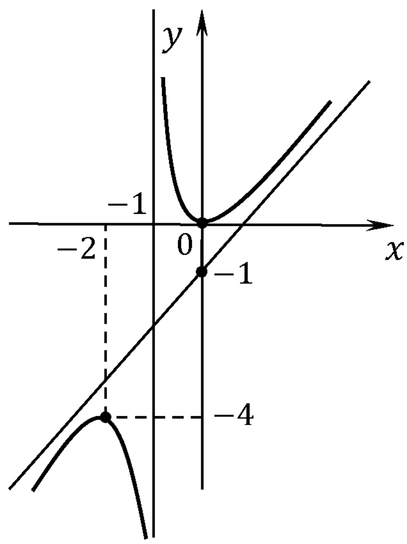


График функции выпуклый на интервале $(-\infty; -1)$ и вогнутый на интервале $(-1; +\infty)$.

7) Приняв во внимание полученные результаты, построим график, дающий представление о ходе изменения функции на всей оси Ox.

Задания для самостоятельной работы

№ 1. Найти общий элемент последовательности

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \dots$$

№ 2. Найти общий элемент последовательности

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$$

№ 3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^4} = 0$.

№ 4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$.

№ 5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}=0$.

№ 6. Найти область определения каждой функции.

1) $f(x)=x^3-7x+6$.
2) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-5x+4}$.
3) $f(x)=\ln(x-2)$.
4) $f(x)=\sqrt[4]{4-x^2}+\sqrt[3]{x^2-16}$.
5) $f(x)=\ln|x+3|$.
6) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{16-x^2}$.

№ 7. Построить по точкам график функции.

1) $y=x^3$.
2) $y=1/x^2$.
3) $y=1/x^3$.
4) $y=x^4$.
5) $y=x^5$.
6) $y=x^6$.

№ 8. Найти предел функции.

1) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-2}$.
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-6x^4+5x^3-2x^2+3x-1}{4x^5+3x^3-x^2+9}$.
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-5x^3+4x^2-7}{x^4+6x^2-8}$.
4) $\lim\limits_{x\to6}\frac{36-x^2}{\sqrt{x+3}-3}$.
5) $\lim\limits_{x\to7}\frac{49-x^2}{1-\sqrt{8-x}}$.
6) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{14+x}-4}$.

№ 9. Найти предел функции.

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x/4)}{x}$.
2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 8x}{x}$.
3) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{x^2}$.
4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}ax}{\sin bx}$.
5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^4(x/2)}{x^4}$.
6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+16}-4}$.

№ 10. Найти предел функции.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x-9}-x\right)$.
2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+8x-7}-\sqrt{x^2+4x}\right)$.
4) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.
5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2 4x}-\frac{1}{4\sin^2 2x}\right)$.
6) $\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}\right)$.

№ 11. Найти точки разрыва функции, указать их вид, построить график функции.

1) $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$. 2) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$.

3) $f(x) = \frac{9}{9-x^2}$. 4) $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-3x+2}$.

5) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$ 6) $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x < 1, \\ 3x+2, & x \ge 1. \end{cases}$

№ 12. Найти производную функции.

1) $y = x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 7x - 9$. 2) $y = \frac{4}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3}$.

3) $y = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2$. 4) $y = \frac{5}{4\sqrt[5]{x^4}} - \frac{2}{3\sqrt{x^3}}$.

5) $y = 2x\sin x + (2 - x^2)\cos x$. 6) $y = \frac{3x-2}{4x+5}$.

№ 13. Найти производную функции.

1) $y = \frac{1}{3}\cos(6x-1)$. 2) $y = \sin^2 2x$.

3) $y = \sin x^3$. 4) $y = (2-3x)^5$.

5) $y = \sqrt[4]{(5-8x)^3}$. 6) $y = \sin\sqrt{x^2+4x-5}$.

№ 14. Найти производную функции.

1) $y = \ln(x^2+6x+7)$. 2) $y = \ln\cos 4x$.

3) $y = \lg(x^2+bx+c)$. 4) $y = x^5 + 5^x$.

5) $y = \ln\frac{x+1}{x-1}$. 6) $y = e^{\cos 3x}$.

№ 15. Составить уравнение касательной и нормали к линии, заданной уравнением, в указанной точке M.

1) $f(x) = x^2 + 4x - 26,\ M(4,6)$.

2) $f(x) = 3x - x^2 + 7,\ M(5,-3)$.

3) $f(x) = x^3 + 4x + 6,\ M(-1,1)$.

4) $f(x) = 2x^3 + 3x - 9,\ M(1,-4)$.

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5,\ M(3,4)$.

6) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2,\ M(2,2)$.

7) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 6,\ M(1,3)$.

8) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1,\ M(0,1)$.

№ 16. Исследовать функцию и построить ее график.

1) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$. 2) $y = \frac{x^2}{x-1}$.

3) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. 4) $y = \frac{x}{x^2-2x+2}$.

5) $y = \frac{x^3}{3-x^2}$. 6) $y = x + \frac{1}{x}$.

6. Основы интегрирования

6.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на промежутке X, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример.

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на $X = (-\infty, +\infty)$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C – некоторая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$, так как $[F(x) + C]' = f(x)$ для любого числа C. Например, для $f(x) = \cos x$ первообразной является не только $\sin x$, но и функция $\sin x + C$, так как $(\sin x + C)' = \cos x$.

Определение. Если функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то множество функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

При этом функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, а переменная x – *переменной интегрирования*.

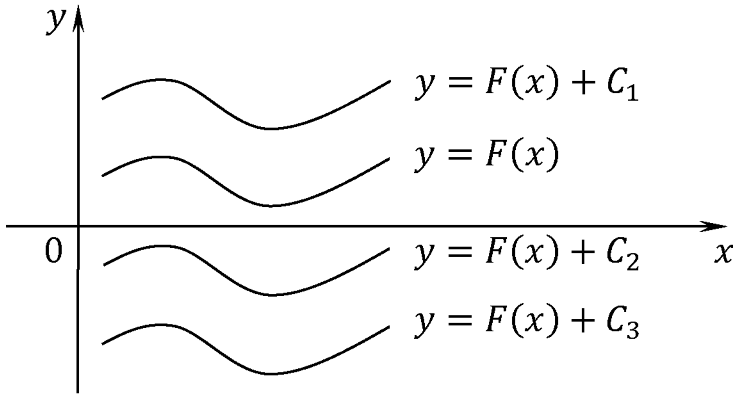
Восстановление функции по ее производной, или, что то же, отыскание неопределенного интеграла, называется *интегрированием*. Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.

Пример.

$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$

Дифференцируя результат интегрирования $(x^3 + C)' = 3x^2$, получаем подынтегральную функцию. Следовательно, интегрирование выполнено верно.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется *интегральной кривой*.



Свойства неопределенного интеграла

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx, \qquad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Благодаря этому свойству правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Например, равенство

$$\int (3x^2 + 4)\,dx = x^3 + 4x + C$$

верно, так как $(x^3 + 4x + C)' = 3x^2 + 4$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a \cdot \int f(x)\,dx, \qquad a \neq 0 \text{ – постоянная.}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$

5. (Инвариантность формулы интегрирования). Если

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \text{то и } \int f(u)\,du = F(u) + C,$$

где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную. Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0 \cdot dx = C.$

2. $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C(\alpha \neq -1).$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C(x \neq 0).$

5. $\int a^{x}\,dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C(0 < a \neq 1).$

6. $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C.$

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

8. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

12. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C.$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C(a \neq 0).$

15. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

Интегралы в приводимой таблице называются *табличными*. Их следует знать наизусть. В интегральном исчислении нет простых и универсальных правил отыскания первообразных от элементарных функций, как в дифференциальном исчислении. Методы нахождения первообразных (т.е. интегрирование функции) сводятся к указанию приемов, приводящих данный (искомый) интеграл к табличному. Следовательно, необходимо знать табличные интегралы и уметь их узнавать.

