УДК 378.016:51
ББК 74.58+74.262
Т – 36

Тесликов Валерий Александрович, *кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа инженерно-экономического факультета Майкопского государственного технологического университета, тел.: 89182240720.*
Хаконова Ирина Магометовна*, кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики и системного анализа инженерно-экономического факультета Майкопского государственного технологического университета.*

РОЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ В ОБЩЕМ ПОЛЕ УЧЕБНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕКСТА

(рецензирована)

Раскрывается актуальность определений в учебном математическом тексте. Предложены знаки для обозначения определения и слова-оператора «называется». Приведены альтернативные способы построения определений одних и тех же понятий, сформулирован комплекс мер по повышению внимания к изучению определений.
Ключевые слова: постулат, определение, теорема, функция, аналитическая схема, квантование текста, слово-оператор, альтернативные подходы.

Teslikov Valerij Alexandrovich*, Candidate of Technical Sciences, associate professor of the chair of higher mathematics and systematic analysis, of the Engineering and Economics Faculty of Maikop State Technological University, tel.: 89182240720.*
Khakonova Irina Magometovna*, candidate of pedagogical sciences, associate professor of the chair of higher mathematics and systematic analysis, of the Engineering and Economics Faculty of Maikop State Technological University.*

THE ROLE OF DEFINITIONS IN THE GENERAL FIELD OF SCHOOL MATHEMATICAL TEXT

The article reveals the relevance of the definitions in the learning of mathematical texts. Signs for the definition and the word-operator "is" have been proposed. Alternative ways of constructing the definitions of the same concepts have been presented, a set of measures to increase attention to the study definitions has been formulated.
Keywords: postulate, definition, theorem, function, analytical scheme, quantization of the text, word-operator, alternative approaches

В преподавании вузовской математики проявляется стабильная тенденция: студенты быстрее усваивают конкретные алгоритмы решения задач, чем теоретический материал, изложенный в основном в форме определений и теорем. Актуальными методическими приемами являются комментарии о связях математических соотношений с их материальными аналогами, о практических потребностях в решении математических задач; примеры с использованием нематематической лексики [4].

Однако, математика имеет специфический объект исследований, не совпадающий ни с каким другим, - количественные отношения [1,7]. Теория трансцендентых чисел, которым является число «π», разработана только в XIX в. Таким образом, была создана строгая математическая модель колеса, которое было изобретено в 4 тыс. до н. э. А в Америке колесо стало известным только с появлением европейцев [1,11].

В любой теории набор определений является ее обязательной частью. В математике роль определений выше, чем во всех других областях знаний: данная информация используется в количественных соотношениях и алгоритмах, влияет на результаты решений.

Высказано мнение, что изложение математической теории может быть реализовано без определений. При этом проводится анализ фрагмента школьного курса геометрии [13]. Но уже в этом тексте констатируется, что отказ от определений усложняет и деформирует математический текст.

Преподавание вузовской математики реализуется с учетом тезиса, что неопределяемые понятия, постулаты (аксиомы, правила вывода) студенты знают из школьного курса. Однако, именно логическая цепочка: «неопределяемые понятия» - «аксиомы, правила вывода» - «определения» является весьма актуальной как при изложении, так и при усвоении материала. Стоимость ошибки здесь гораздо выше, чем при решении конкретных задач.

Отсутствует традиция формулировки в учебной и справочной литературе перечня неопределяемых понятий и формулировок постулатов. В справочнике [2] приведен набор аксиом действительных чисел, но отсутствуют аксиомы геометрии, а в справочнике [3] термина «аксиома» нет в алфавитном указателе и во всем тексте. Из неопределяемых понятий в учебниках [9,10] упоминается только «множество».

Определение – математическое предложение, предназначенное для введения нового понятия на основе уже известных понятий [13]. Известными считаются понятия как уже определенные, так и неопределяемые. В структуру определений входят видовые отличия (ключевой элемент), аксиомы, слово–оператор «называется», для которого предлагается ввести знак «⎯∕». Совокупность определений раздела математического текста можно представить в виде логической цепочки, которая показывает, что новые определения образуются из ранее сформулированных определений и дополнительных видовых отличий. Термин «определение» в дальнейшем будем обозначать знаком «О.».

Аналитическая схема цепочки представлена на рис.1 [6]. Так при определении понятия «функция» использованы неопределяемое понятие «множество», понятие числа и переменной величины. Видовым отличием является категория соответствия [8].

