

УДК 664.7:519.61

ББК 36.821

П-63

*Подгорный Сергей Александрович*, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2;

*Косачев Вячеслав Степанович*, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологического оборудования и систем жизнеобеспечения ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2, тел.: 8(861)275-22-79;

*Кошевой Евгений Пантелеевич*, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологического оборудования и систем жизнеобеспечения ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2, тел.: 8(861)275-22-79;

*Схалыхов Анзаур Адамович*, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры технологий, машин и оборудования пищевых производств, декан технологического факультета ФГБОУ ВПО «Майкопский государственный технологический университет», 385000, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 191, тел.: 8(8772)57-04-12.

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛОПРОВОДНОСТИ  
ДЛЯ ЗЕРНА ЭЛЛИПСОВИДНОЙ ФОРМЫ И ОБОСНОВАНИЕ  
РЕШЕНИЯ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ**  
(рецензирована)

*В работе принято использование потенциала переноса для описания внутреннего процесса при сушке зерна. Основное внимание обращено на форму зерна, которая принята эллипсовидной. Обоснована схема численного решения задачи потенциалопроводности.*

*Ключевые слова: потенциалопроводность, эллипсовидная форма, изопотенциальные поверхности, метод сеток*

*Podgorny Sergey Alexandrovich*, Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Production Process Automation of FSBEI HPE «Kuban State Technological Technology», 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str.;

*Kosachev Vyacheslav Stepanovich*, Doctor of Technical Sciences, professor, professor of the Department of Technological Equipment and Life Support Systems of FSBEI HPE «Kuban State Technological University», 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str., tel.: 8 (861) 275-22-79;

*Koshevoy Eugenii Panteleevich*, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Technological Equipment and Life Support Systems of FSBEI HPE «Kuban State Technological University», 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str., tel.: 8 (861) 275-22-79;

*Skhalyakhov Anzaur Adamovich*, Doctor of Technical Sciences, associate professor, professor of the Department of Technologies, Machinery and Equipment for Food Production, Dean of the Technological Faculty of FSBEI HPE «Maikop State Technological University», 385000, Republic of Adygea, Maikop, 191 Pervomayskaya Str., 191, tel.: 8 (8772) 57-04-12.

## PROBLEM OF POTENTIAL CONDUCTIVITY FOR ELLIPSOID GRAIN AND SOLVING IT BY NUMERICAL METHODS

(Reviewed)

*The article considers the use of the transfer potential to describe the internal process in drying grain. Special attention is paid to the ellipsoid form of grain. The scheme of numerical solution of the problem of potential conductivity has been grounded.*

*Keywords: potential conductivity, elliptical shape, isopotential surface, grid method.*

Для исследования потенциалопереноса [1] внутри зерна была рассмотрена реальная геометрия семени. В связи с этим решалась модельная задача переноса в однородной по объему трёхмерной фигуре, копирующей усредненную по геометрии семянку риса, которую можно принять в виде эллипсоида [2].

Принято [3], что эллипсоид конечных размеров, соответствующий габаритам зерна (например, по экспериментальным данным для риса – среднеарифметическая длина составляет  $l_{cp}=7,63$  мм, ширина  $a_{cp}=2,06$  мм, толщина  $b_{cp}=1,68$  мм) переносит потенциал с учетом потенциалопроводности материала  $a_{\Theta}$ , в соответствии с ограниченными условиями первого рода согласно следующему дифференциальному уравнению частных производных [4]:

$$\frac{\partial \Theta(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a_{\Theta} \cdot \left[ \frac{\partial^2 \Theta(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right] \quad (1)$$

Трёхмерное поле  $\Theta(x, y, z, \tau)$  определяемое уравнением (1) является четной (симметричной) функцией относительно центра эллипсоида и его осей, и решение можно ограничить сегментом эллипсоида, образованным ортогональными плоскостями, проходящими через центр эллипсоида и соответствующие оси эллипсоида.

По главным осям фигура усреднённой семянки была покрыта трехмерной регулярной сеткой. В узлах сетки было произведено решение задачи переноса. Для этого уравнение переноса заменили конечными разностями, которые позволили заменить дифференциальное уравнение на его алгебраический аналог. Данные уравнения были записаны для каждого узла и получена система линейных алгебраических уравнений, которую решали численно явным методом. Значение потенциала на новом шаге по времени вычислялось по семи точечной схеме в конечных разностях. При этом общее число узлов составляло  $104*28*17$ . В результате было получено поле, которое и легло в основу геометрии изопотенциальных поверхностей, изображённых на рисунке 1 в виде разрезов по главным осям трехосного эллипсоида.