6.2. Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

Пример.

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right) dx.$$

Применив свойства 3 и 4, имеем

$$\int \left(5\cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= 5\int \cos x\, dx + 2\int dx - 3\int x^2\, dx + \int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= 5\sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4\,\mathrm{arctg}\, x + C.$$

Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки). Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \qquad (6.1)$$

Формула (6.1) также называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x.

Пример 1.

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx.$$

Положим $x = 4t$, тогда $dx = 4dt$. Следовательно,

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^t\,dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

Пример 2.

$$\int x \cdot \sqrt{x-3}\,dx.$$

Пусть $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x = t^2 + 3,\ dx = 2t\,dt$. Поэтому

$$\int x \cdot \sqrt{x-3}\,dx = \int (t^2+3) \cdot t \cdot 2t\,dt = 2\int (t^4 + 3t^2)\,dt =$$

$$= 2\int t^4\,dt + 6\int t^2\,dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6\frac{t^3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{e^x + 1}.$$

Обозначим $e^x = t$. Тогда $x = \ln t\,,\ dx = \frac{dt}{t}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{\frac{dt}{t}}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} =$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = -\int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} \ln\left|\frac{\frac{1}{2}+t+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-t-\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{t+1}{-t}\right| = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Метод интегрирования по частям

Формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле называется формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \qquad (6.2)$$

где u и v – дифференцируемые функции от x. Она позволяет свести вычисление $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться более простым для интегрирования.

Большую часть интегралов, вычисляемых интегрированием по частям, можно разбить на три группы.

1. Интегралы вида $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arcctg} x\,dx$, $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, где $P(x)$ – многочлен. Для их вычисления следует положить u равным одной из указанных выше функций, а $dv = P(x)dx$ (см. пример 1).

2. Интегралы вида $\int P(x)\,e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где $P(x)$ – многочлен, а k – некоторое число. Для их вычисления следует положить $u = P(x)$, а $dv = e^{kx}dx$, $dv = \sin kx\,dx$, $dv = \cos kx\,dx$ соответственно (см. пример 2).

3. Интегралы $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a и b – некоторые числа. Эти интегралы вычисляются двукратным интегрированием по частям (см. пример 3).

Пример 1.

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx.$$

Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$. Тогда

$$du = (\operatorname{arctg} x)'dx = \frac{dx}{1+x^2};$$

$$\int dv = \int dx, \qquad v = x.$$

По формуле (6.2) имеем

$$\int \operatorname{arctg} x\, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$
$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 2.

$$\int xe^x\, dx.$$

Полагая $u = x$, $dv = e^x dx$, найдем

$$du = (x)' dx = dx; \ \int dv = \int e^x dx, \qquad v = e^x.$$

По формуле (6.2) имеем

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 3.

$$\int e^x \cos x\, dx.$$

Положим $u = e^x$, $dv = \cos x\, dx$ (можно положить также $u = \cos x$, $dv = e^x dx$). Тогда

$$du = (e^x)' dx = e^x dx; \ \int dv = \int \cos x\, dx, \qquad v = \sin x.$$

По формуле (6.2) имеем

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx. \tag{6.3}$$

Полученный интеграл снова вычисляем интегрированием по частям, положив $u = e^x$, $dv = \sin x\, dx$, откуда $du = e^x dx$, $v = -\cos x$. Тогда

$$\int e^x \sin dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx.$$

Подставляя значение полученного интеграла в выражение (6.3), находим

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right) =$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx.$$

Перенося интеграл из правой части равенства в левую, получаем

$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x(\sin x + \cos x) + C_1$$

и окончательно имеем

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

6.3. Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a; b]$ определена функция $y = f(x)$. Разобьем $[a; b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

В каждом из полученных элементарных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ произвольным образом выберем точку ξ_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой функции* $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего из элементарных отрезков, т.е. $\lambda = \max \Delta x_i$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называется предел ее интегральной суммы в случае, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна, то указанный предел существует и конечен.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$, т.е. переменную интегрирования можно обозначить любой буквой.
4. $\int_a^b \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx$.
5. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.
6. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,\ a < c < b$.
7. Если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$; если $f(x) \leq 0$ для всех точек $x \,\epsilon\, [a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.
8. Если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.
9. Если M – наибольшее, m – наименьшее значение $f(x)$ на $[a;b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$.
10. $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),\ c \,\epsilon\, [a;b]$ (теорема о среднем).
11. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
12. $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'_x = f(x)$.

Если непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ может быть найдена ее первообразная $F(x)$, то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ является *формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (6.4)$$

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi'(t)dt, \qquad (6.5)$$

где $x=\varphi(t)$; $a=\varphi(\alpha)$; $b=\varphi(\beta)$; t – новая переменная; α,β – новые пределы интегрирования.

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x). \qquad (6.6)$$

Пример 1. Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интеграл $\int_1^4 x^2\,dx$.

Подынтегральная функция $f(x)=x^2$ на отрезке $[1;4]$ имеет первообразную $F(x)=\frac{x^3}{3}$. Тогда по формуле (6.4) имеем

$\int_1^4 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}=21.$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$ с помощью замены переменных.

Применим подстановку $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$, $dx=2t\,dt$. Находим новые пределы интегрирования:

x	1	9
$t=\sqrt{x}$	1	3

Применяя формулу (6.5), получим:

$\int_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2t\,dt}{5+2t} = \int_1^3 \frac{2t+5-5}{2t+5} =$

$= \int_1^3\left(1-\frac{5}{2t+5}\right)dt = t\Big|_1^3 - 5\cdot\frac{1}{2}\ln|2t+5|\Big|_1^3 =$

$= 3-1-\frac{5}{2}(\ln 11-\ln 7) = 2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}.$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_1^e (x+1)\ln x\,dx$.

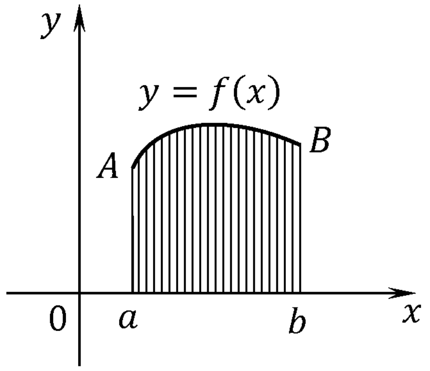
Применим формулу интегрирования по частям. Положим $u=\ln x$, $dv=(x+1)dx$. Тогда $du=\frac{1}{x}dx$, $v=\frac{x^2}{2}+x$. По формуле (6.6) имеем

$\int_1^e (x+1)\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e - \int_1^e\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x} =$

$= \frac{e^2}{2}+e-0-\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}+e-\frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}+1=\frac{e^2+5}{4}.$