Особенность определения по сравнению с теоремой в том, что его доказывать не нужно. Исследователь, преподаватель и обучающийся имеют некоторую свободу в формулировке определений. Их легче, чем теоремы понять, запомнить, изобразить схематически, проиллюстрировать примером. Но существуют и специфические трудности в построении и изучении определений.

Не любой текст в учебнике, учебном пособии, имеющий структуру или наименования определения, актуален, он может только загромождать, деформировать информационное пространство или быть ошибочным. Например, то, что в [10] называется сложной функцией, или суперпозицией
функций, в [12] определяется как композиция функций. В то же время в [9] композицией называется сумма, разность, произведение или частное двух функций. Употребление термина «композиция» в [12] противоречит общепринятому этимологически точному термину «суперпозиция». Определение «композиция функций», введенное в [9], можно считать избыточным, так как оно не является необходимым для доказательства теорем о пределах, непрерывных и дифференцируемых функциях, а четыре арифметических действия используются в определении понятия «элементарная функция».

На приведенной схеме (Рис. 1) определения образуются по вертикали, например, понятие «непрерывность» формулируется с использованием уже сформулированного понятия «предел» и т.д.

Имеется и другой способ образования определений, когда происходит детализация понятия одного уровня (по горизонтали). При этом используем понятие функции одной переменной, возрастающей на отрезке, полуоткрытом интервале, открытом интервале, последовательности точек и т.д., например:

0.1. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a;b]$, ⎯∕ возрастающей на $[a;b]$, если $\forall x_1,x_2\in[a;b]$ $(x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)< f(x_2))$.

0.2. Функция $f(x)$, определенная на интервале $(a;b)$, возрастающей на $(a;b)$, если $\forall x_1,x_2 \in (a;b)\ (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

Рассмотрим фрагменты учебного текста «Конспектов лекций» [10] с точки зрения формулировки определений. Так, в п. 14.3. введено понятие интервала монотонности (возрастания), но нет понятия отрезка монотонности (возрастания), как это определено в 0.1. В данном случае нет ошибки, констатируется только неполнота набора определений. Рассмотрим другие фрагменты.

В начале главы VI сформулировано определение: «Комплексным числом z называется выражение вида $z=x+iy$, где x и y – действительные числа, а i – так называемая мнимая единица, $i^2=-1$».