Процессы переноса потенциалов (тепла, массы и давления) при сушке, как известно, происходят ортогонально изопотенциальным поверхностям. Зная данное обстоятельство и, учитывая геометрию такой поверхности, можно обеспечить облегчение вывода соответствующего уравнения переноса [5].

Рассмотрим постановку задачи понижения размерности использующую выявленные зависимости в процессе нестационарного переноса в трехмерном теле сложной конфигурации (в эллипсоиде).

Для решения задачи (1) выделяем систему изопотенциальных поверхностей внутри рассматриваемого объема эллипсоида, ортогонально к которым происходит перенос. Значительно облегчается вывод соответствующего уравнения переноса при знании геометрии такой поверхности. Например, имеем семейство изопотенциальных

поверхностей, зависящих от одной переменной  $\xi$ , т.е. объем и площадь этих поверхностей представлен следующими соотношениями:

$$S=S(\xi), \quad V=V(\xi). \quad (2)$$

Уравнение баланса в этом случае имеет вид:

$$-q_{\xi} S'_{\xi} d\xi - S(\xi) (\partial q / \partial \xi) \cdot d\xi = V'_n d\xi (\partial \Theta / \partial \tau), \quad (3)$$

где  $V'_n$  – производная объема по нормали к изопотенциальной поверхности, м<sup>2</sup>.