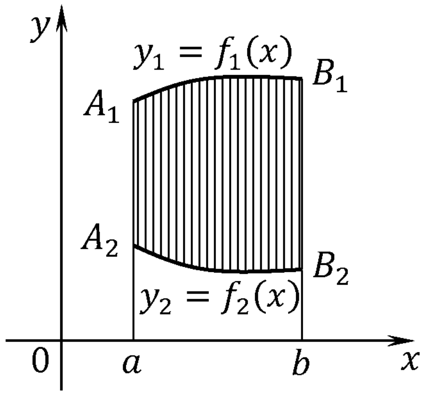
6.4. Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской криволинейной фигуры



Площадь криволинейной трапеции $ABba$ ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа соответственно прямыми $x = a,\ x = b$, снизу осью Ox, вычисляется по формуле

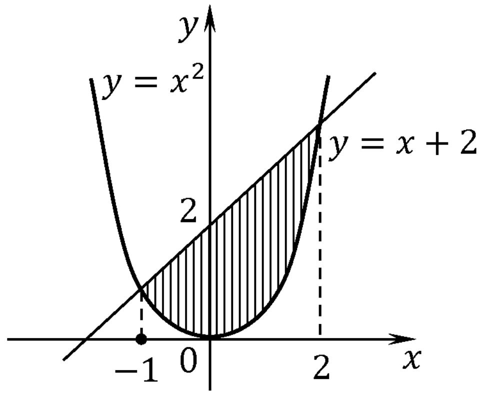
$$S = \int_a^b y\,dx.$$



Площадь криволинейной фигуры $A_1B_1B_2A_2$ ограниченной сверху и снизу соответственно линиями $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx. \qquad (6.7)$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y - x^2 = 0, x - y + 2 = 0$.



Данная фигура сверху ограничена прямой $x - y + 2 = 0$, снизу параболой $y - x^2 = 0$. Искомую площадь вычислим по формуле (6.7). Предварительно находим пределы интегрирования и выражения для y_1, y_2. Пределами интегрирования будут абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Решая систему уравнений $y - x^2 = 0$, $x - y + 2 = 0$, находим: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, т.е. $a = -1$, $b = 2$. Выражая y из каждого уравнения, получаем:

$$y_1 = f_1(x) = x + 2, \qquad y_2 = f_2(x) = x^2$$

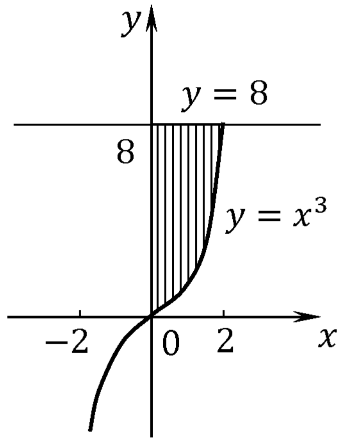
(через $y_1 = f_1(x)$ обозначена функция, график которой ограничивает криволинейную фигуру сверху).

По формуле (6.7) находим

$S = \int_{-1}^{2}[(x+2) - x^2]\,dx = \int_{-1}^{2} x\,dx + 2\int_{-1}^{2} dx - \int_{-1}^{2} x^2\,dx =$

$= \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 2 - \frac{1}{2} + 4 + 2 - \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2}$ кв. ед.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Oy и линиями $y = x^3$, $y = 8$.



Из уравнения $y = x^3$ находим $x = \sqrt[3]{y}$. Пределы интегрирования $c = y_1 = 0$, $d = y_2 = 8$.

Получаем

$S = \int_0^8 y^{1/3}\,dy = \frac{3}{4}y^{4/3}\Big|_0^8 = \frac{3}{4}\cdot 16 = 12$ кв. ед.

Длина дуги кривой

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$ или $x = \varphi(y)$. На кривой выбраны точки A и B с координатами: $A(a; c)$, $B(b; d)$. Длина l дуги кривой от точки A до точки B вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx; \qquad (6.8)$$

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\,dy. \qquad (6.9)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

причем $t_1 \le t \le t_2$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt. \qquad (6.10)$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi. \qquad (6.11)$$

Объем тела вращения

Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $(f(x) \ge 0)$ и прямыми $y = 0,\ x = a,\ x = b,$ вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_{a}^{b} y^2\, dx. \qquad (6.12)$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$ $(\varphi(y) \ge 0)$ и прямыми $x = 0,\ y = c,\ y = d,$ то объем тела вращения равен

$$V_y = \pi \int_{c}^{d} x^2\, dy. \qquad (6.13)$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси Ox. (Это тело ограничено поверхностью, которая называется *эллипсоидом вращения*).

Искомый объем вычислим по формуле (6.12), предварительно выразив y^2 из уравнения эллипса:

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \int_{-a}^{a} dx - \frac{\pi b^2}{a^2} \int_{-a}^{a} x^2\, dx = \pi b^2 x \Big|_{-a}^{a} -$$

$$- \frac{\pi b^2}{a^2} \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^{a} = \pi b^2 [a - (-a)] - \frac{\pi b^2}{3a^2} [a^3 - (-a)^3] = \frac{4}{3} \pi a b^2 \text{ куб. ед.}$$

Задания для самостоятельной работы

№ 1. Найти неопределенный интеграл.

1) $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^6}\right)dx$.

2) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$.

3) $\int\left(2+\sqrt{x}\right)^3 dx$.

4) $\int 2^x\left(1+\frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$.

5) $\int\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

6) $\int\frac{5-4\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$.

7) $\int\frac{x^2}{x^2-1}dx$.

8) $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$.

9) $\int\frac{x^4}{x^2-1}dx$.

10) $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$.

№ 2. Найти интеграл, применив метод подстановки.

1) $\int\sin(2x+7)\,dx$.

2) $\int x^2\sin x^3\,dx$.

3) $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

4) $\int\frac{dx}{7-8x}$.

5) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x\,dx$.

6) $\int\sin^4 x\cos x\,dx$.

7) $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$.

8) $\int x^2\sqrt{x^3-7}\,dx$.

9) $\int\frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

10) $\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

№ 3. Найти интеграл методом интегрирования по частям.

1) $\int x\sin 5x\,dx$.

2) $\int xe^{-2x}\,dx$.

3) $\int(x+7)e^x\,dx$.

4) $\int x\ln 6x\,dx$.

5) $\int\arcsin\frac{x}{3}dx$.

6) $\int x\,\mathrm{arctg}\,4x\,dx$.

7) $\int x^3e^{x^2}\,dx$.

8) $\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

9) $\int(x^2-2x+3)\sin x\,dx$.

10) $\int x^2\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

№ 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_{-1}^{3}\left(x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\right)dx$.

2) $\int_0^{\pi}(2x-\sin 2x)\,dx$.

3) $\int_2^5\frac{dx}{2x-3}$.

4) $\int_1^{e^2}\frac{\ln^3 x}{3x}dx$.

5) $\int_2^3 x(3-x)^7\,dx$.

6) $\int_{-1}^{0}(2+5x)^4\,dx$.

7) $\int_0^2 \ln(x^2+4)\,dx$. 8) $\int_0^1 4x \arcsin x\,dx$.

№ 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1) $y^2 - x + 1 = 0,\ x - 5 = 0$.

2) $x^2 - 4x + y = 0$ и осью Ox.

3) $y = x^2 - 6x + 5$ и осью Ox.

4) $y = 2 - x^2,\ y^3 = x^2$.

5) $y = x^3 - 3x + 2$ и осью Ox.

6) $y^2 = 4x,\ y^2 = 4x - x^2,\ x = 4$.

№ 6. Вычислить длину дуги.

1) $y = \ln\sin x,\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

2) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x,\ 1 \le x \le 4$.

3) $y = -x^2 + 2x$ от вершины до точки $x = 2$.