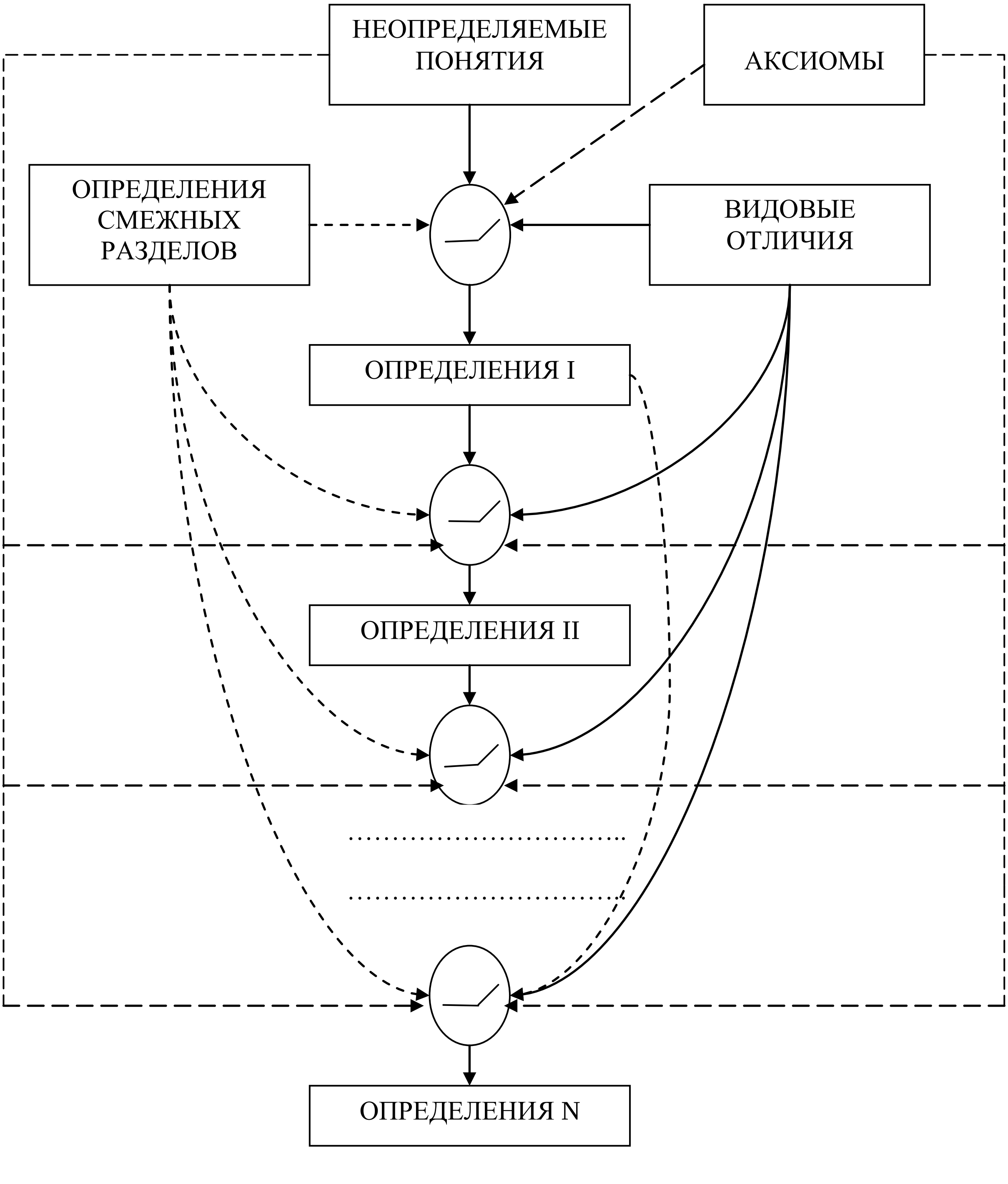

Рис. 1 – Схема определений

И в той же главе сказано, что из формулы произведения двух комплексных чисел следует важнейшее соотношение: $i^2=-1$. Таким образом, через логическую цепочку: «определение комплексного числа (в алгебраической форме)» - «определение произведения двух комплексных чисел» - «ограничения на значения действительных и мнимых частей сомножителей» - «выполнение операции умножения» доказывается то, что констатируется (принимается без доказательства) в определении, то есть возникает порочный круг [13]. Показательно, что порочный круг в этом тексте на пространстве нескольких строчек реализуется дважды: вначале дается определение произведения двух комплексных чисел $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$, затем как следствие получается соотношение: $i^2=-1$ (первый порочный круг) и с использованием данного соотношения выводится формула для z_1z_2, приведенная в определении (второй порочный круг).

Формула Муавра

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

названа в главе VI «важным определением», хотя в тексте «Конспекта лекций» она выводится по логической цепочке: «определение комплексного числа в тригонометрической форме» - «нахождение произведения двух комплексных чисел (с использованием формул тригонометрии о косинусе и синусе двух слагаемых)» - «наложение ограничений – равенство сомножителей» - «распространение справедливости формулы на n сомножителей». То есть вывод формулы Муавра является доказательством теоремы. О методе математической индукции, используемом при выводе формулы, в [10] не упоминается.

Если бы учебный математический текст был проквантован, то есть каждому законченному фрагменту текста был присвоен символ: «О.» - определение, «Т.» - теорема, «Л.» - лемма и т.д., то путаницы в констатации, что является определением, а что теоремой, не могло бы возникнуть. Отдельные фрагменты текста, которые не являются стандартными математическими предложениями, можно оформить как замечания («З.»).

Приведенные примеры реализуют алгоритмический способ формулировки определений. По данному способу простейшие элементарные функции $\sin x$ и $\cos x$, например, определяются с помощью геометрических понятий, измерения дуг и отрезков в круге. Но, зная основные положения дифференциального исчисления: $\varphi= \sin x$ и $\psi= \cos x$, можно определить как функции, удовлетворяющие одному и тому же уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\varphi,\ \frac{d^2\psi}{dx^2}=-\psi$$

по различным начальным условиям

$$\varphi(0)=0,\ \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}=1;\ \psi(0)=1,\ \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{x=0}=0. \quad [5]$$

Такой способ формулировки определений связан с применением тригонометрических функций к описанию физических процессов – колебаний.