Рис. 1

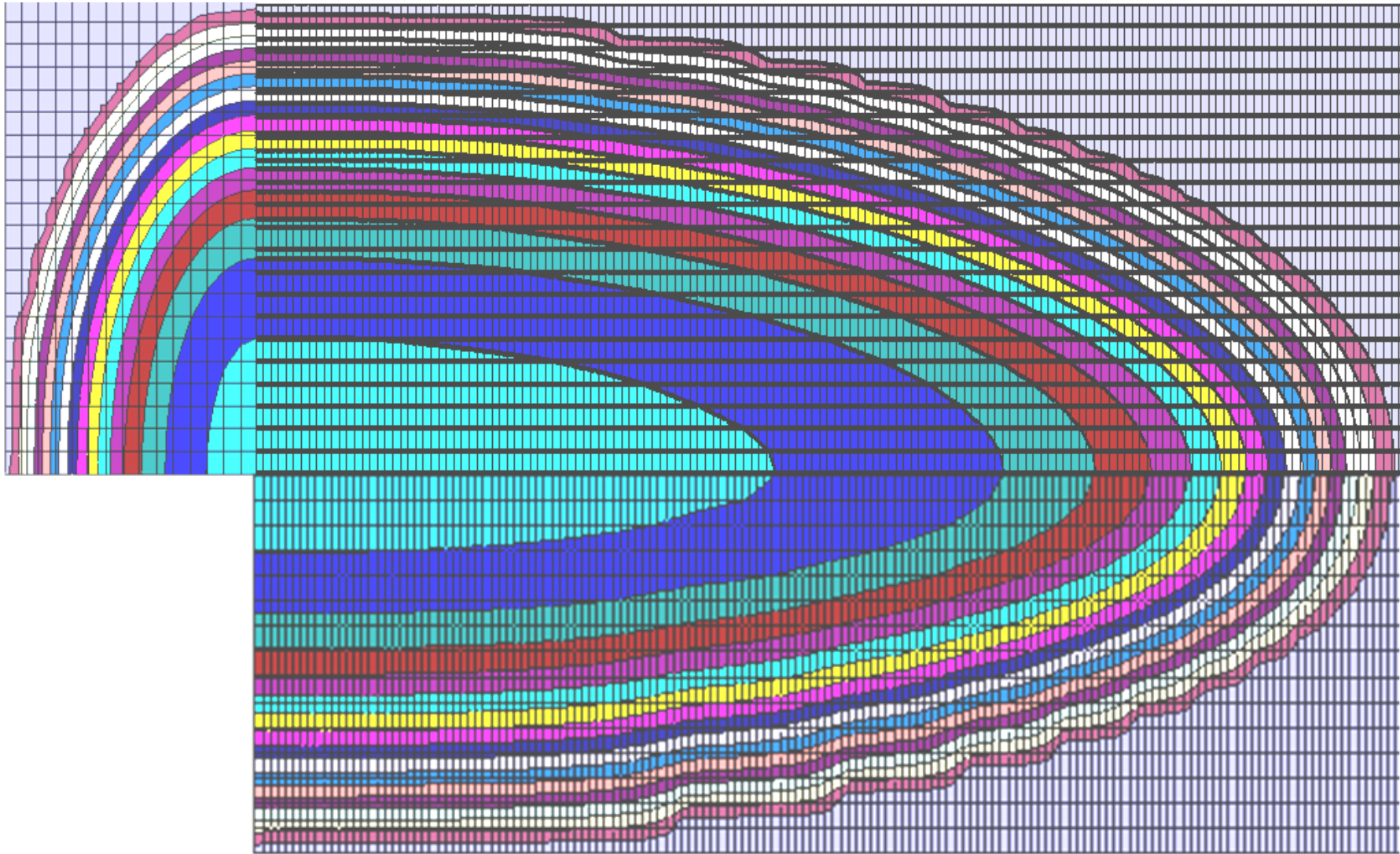


Рисунок 1. Разрезы изменения потенциала переноса по главным осям эллипсоида в начале регулярного режима

В случае, если направление оси  $\xi$  совпадает с направлением градиента  $q_\xi = a_\Theta(\partial\Theta/\partial\xi)$ , и, при сокращении выражения (3) на множитель  $d\xi$ , получаем:

$$a_\Theta \cdot \left[ \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \cdot S'_\xi + S(\xi) \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} \right] = V'_n(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}. \quad (4)$$

После преобразования уравнения (4) путем выноса оператора дифференцирования за скобки имеем:

$$a_\Theta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ S(\xi) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right] = V'_n(\xi) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}. \quad (5)$$

Анализ уравнения (5) показывает, что оно может быть решено при разделении переменных, с использованием только геометрии изопотенциальных поверхностей.

Уравнение (5) представляет собой одномерную задачу, которая может быть решена, зная функциональные зависимости (2). Как видно из данного уравнения темп изменения поля потенциала в процессе переноса определяется обобщенной поверхностью изопотенциальной поверхности:

$$S_{EL}(a, b, c) := 2 \cdot \pi \cdot c^2 + \frac{2 \cdot \pi \cdot b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot c^2 \cdot \left[ \int_0^{\arccos\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{1}{\sqrt{1 - \left[ \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right]^2} \cdot \sin^2(\Psi)} d\Psi \dots \right. \\ \left. + \left( a^2 - c^2 \right) \cdot \int_0^{\arccos\left(\frac{b}{a}\right)} \frac{\left[ \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right]^2}{\sqrt{1 - \left[ \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right]^2} \cdot \sin^2(\Psi)} d\Psi \right] \quad (6)$$

и объемом, занимаемым этой поверхностью, зависящим от габаритов эллипсоида:

$$V_{EL}(a, b, c) := \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c \quad (7)$$

Таким образом, параметрами процесса переноса потенциала трехмерного эллипсоида в этом процессе являются функции (6) и (7). В расчете параметров данных функций, входящих в уравнение (5) используем набор эквидистантных эллипсоидов, которые получены путем вычитания пропорциональной доли минимальной полуоси эллипсоида (с). В качестве обобщенного радиуса ( $R_{abc}$ ) использовали формулу для расчета обобщенного радиуса трехмерного ограниченного тела, полученный на основе принципа суперпозиции одномерных полей потенциала:

$$R_{abc} = \frac{a \cdot b \cdot c}{\sqrt{a^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot c^2}} \quad (8)$$

Уравнение (8) использовали для связи характеристик эллипсоидов. Полученные зависимости возможно использовать для решения уравнения (5) относительно обобщенной координаты  $\xi$  путем использования функций поверхности и объема от соответствующей обобщенной координаты  $\xi$  эквидистантой поверхности (рисунок 2).