4) $y = \ln x,\ \sqrt{8} \le x \le \sqrt{15}$.

№ 7. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8$ вокруг оси Ox.

2) $y = \frac{2}{1+x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ вокруг оси Ox.

3) $y^2 = (x+1)^3,\ x = 0$ вокруг оси Oy.

4) $2y = 16 - x^2,\ y - 4 = 0,\ y = 0$ вокруг оси Oy.

7. Ряды

7.1. Числовые ряды

Определение. *Числовым рядом* называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \ , \qquad (7.1)$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n,$ – действительные или комплексные числа, называемыми *элементами ряда*, u_n – *общий элемент ряда*.

Ряд (7.1) считается заданным, если известен общий элемент ряда u_n, выраженный как функция его номера n: $u_n = f(n)$. Сумма первых n элементов ряда (7.1) называется *n-ой частичной суммой* ряда и обозначается S_n, то есть $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы:

$S_1 = u_1,$

$S_2 = u_1 + u_2,$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3,$

………………………

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$

Частичные суммы ряда образуют бесконечную последовательность частичных сумм

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$$

Определение. Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (7.1), то этот предел называют *суммой ряда* (7.1) и говорят, что ряд сходится.

Записывают

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Если предел не существует или равен бесконечности, то ряд (7.1) называют *расходящимся*. Такой ряд суммы не имеет.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \text{ показать, что ряд сходится}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

составим частичную сумму $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$;

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, тогда:

$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right)=1-\frac{1}{n+1}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Ряд сходится и его сумма равна 1.

Нахождение n-ой частичной суммы S_n и ее предела для произвольного ряда является непростой задачей. Поэтому для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные признаки сходимости.

Теорема. *(необходимый признак сходимости ряда)*. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то его общий элемент стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Условие $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости ряда.

Следствие. *(достаточное условие расходимости ряда)*. Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+5}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+5}=3\neq 0.$$

Ряд расходится.

7.2. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Необходимый признак сходимости не дает возможности судить о том, сходится данный ряд или нет.

Сходимость и расходимость ряда можно установить с помощью достаточных признаков.

Признак сравнения рядов

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат следующие теоремы.

Теорема 1. *(Признак сравнения)*.

Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (7.2) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (7.3)$$

Если для всех n выполняется неравенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда (7.3) следует сходимость ряда (7.2), из расходимости ряда (7.2) следует расходимость ряда (7.3).

Теорема 2. *(Предельный признак сравнения)*. Пусть даны два знакоположительных ряда (7.2) и (7.3). Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 < A < \infty)$, то ряды (7.2) и (7.3) сходятся или расходятся одновременно.

При использовании признаков сравнения исследуемый ряд часто сравнивается со следующими рядами:

а) бесконечная геометрическая прогрессия $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, при $|q| < 1$ – сходится, при $|q| \geq 1$ – расходится;

б) гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится;

в) обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, при $\alpha > 1$ – сходится, при $\alpha \leq 1$ – расходится.

Признак Даламбера

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Радикальный признак Коши

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Интегральный признак Коши

Положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$ сходится или расходится, если, соответственно, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

7.3. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение. *Знакочередующимся рядом* называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \qquad (7.4)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости.

Теорема. *(признак Лейбница).*

Знакочередующийся ряд (7.4) сходится, если:

1) последовательность абсолютных величин элементов ряда монотонно убывает, т.е. $u_1 > u_2 > \ldots + > u_n > \ldots$;

2) общий элемент ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда (7.4) удовлетворяет неравенствам

$0 < S < u_1$.

Ряды, для которых выполняются условия теоремы Лейбница, называются *лейбницевскими* (или *рядами Лейбница*).

Пример.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

1) $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, по признаку Лейбница ряд сходится.

Знакопеременные ряды

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Определение. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных элементов, называется *знакопеременным*.

Для знакопеременных рядов имеет место следующий общий достаточный признак сходимости.

Теорема. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + \ldots \qquad (7.5)$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \qquad (7.6)$$

составленный из модулей элементов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (7.5), то это не означает, что будет сходиться ряд (7.6).

Пример.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Это знакочередующийся ряд, который по признаку Лейбница сходится. Однако ряд из модулей $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (гармонический).

Условно сходящиеся ряды

Определение. Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если ряд, составленный из модулей его элементов, сходится.

Определение. Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей, расходится.

Пример.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$ – абсолютно сходится, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ – сходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ – сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится, следовательно данный ряд условно сходится.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. Если ряд абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд, полученный из него перестановкой элементов, также сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд.

2. Абсолютно сходящиеся ряды с суммами S_1 и S_2 можно почленно складывать (вычитать). В результате получается абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна S_1+S_2 (S_1-S_2).

3. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с суммами S_1 и S_2 есть абсолютно сходящийся ряд, сумма которого равна $S_1\cdot S_2$.

В случае условно сходящихся рядов соответствующие утверждения не имеют места.

7.4. Степенные ряды

Определение. Ряд, элементами которого являются функции от x, называется *функциональным*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{7.7}$$

Придавая x определенное значение x_0, получим числовой ряд: $u_1(x_0) + u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$, который может быть как сходящимся, так и расходящимся. Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* ряда; если же ряд расходится – *точкой расходимости* функционального ряда.

Определение. Совокупность числовых значений аргумента x, при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости.*

В области сходимости функционального ряда его сумма является функцией от $x: S = S(x)$. Определяется она в области сходимости равенством

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x)+\ldots+u_n(x)$ – частичная сумма ряда.

Определение. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots, \tag{7.8}$$

где x – независимая переменная, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – вещественные числа, называемые коэффициентами ряда.

При $x = 0$ все элементы ряда (7.8), кроме первого, оказываются равными нулю; поэтому при $x = 0$ сумма ряда существует и равна a_0. Другими словами, всякий ряд (7.8) сходится при $x = 0$. Для ряда (7.8) среди значений переменной x, при которых он сходится, есть и отличные от нуля.

Теорема. Для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что ряд абсолютно сходится для $|x| < R$ и ряд расходится для $|x| > R$.

Число R называется *радиусом сходимости ряда*.

Область сходимости ряда представляет собой промежуток от $-R$ до R, лишь о концах его нельзя сделать общего утверждения: там может быть как сходимость, так и расходимость.

Для степенного ряда (7.8) радиус сходимости находится по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Свойства степенных рядов

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда является непрерывной функцией в интервале $(-R; R)$.

2. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, имеющие радиусы сходимости соответственно R_1 и R_2 можно почленно складывать, вычитать и умножать.

3. Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n. \qquad (7.9)$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \qquad (7.10)$$

Ряд (7.10) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (7.9).

4. Степенной ряд можно почленно интегрировать на каждом отрезке, расположенном внутри интервала сходимости. При этом для ряда (7.9) при $-R < a < x < R$ выполняется равенство

$$\int_a^x S(t)\,dt = \int_a^x a_0\,dt + \int_a^x a_1 t\,dt + \ldots + \int_a^x a_n t^n\,dt + \ldots \qquad (7.11)$$

Ряд (7.11) имеет тот же радиус сходимости, что и ряд (7.9).

7.5. Разложение функций в степенные ряды

Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ раскладывается в степенной ряд

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \qquad (7.12)$$

то коэффициенты этого ряда определяются по формулам

$$a_0 = f(0), a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Подставляя выражения коэффициентов в равенство (7.12), получаем

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots. \quad (7.13)$$

Ряд, стоящий в правой части формулы (7.13), называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

При разложении функции в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, |x| < +\infty; \quad (7.14)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, |x| < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, |x| < +\infty; \quad (7.15)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots +$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \le 1; \quad (7.16)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + \cdots, -1 < x < 1, \quad (7.17)$$

где α – любое вещественное число.