Реализуя второй способ (с использованием алгоритмов дифференциального исчисления), постоянную функцию можно определить как функцию, у которой производная равна нулю во всей области определения, а значение функции в любой точке области определения равно конкретному числу. Линейную функцию по этому способу можно определить как функцию, у которой первая производная равна постоянной величине во всей области определения, а значение функции в фиксированной точке области определения равно конкретному числу.

Особая роль определений демонстрируется тем, что в универсальном справочном издании [1] приведен основной массив определений вузовской математики. Например, для раздела математического анализа от введения понятия функции до формулировки определений производной и дифференциала содержатся статьи: «Постоянная величина», «Переменная величина», «Бесконечно большая величина», «Бесконечно малая величина», «Интервал», «Отрезок», «Последовательность», «Предел последовательности», «Непрерывная функция», «Обратная функция», «Сложная функция», «Элементарная функция», «График функции». В то же время в БЭС отсутствуют статьи о теоремах математического анализа.

Целью изучения вузовской математики является не только умение решать конкретные алгоритмы, но и приобретение навыков освоения как более сложного материала изучаемых разделов, так и новых разделов; способность нахождения необходимой информации в учебниках, справочниках, статьях. Достижению данной цели должно способствовать повышенное внимание к изучению определений, реализуемое с помощью следующего комплекса мер:

1) формирование с самого начала обучения интереса студентов к определениям; разработка специальных упражнений по выделению определений из общего текста, выявлению структуры определений, построению логических цепочек;

2) внимание в самом начале изучения вузовской математики к неопределяемым понятиям, постулатам (аксиомам и правилам вывода);

3) инвентаризация преподавателями текстов учебной, справочной и методической литературы, выделение в них определений, проверка их актуальности, строгости формулировки; привлечение к этой работе студентов;

4) использование для определений в конспектах лекций и методических пособиях специального знака «О.», слова–оператора «называется __/», знаков математической логики, общепринятых сокращений;

5) применение методических подходов, реализуемых для определений, ко всему учебному математическому тексту, прежде всего – к теоремам.

Использование предлагаемых мер станет возможным, если студенты будут не конспектировать, а работать на занятиях и во время самоподготовки с предварительно изготовленными преподавателем схемами и текстами, содержащими основной объем изучаемого теоретического материала. Работа с текстами кроме нахождения в них ответов на конкретные вопросы программы будет включать анализ текстов, выделение в них различных информационных срезов, в том числе среза определений, уточнение и дополнение содержания текстов с использованием учебной и справочной литературы, диалог преподавателя и студентов. Технология построения таких схем и текстов, а также методика работы с ними изложены в [6].

Литература:

1. Большой энциклопедический словарь / ред. А.М. Прохоров. 2-е изд. М.: Большая Российская Энциклопедия; СПб.: Норикт, 1997. 1456 с.: ил.

2. Бернштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980. 976 с.: ил.

3. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике для вузов и втузов. 14-е изд. М.: Джангар: Большая медведица, 2001. 864 с.: ил.

4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов. Изд. 7-е. М.: Высшая школа, 2001. 479с.: ил.

5. Зельдович Я.Б., Яглом И.М. Высшая математика для начинающих физиков и техников [Текст]. – М.: Наука, 1982. – 512с.: ил.

6. Коблева Р.Б., Тесликов В.А. Методическое пособие по математическому анализу. Майкоп: Глобус, 2008. 25с.: ил.

7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) : пер. с англ. / под ред. Н.Т. Арамановича. М.: Наука, 1973. 832 с.: ил.

8. Математический энциклопедический словарь / гл. ред. Ю.В.Прохоров. М.: Советская Энциклопедия, 1988. 847 с.: ил.

9. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. В.Н. Ермакова. М.: ИНФА – М, 2001. 656с.: ил.

10. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис – пресс, 2006. 608с.: ил.

11. Страны и народы. Общий обзор Латинской Америки. Средняя Америка / редкол.: В.В. Вольский (отв. ред.) [и др.]. М.: Мысль, 1981. 335 с.: ил.

12. Щипачев В.С. Высшая математика: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1998. 475с.: ил.

13. Энциклопедический словарь юного математика / сост. А.П. Савин. М.: Педагогика, 1989. 352с.: ил.