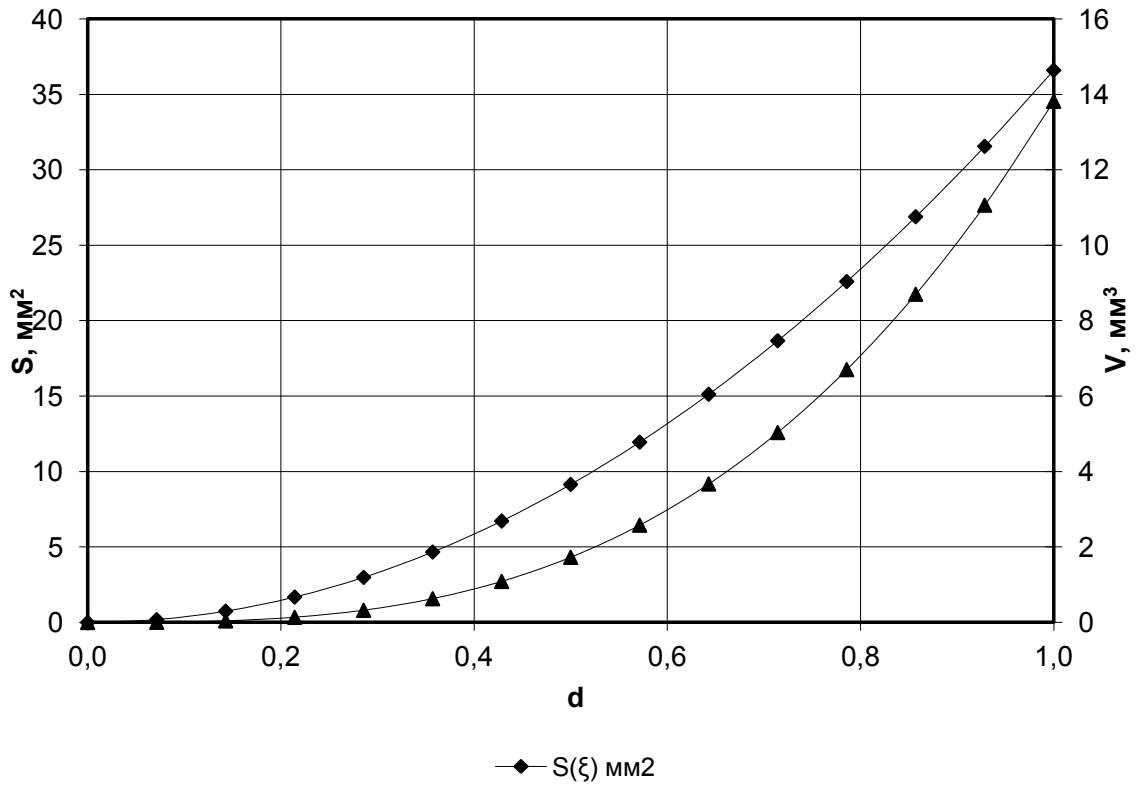


Рисунок 2. Изменение объема и площади поверхностей при изменении обобщенной координаты  $\xi \leftrightarrow (R_{abc})$  от 0 до 0,64 мм

Анализ уравнение (5) показал, что эти зависимости должны быть гладкими, дважды дифференцируемыми неразрывными функциями. Поэтому использовали сплайн аппроксимацию по расчетным данным (линии на рисунке). Это позволило получить нужные численные оценки величин, входящих в уравнение (5).

С целью проведения дальнейшего исследования было подробнее рассмотрено на основе полученного обобщенного уравнения переноса потенциала (5) для эллипсоидной частицы построение разностной схемы. Аппроксимируя уравнение (4) конечными разностями, получаем следующую расчетную схему:

$$dV_{\xi}(\Delta h \cdot i) \cdot \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta \tau} = a_{\Theta} \cdot \left( S_{\xi}(\Delta h \cdot i) \cdot \frac{y_{i-1,j+1} - 2 \cdot y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{\Delta h^2} + dS_{\xi}(\Delta h \cdot i) \cdot \frac{y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1}}{2 \cdot \Delta h} \right) \quad (9)$$

где  $dV_{\xi}(\Delta h \cdot i)$  – производная по объему изопотенциальной поверхности в узле сетки под номером  $i$ ;  $y_{i,j}$  – избыточный потенциал эллипсоидной частицы в процессе сушки;  $S_{\xi}(\Delta h \cdot i)$  – площадь изопотенциальной поверхности в узле сетки под номером  $i$ ;  $dS_{\xi}(\Delta h \cdot i)$  – производная по площади изопотенциальной поверхности в узле сетки под номером  $i$ .

Преобразуем разностный аналог (9) уравнения (4) для внутренних точек эллипсоида в явный вид относительно узла  $y_{i,j}$  получая неявную расчетную схему относительно узла  $y_{i,j}$ :

$$y_{i,j} = \left( \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau \cdot dS_{\xi}(\Delta h \cdot i)}{2 \cdot \Delta h \cdot dV_{\xi}(\Delta h \cdot i)} - \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau \cdot S_{\xi}(\Delta h \cdot i)}{\Delta h^2 \cdot dV_{\xi}(\Delta h \cdot i)} \right) y_{i-1,j+1} + \left( 1 + \frac{2 \cdot a_{\Theta} \cdot \Delta \tau \cdot S_{\xi}(\Delta h \cdot i)}{\Delta h^2 \cdot dV_{\xi}(\Delta h \cdot i)} \right) y_{i,j+1} - \left( \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau \cdot dS_{\xi}(\Delta h \cdot i)}{2 \cdot \Delta h \cdot dV_{\xi}(\Delta h \cdot i)} + \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau \cdot S_{\xi}(\Delta h \cdot i)}{\Delta h^2 \cdot dV_{\xi}(\Delta h \cdot i)} \right) y_{i+1,j+1} \quad (10)$$