Пример.

Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Воспользуемся формулой (7.14).

Положим $t = -x^2$, тогда $e^{-x^2} = e^t$. Имеем

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \cdots.$$

При $t = -x^2$ находим искомое разложение

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \cdots,$$

справедливое, очевидно, для всех значений x.

Определение. *Рядом Фурье* функции $f(x)$, определенной и интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x), \tag{7.18}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\,x\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\,x\,dx.$$

Если $f(-x) = f(x)$, т.е. $f(x)$ – функция четная, то $b_n = 0$ и

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\,x\,dx.$$

Если $f(-x) = -f(x)$, т.е. $f(x)$ – функция нечетная, то $a_n = 0$ и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,x\,dx.$$

Задания для самостоятельной работы

№ 1. Написать первые четыре элемента ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n+n}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n+3}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{n^2+5}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{2^{n+1} \cdot n}$.

№ 2. Найти формулу для общего элемента ряда.

1) $\frac{10}{7}+\frac{100}{9}+\frac{1000}{11}+\frac{10\,000}{13}+\cdots$ 2) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$

3) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ldots$ 4) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$

5) $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$ 6) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+\cdots$

№ 3. Исследовать сходимость рядов, пользуясь признаком сравнения.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2+2}}$. 8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5+2n^3+3}$.

№ 4. Исследовать сходимость рядов, пользуясь предельным признаком сравнения.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^5}{n^7-4n^2+1}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{3n^4-n^2+2}}$.

№ 5. Исследовать на сходимость, пользуясь признаком Коши.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^{n}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{n}$.

№ 6. Исследовать на сходимость, пользуясь признаком Даламбера.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

№ 7. Исследовать на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

№ 8. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3n}{(2n+1)^n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\ln n}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n}}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{\ln(n+1)}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(2n)^2}$.

№ 9. Определить радиус, интервал сходимости степенных рядов.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2-1}}{n}x^{n^2}$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot(x-2)^n$.

№ 10. Разложить в ряд Маклорена функции.

1) $f(x)=\sin x^2$. 2) $f(x)=\sin^2 x$.

3) $f(x)=x^3\cos x$. 4) $f(x)=\ln(1-x^2)$.

№ 11. Разложить в ряд Фурье функции на отрезке $[-\pi,\pi]$.

1) $f(x)=\sin x$. 2) $f(x)=x^2$.

3) $f(x)=x+\pi$. 4) $f(x)=2x+3$.

Контрольные вопросы

1 раздел. Элементы линейной алгебры

1. Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами, их свойства.
2. Определители квадратных матриц, свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя. Теорема о разложении определителя по элементам строки (столбца).
3. Обратная матрица. Алгоритм нахождения обратной матрицы.
4. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матриц.
5. Системы линейных уравнений: матричная запись и матричное решение систем.
6. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
7. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Исследование систем линейных уравнений на совместность.

2 раздел. Элементы векторной алгебры

8. Векторы. Линейные операции над векторами, их свойства. Линейная зависимость и линейная независимость векторов.
9. Скалярное произведение векторов, его свойства. Теорема о выражении скалярного произведения через координаты векторов. Угол между векторами.
10. Векторное произведение векторов, его свойства. Теорема о выражении векторного произведения через координаты векторов.
11. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл и свойства. Выражение смешанного произведения через координаты векторов.

3 раздел. Аналитическая геометрия на плоскости

12. Понятие об уравнении линии. Основные задачи аналитической геометрии.

13. Прямая на плоскости: уравнение прямой «в отрезках»; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через две точки, общее уравнение прямой.
14. Исследование общего уравнения прямой. Взаимное расположение прямых на плоскости: угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности.

4 раздел. Аналитическая геометрия в пространстве

15. Различные уравнения плоскости в пространстве.
16. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.
17. Различные уравнения прямой в пространстве.
18. Угол между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между двумя прямыми.
19. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Пучок плоскостей.
20. Угол между прямой и плоскостью. Взаимное расположение прямой и плоскости.

5 раздел. Введение в математический анализ

21. Понятие последовательности. Свойства и действия над последовательностями.
22. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
23. Понятие функции. Способы задания функции.
24. Основные характеристики функций.
25. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Замечательные пределы.
26. Основные теоремы о пределах. Раскрытие неопределенностей различных типов.
27. Непрерывность функции в точке. Основные теоремы о непрерывных функциях. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Классификация точек разрыва функции.

28. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, её геометрический и механический смысл. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.
29. Основные правила дифференцирования. Производная сложной и обратной функций.
30. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.
31. Дифференцирование неявно заданной функции. Дифференцирование параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.
32. Основные теоремы дифференциального исчисления и их геометрический смысл. Интервалы монотонности. Экстремум функции. Выпуклость графика функции, точки перегиба.
33. Общая схема исследования функции и построения её графика.

6 раздел. Основы интегрирования

34. Первообразная функция и неопределенный интеграл.
35. Свойства неопределенного интеграла. Таблица основных неопределенных интегралов.
36. Основные методы интегрирования.
37. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Оценки интегралов. Формула среднего значения.
38. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь плоской фигуры, длина дуги кривой, объем тела вращения.

7 раздел. Ряды

39. Основные сведения о числовом ряде.
40. Необходимый признак сходимости числового ряда.
41. Признак сравнения числовых рядов.
42. Предельный признак сравнения числовых рядов.
43. Признак Даламбера.

44. Признаки Коши.
45. Основные сведения о знакочередующемся ряде.
46. Признак Лейбница.
47. Абсолютная и условная сходимость.
48. Функциональные ряды. Степенной ряд.
49. Радиус и область сходимости степенного ряда.
50. Ряд Маклорена.
51. Ряд Фурье.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1.
Элементы линейной алгебры

Задание № 1. Найти значение матричного многочлена $f(A)$.

1. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $f(x) = x^3 - 3x + 2$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $f(x) = -2x^2 + 2x + 4$, где $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

4. $f(x) = -x^2 + 3x + 1$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 5 \\ -4 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

5. $f(x) = x^3 + x^2 + 5$, где $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание № 2. Вычислить определитель четвертого порядка.

1. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \\ 8 & -3 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 2 \\ 8 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & -7 \\ 4 & 0 & 8 & -5 \\ -2 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$.

Задание № 3. Решить систему уравнений с помощью обратной матрицы и по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 17, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 = -11, \\ -4x_1 - 3x_2 + 8x_3 = -2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 10, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8, \\ 5x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 + x_3 = -9, \\ 8x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

Задание № 4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Указать общее и одно частное решение.

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8, \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 21, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ 5x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, \\ -5x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 12x_4 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 12x_4 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

Контрольная работа № 2.
Элементы векторной алгебры

Задание № 1. Разложить вектор $\bar{c}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

1. $\bar{c} = (8; -1)$; $\bar{a} = (3; -3)$; $\bar{b} = (2; 2)$.
2. $\bar{c} = (7; 9)$; $\bar{a} = (5; 1)$; $\bar{b} = (8; 2)$.
3. $\bar{c} = (2; 2)$; $\bar{a} = (1; 3)$; $\bar{b} = (2; -2)$.
4. $\bar{c} = (7; 7)$; $\bar{a} = (1; 2)$; $\bar{b} = (3; 1)$.
5. $\bar{c} = (-1; -2)$; $\bar{a} = (1; -3)$; $\bar{b} = (1; 1)$.

Задание № 2. Дан треугольник с вершинами A, B, C. Вычислить длину медианы, проведенной из вершины A; внутренние углы треугольника; координаты точки M пересечения медиан треугольника и периметр треугольника.

1. $A = (7; 5; -4)$, $B = (4; 9; 1)$, $C = (6; -3; -7)$.
2. $A = (9; 3; -5)$, $B = (8; -2; 3)$, $C = (-11; 2; -4)$.
3. $A = (4; 4; 1)$, $B = (7; 1; 1)$, $C = (4; -2; 1)$.
4. $A = (-2; 1; 3)$, $B = (0; 3; 4)$, $C = (1; 5; 3)$.
5. $A = (2; 3; 1)$, $B = (4; 1; -2)$, $C = (1; 0; 2)$.

Задание № 3. На векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построен параллелограмм. Найти высоту H, опущенную из конца вектора $\bar{b}$, и площадь треугольника, образованного этой высотой и сторонами параллелограмма.

1. $\bar{a} = (2; -1; 7)$; $\bar{b} = (1; 0; -4)$.
2. $\bar{a} = (1; -4; 0)$; $\bar{b} = (6; 3; -2)$.
3. $\bar{a} = (2; -3; 1)$; $\bar{b} = (1; -2; 3)$.
4. $\bar{a} = (3; 1; 2)$; $\bar{b} = (2; 7; 4)$.
5. $\bar{a} = (-1; 1; -1)$; $\bar{b} = (2; 6; 2)$.

Задание № 4. Дан параллелепипед с вершинами $ABCDA_1B_1C_1D_1$, построенный на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AA_1}$. Найти:

а) объем параллелепипеда;
б) площадь грани $ABCD$;
в) длину высоты, проведенной из вершины A_1 на основание $ABCD$;
г) угол между ребром AB и диагональю BD_1.

1. $\overline{AB} = (1; -2; 1)$, $\overline{AD} = (3; 2; 1)$, $\overline{AA_1} = (1; 0; -1)$.
2. $\overline{AB} = (2; 1; -3)$, $\overline{AD} = (1; 2; 1)$, $\overline{AA_1} = (1; -3; 1)$.
3. $\overline{AB} = (1; 2; 3)$, $\overline{AD} = (2; 4; 1)$, $\overline{AA_1} = (2; -1; 0)$.
4. $\overline{AB} = (1; -4; 0)$, $\overline{AD} = (6; 3; -2)$, $\overline{AA_1} = (1; -2; 2)$.
5. $\overline{AB} = (7; 7; -7)$, $\overline{AD} = (11; 7; -1)$, $\overline{AA_1} = (9; 5; -10)$.

Контрольная работа № 3.
Аналитическая геометрия на плоскости

Задание № 1. Даны вершины параллелограмма $ABCD$. Найти координаты четвертой вершины D и точку пересечения диагоналей M.

1. $A = (-2; 5)$, $B = (2; 7)$, $C = (-4; -3)$.
2. $A = (1; 3)$, $B = (4; -1)$, $C = (-1; 1)$.
3. $A = (1; 5)$, $B = (4; 1)$, $C = (13; 10)$.
4. $A = (-2; 1)$, $B = (2; 2)$, $C = (4; -4)$.

5. $A = (-2; 4),\ B = (2; 2),\ C = (5; 5)$.

Задание № 2. Найти прямоугольные координаты точки A.

1. $A = (3; 0)$.
2. $A = \left(2; -\frac{\pi}{3}\right)$.
3. $A = \left(5; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. $A = \left(0; -\frac{\pi}{4}\right)$.
5. $A = \left(1; \frac{2}{3}\pi\right)$.

Задание № 3. Найти полярные координаты точки B.

1. $B = (-3; 3)$.
2. $B = (0; -5)$.
3. $B = (-2; -2)$.
4. $B = (-4; 0)$.
5. $B = \left(2\sqrt{3}; 2\right)$.

Задание № 4. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки, представить его в различных видах: с угловым коэффициентом; в отрезках; в виде нормального уравнения и определить на каком расстоянии от начала координат она находится.

1. $A = (0; 2),\ B = (-3; 7)$.
2. $A = (2; 1),\ B = (4; 1)$.
3. $A = (1; 1),\ B = (-2; 3)$.
4. $A = (2; 3),\ B = (-4; -1)$.
5. $A = (-2; 2),\ B = (-1; 6)$.

Задание № 5. Даны вершины треугольника ABC. Найти:

а) длины сторон AC и BC;

б) уравнения прямых BC и AC;

в) уравнение высоты BD;

г) уравнение медианы AE;

д) уравнение биссектрисы CF;

е) угол C.

1. $A=(2;-2),\ B=(3;5),\ C(6;1)$.
2. $A=(3;-4),\ B=(-2;0),\ C(2;2)$.
3. $A=(-4;-2),\ B=(0;1),\ C(2;-1)$.
4. $A=(3;5),\ B=(6;6),\ C(5;3)$.
5. $A=(-1;4),\ B=(2;3),\ C(5;8)$.

Задание № 6. Написать уравнение окружности, если:

а) дан центр в точке C и радиус R;

б) дан центр в точке C и окружность проходит через точку M;

в) даны координаты концов диаметра A и B.

1. а) $C(-2;3),\ R=4$;
   б) $C(4;2),\ M(0;3)$;
   с) $A=(-5;6),\ B=(-5;-6)$.
2. а) $C(-2;0),\ R=2$;
   б) $C(-4;5),\ M(-1;1)$;
   с) $A=(0;4),\ B=(6;0)$.
3. а) $C(-1;2),\ R=5$;
   б) $C(-4;-2),\ M(4;0)$;
   с) $A=(-3;-3),\ B=(5;-2)$.
4. а) $C(-1;3),\ R=3$;
   б) $C(0;2),\ M(6;0)$;
   с) $A=(1;-1),\ B=(-1;-3)$.
5. а) $C(7;3),\ R=6$;
   б) $C(2;6),\ M(-4;-1)$;
   с) $A=(-2;-2),\ B=(4;-2)$.

Задание № 7. Дано уравнение эллипса. Найти:

а) длины его полуосей;

б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет эллипса;

г) уравнение директрис и расстояние между ними.

1. $24x^2 + 49y^2 = 1176$.
2. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.
3. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.
4. $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$.
5. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

Задание № 8. Дано уравнение гиперболы. Найти:

а) длины его полуосей;

б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет гиперболы;

г) уравнение асимптот и директрис.

1. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.
2. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$.
3. $\frac{(x-5)^2}{40} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$.
4. $\frac{(y+3)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$.
5. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Задание № 9. Дано уравнение параболы. Найти:

а) координаты фокуса;

б) уравнение директрисы;

в) координаты вершины;

г) построить график.

1. $y = -2x^2 + 8x - 5$.
2. $x^2 = 4y$.
3. $y^2 = 4x$.
4. $y = 4x^2 + 8x + 7$.
5. $x = y^2 + 3y$.

Контрольная работа № 4.
Аналитическая геометрия в пространстве

Задание № 1. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точку M и параллельной векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

б) проходящей через точки M_1 и M_2 параллельно вектору $\bar{n}$;

в) проходящей через три точки M_1, M_2, M_3.

1. а) $M(2;3;-4), \bar{a} = (-3;2;-1), \bar{b} = (0;3;1)$;
   б) $M_1(3;-1;2), M_2(-1;2;5), \bar{n} = (-4;3;3)$;
   в) $M_1(-2;-3;4), M_2(-3;2;-1), M_3(0;3;1)$.
2. а) $M(1;-1;0), \bar{a} = (0;2;3), \bar{b} = (-1;4;2)$;
   б) $M_1(2;0;-1), M_2(-3;1;3), \bar{n} = (1;2;-1)$;
   в) $M_1(1;0;-1), M_2(2;2;3), M_3(0;-3;1)$.
3. а) $M(1;-2;3), \bar{a} = (2;-1;2), \bar{b} = (3;2;-1)$;
   б) $M_1(1;1;1), M_2(-1;-1;-1), \bar{n} = (2;-1;4)$;
   в) $M_1(-2;0;0), M_2(0;4;0), M_3(0;0;5)$.
4. а) $M(2;-2;5), \bar{a} = (1;-1;-3), \bar{b} = (1;1;1)$;
   б) $M_1(1;2;3), M_2(-2;-3;4), \bar{n} = (2;-1;5)$;
   в) $M_1(4;2;3), M_2(2;0;1), M_3(1;2;-4)$.
5. а) $M(2;-8;-1), \bar{a} = (1;-3;2), \bar{b} = (1;-2;1)$;
   б) $M_1(3;1;1), M_2(1;-4;-2), \bar{n} = (3;-1;-6)$;
   в) $M_1(2;-4;5), M_2(-3;1;8), M_3(6;1;-3)$.

Задание № 2. Найти угол между прямой и плоскостью.

1. $\frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-6}{3};\ x - 2y + 3z + 4 = 0.$
2. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-11}{6};\ 2x + z - 1 = 0.$
3. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{2};\ 2x + 6y + z + 3 = 0.$
4. $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{3};\ 8x + 2y + 6z - 13 = 0.$
5. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2};\ 2y - z - 11 = 0.$

Задание № 3. Найти угол между прямыми.

1. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+6}{3}$ и $\frac{x+5}{8}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+6}{12}$.

2. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{3}$ и $\frac{x+1}{-6}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{9}$.

3. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2}$.

4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+6}{-2}$.

5. $\frac{x+4}{-8}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z+2}{4}$ и $\frac{x+1}{-4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{2}$.

Контрольная работа № 5.
Введение в математический анализ

Задание № 1. Найти пределы функций.

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$;

   б) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1-3}}$;

   г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{5x}$;

   д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^{x+5}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-4x+1}{x^3-2x^2-1}$;

   б) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$;

   г) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\operatorname{ctg} 3x$;

   д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+7}{2x-3}\right)^{x+4}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+3}{x^3+1}$;

   б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3-x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4-x-3}{4x^4+9x^3-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{2x^2+7x-15}{x^2+2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-\sqrt{4x}}{4-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}4x}{5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{6x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+2x-5}{2x^3-4x^2+11}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{2x^2-7x-15}{x^2-2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{6x+1}-5}{2-\sqrt{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sin 2x}{\cos x-\cos^3 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$.

Задание № 2. Дана функция $f(x)$, требуется:

а) найти точки разрыва;

б) найти скачок функции в точке разрыва;

в) сделать чертеж.

1. $f(x)=\begin{cases}-x,\ x\le 0,\\ x^2,\ 0<x\le 2,\\ x+1,\ x>2.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}\sin x,\ x\le 0,\\ 2x,\ 0<x<1,\\ x,\ x\ge 1.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}x+4,\ x<-1,\\ x^2+2, -1\le x<1,\\ 2x,\ x\ge 1.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}\cos x\,,\ x\le 0,\\ x^2,\ 2<x<4,\\ 4,\ x\ge 4.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}x^3,\ x\le 1,\\ x,\ 1<x<3,\\ (x+3)^2,\ x\ge 3.\end{cases}$

Задание № 3. Найти производные функций.

1. 1) $y=\frac{(3x-4)\sqrt{x}}{x^3}$;

2) $y=e^{x^2-2x+1}$;

3) $y=\ln\left(x\cdot\sin x\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$;

4) $y=\sqrt{3}\ \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right)$;

5) $y=\operatorname{arctg}\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)$;

6) $y=e^{\sqrt{1+\ln x}}$;

7) $y=\ln^5\sin x$;

8) $y=(\ln(1+x))^{2x}$;

9) $x_y-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=0$.

2. 1) $y=\frac{(x^3-1)\sqrt{x}}{x+1}$;

2) $y=\operatorname{tg}\sin\sqrt{x}$;

3) $y=\ln\arccos 2x$;

4) $y=e^{x^2\operatorname{ctg}3x}$;

5) $y=a^{\sqrt[3]{\cos x}\cdot\operatorname{tg}^2 3x}$;

6) $y=\sqrt[5]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$;

7) $y=\operatorname{arcctg}^2\frac{1}{x}$;

8) $y=x^{2x}5^x$;

9) $x\ln y+y\ln x=0$.

3. 1) $y=\frac{x^2\sqrt{x}}{x^2+1}$;

2) $y=\ln^2\cos 4x$;

3) $y = \operatorname{arctg}\ln(5x+3)$;

4) $y = \operatorname{tg}\sin\cos x$;

5) $y = \ln\sin\operatorname{tg} e^{-\frac{x}{2}}$;

6) $y = x^2 \arcsin\sqrt{1-x^2}$;

7) $y = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}$;

8) $y = \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right)$;

9) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

4. 1) $y = \frac{(3x-4)\sqrt{x}}{x^3}$;

2) $y = \ln\sin 5x$;

3) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$;

4) $y = 2\ln(x^2+5) - \sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}$;

5) $y = \sqrt{1-\arccos^2 x}$;

6) $y = \sqrt[5]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$;

7) $y = e^{\sqrt[7]{x^2}}$;

8) $y = 2x + y^2 - 4\sqrt{y} = 0$;

9) $y = (\operatorname{tg} x)^{4e^x}$.

5. 1) $y = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$;

2) $y = \sqrt[5]{x^3} + 3x^4 - 6x^2 + 2x - 1$;

3) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4$;

4) $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$;

5) $y = e^x - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{x^4}{4}$;

6) $y = x\cos x$;

7) $y = x^2 - \frac{1}{2x^2}$;

8) $y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$;

9) $y = \sqrt{1+5\cos x}$.

Задание № 4. Исследовать функцию и построить ее график.

1. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;
2. $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$;
3. $y = \frac{4x^2}{x^2-1}$;
4. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$;
5. $y = \frac{e^x}{e^x-1}$.

Контрольная работа № 6.
Основы интегрирования

Задание № 1. Найти интегралы.

1. а) $\int \frac{3x^4-2x^3+5x^2-7x+8}{x^2} dx$;

   б) $\int \sin(3-8x)\, dx$;

   в) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$;

   г) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$;

   д) $\int x \ln 8x\, dx$;

   е) $\int (x+7)\, e^x dx$;

   ж) $\int \frac{x^2+3x+5}{x+4} dx$.

2. а) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^6}\right) dx$;

   б) $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+9}} dx$;

   в) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$;

   г) $\int x^2\sqrt{x^3-7}\, dx$;

   д) $\int (x^2+4x-5) \cos x\, dx$;

   е) $\int (2x-3)\, e^{2x} dx$;

   ж) $\int \frac{x^2-2}{x+6} dx$.

3. а) $\int \left(\frac{(1-\sqrt{x})^3}{x}\right) dx$;

б) $\int x \cdot \cos x^2 \, dx$;

в) $\int \frac{5x}{\sqrt{4x^2+9}} dx$;

г) $\int \sqrt{1 + 3\cos x} \cdot \sin x \, dx$;

д) $\int x \sin x \, dx$;

е) $\int x^2 \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$;

ж) $\int \frac{x+6}{x^2-2x+17} dx$.

4. а) $\int \frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}} dx$;

б) $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}$;

в) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

г) $\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x \, dx$;

д) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

е) $\int \ln^2 x \, dx$;

ж) $\int \frac{6x+7}{x^2+4x+13} dx$.

5. а) $\int \frac{x^4+x^2-6x}{x^3} dx$;

б) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos x+1}$;

в) $\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

г) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$;

д) $\int (2x+3) \cos x \, dx$;

е) $\int \ln(x^2+2) \, dx$;

ж) $\int \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x} dx$.

Задание № 2. Вычислить определенные интегралы.

1. а) $\int_1^{\sqrt{3}} x^2 \cdot \sqrt[3]{(3-x^3)^2} \, dx$;

б) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$;

в) $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^4 x} dx$.

2. а) $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$;

б) $\int_{1/2}^{1} x^2 \cdot (2x-1)^8\, dx$;

в) $\int_{0}^{3} (x-3)e^{-x}\, dx$.

3. а) $\int_{\pi/3}^{\pi} \frac{\sin x}{5-3\cos x}\, dx$;

б) $\int_{2}^{4} \frac{5x\, dx}{\sqrt{x+2}}$;

в) $\int_{0}^{1} x \cdot \ln(1+x)\, dx$.

4. а) $\int_{-1}^{2} \frac{x^4-2}{x^2+1}\, dx$;

б) $\int_{1}^{4} \frac{dx}{2+\sqrt{8x-7}}$;

в) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x \cdot \cos 4x\, dx$.

5. а) $\int_{0}^{\lg 2} 2^x \cdot 5^x\, dx$;

б) $\int_{1}^{9} \frac{dx}{5+2\sqrt{x}}$;

в) $\int_{2}^{4} x(3-x)^7\, dx$.

Задание № 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $y = x^3,\ y = x^2,\ x = -2,\ x = 1$.
2. $y = -x^2 + 6x - 5,\ y = 4,\ x = 1$.
3. $y = \frac{x}{x-3},\ y = x,\ x = -2$.
4. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6,\ y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.
5. $y = x^2 - 2x + 3,\ y = 3x - 1$.

Задание № 4. Вычислить длину дуги кривой.

1. $y = 1 - \ln\sin x\,,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.
2. $x = \ln\cos y\,,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{3}$.
3. $y = \ln x$, от точки $A(1;0)$ до точки $B\left(\sqrt{3};\ln\sqrt{3}\right)$.
4. $y = 4 - x^2, -2 \le x \le 2$.
5. $y = \sqrt{x-1}$, от точки $A(1;0)$ до точки $B(2;1)$.

Задание № 5. Вычислить объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $2x - y - 2 = 0,\ y = 0,\ x = 3,$ вокруг оси Ox.
2. $y = 2x + 1,\ y = x + 4,\ x = 0,\ x = 1,$ вокруг оси Ox.
3. $y = 3 + \sqrt{x},\ y = 3 - \sqrt{x},\ y = x + 1,$ вокруг оси Oy.
4. $x = 2,\ y = -\ln x,$ ось Ox, вокруг оси Oy.
5. $y = \frac{2}{1+x^2},\ y = x^2,$ вокруг оси Oy.

Контрольная работа № 7. Ряды

Задание № 1. Исследовать на сходимость числовые ряды, используя:

а) предельный признак сравнения;

б) признак Даламбера;

в) признак Коши;

г) интегральный признак Коши.

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{18n^3-5n^2+3}{n^{11}+n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$;
   в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{9n-2}\right)^{n/3}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)^3}$.
2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+7n+11}{n^{10}+2n+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^2}$;
   в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{5^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^2}$.
3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+7}{n^5+n^3+n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-2}$;
   в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n+41}\right)^{2n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+3)^4}$.
4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{22n^3-2n+1}{6n^6+5n+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$;
   в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n+41}\right)^{2n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+n)^{-1}}{\ln(2+n)}$.
5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+8}{7n^{12}+2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n \cdot (n-1)!}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2-4}$.

Задание № 2. Исследовать на условную и абсолютную сходимость ряд.

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln^2 n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^4}$.
3. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Задание № 3. Найти радиус и область сходимости степенного ряда.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty}x^n\, n!$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n 10^n}{n!}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2^n+1)^2}$.

Задание № 4. Разложить функцию в ряд Маклорена.

1. $f(x)=x\cos 2x$.
2. $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$.
3. $f(x)=\ln(1-x^2)$.
4. $f(x)=\frac{1}{1+3x^2}$.
5. $f(x)=\frac{6x}{2-3x}$.

Задание № 5. Разложить функцию в ряд Фурье.

1. $f(x) = x^2$ в интервале $(0; 2)$.
2. $f(x) = x - 3$ в интервале $(0; 3)$.
3. $f(x) = \pi - x$ в интервале $(0; \pi)$.
4. $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ на отрезке $(-\pi; \pi)$.
5. $f(x) = 2x - 1$ в интервале $(0; 1)$.

Литература

1. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. Пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. – Москва: Издательство АСТ: Мир и Образование, 2016. – 816 с.
2. Гусак, А.А. Высшая математика. Т.1: Учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 544 с.
3. Курс высшей математики. 1 часть. / М.К. Беданоков, Т.И. Дёмина, Г.В. Шамбалева, О.П. Шевякова. – Майкоп: Изд-во ИП Магарин О.Г., 2013. – 384 с.
4. Курс высшей математики. 2 часть. М.К. Беданоков, С.К. Куижева, Л.Н. Мамадалиева, Г.В. Шамбалева – Майкоп: Изд-во ИП Магарин О.Г., 2013. – 279 с.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2017. – 608 с.
6. Курс высшей математики [Электронный ресурс]: учебник. Ч.1 / М.К. Беданоков М.К. и др. – Майкоп: Магарин О.Г., 2013. – 384 с. – Режим доступа: http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=2000047917
7. Курс высшей математики [Электронный ресурс]: учебник. Ч.2 / М.К. Беданоков М.К. и др. – Майкоп: Магарин О.Г., 2013. – 279 с. – Режим доступа: http://lib.mkgtu.ru:8002/libdata.php?id=2000047918
8. Дёмина Т.И. Математический анализ для экономистов [Электронный ресурс]: практикум: учеб. пособие/ Т.И. Дёмина, О.П. Шевякова. – М.: ИНФРА-М, 2016. -365 с. - ЭБС «Znanium. com» - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=486418
9. Шипачев, В. С. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебник / В. С. Шипачев. - Москва : ИНФРА-М, 2015. - 479 с. - ЭБС «Znanium. com» - Режим доступа: http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469720

Составитель:
Беданокова Саида Юрьевна

Набор и вёрстка:
Змиевская Юлия Владимировна

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-АГРАРИЕВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Подписано в печать 16.03.2021. Формат бумаги 60x84/16. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Гарнитура Таймс. Усл. п.л. 8,5. Тираж 300. Заказ 005.

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
ИП Кучеренко В.О. 385008, г. Майкоп, ул. Пионерская, 403/33.
Тел. для справок 8-928-470-36-87. E-mail: slv01.maykop.ru@gmail.com