Для замыкания уравнений (10) рассмотрим разностные аналоги для граничных условий задачи внутри эллипсоида в начальный момент времени (11) и на его поверхности (12):

$$y(\xi, 0) = 1 \quad (11)$$

$$y(1, \tau) = 0 \quad (12)$$

Преобразования показали, что для левой границы сетки (центр эллипсоида) может использоваться (13), для внутренних узлов сетки (10) и для правой границы (поверхность эллипсоида) (14).

$$y_{0,j} = \left( 1 + \frac{2 \cdot a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{\Delta h^2} \right) \cdot y_{0,j+1} - \left( \frac{2 \cdot a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{\Delta h^2} \right) \cdot y_{1,j+1} \quad (13)$$

$$y_{MaxNum-1,j} = \left[ 1 + \frac{2 \cdot a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{\Delta h^2} \cdot \frac{S_{\xi}[\Delta h \cdot (MaxNum-1)]}{dV_{\xi}[\Delta h \cdot (MaxNum-1)]} \right] \cdot y_{MaxNum-1,j+1} + \left[ \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{2 \cdot \Delta h} \cdot \frac{dS_{\xi}[\Delta h \cdot (MaxNum-1)]}{dV_{\xi}[\Delta h \cdot (MaxNum-1)]} - \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{\Delta h^2} \cdot \frac{S_{\xi}[\Delta h \cdot (MaxNum-1)]}{dV_{\xi}[\Delta h \cdot (MaxNum-1)]} \right] \cdot y_{MaxNum-2,j+1} \quad (14)$$

Получается замкнутая система линейных алгебраических уравнений ленточного трех диагонального типа, в которой вектор правой части представляет собой начальное условие (11) для всех точек кроме  $i=MaxNum$  для которой используется граничное условие (12).

Для получения решения используем метод прогонки, представляющий собой модифицированный метод Гаусса для ленточных трех диагональных матриц. В данном случае трех диагональная матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} d_0 & e_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & d_1 & e_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & d_{MaxNum-2} & e_{MaxNum-2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c_n & d_{MaxNum-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

где элементы матрицы  $A$  представлены следующими соотношениями.

Элементы главной диагонали определяются по формуле (16) и не зависят от номера узла сетки:

$$d_i = 1 + \frac{2 \cdot a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{\Delta h^2} \quad (16)$$

где  $i=0,1,\dots, MaxNum-1$ . Наддиагональные элементы определяются формулой (17) и их значение зависит от номера узла:

$$e_i = - \left( \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{2 \cdot \Delta h} \cdot \frac{dS_{\xi}(\xi(x_i))}{dV_{\xi}(\xi(x_i))} + \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{\Delta h^2} \cdot \frac{S_{\xi}(\xi(x_i))}{dV_{\xi}(\xi(x_i))} \right) \quad (17)$$

где  $i=0,1,\dots, MaxNum-2$ .

Функция обобщенной координаты  $\xi(x)$  определяется по точкам разностной схемы и задается следующими соотношениями:

$$\xi(x) := \frac{x}{Rph} \quad x_i := \frac{Rph}{MaxNum} \cdot i \quad (18)$$

где  $i=0,1,\dots, MaxNum$ ;  $Rph$  – эффективный радиус эллипсоида.

Под диагональные элементы определяются формулой:

$$c_i = \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{2 \cdot \Delta h} \cdot \frac{dS_{\xi}(\xi(x_i))}{dV_{\xi}(\xi(x_i))} - \frac{a_{\Theta} \cdot \Delta \tau}{\Delta h^2} \cdot \frac{S_{\xi}(\xi(x_i))}{dV_{\xi}(\xi(x_i))} \quad (19)$$

где  $i=1,2,\dots, MaxNum - 1$ .

Решая матричное уравнение вида:  $A \cdot x = b$ , где вектор  $b$  определяется начальным условием (11), а в последующих расчетах используется для организации итеративного расчета вектора  $x$  (неявная схема интегрирования):

$$b_{i,0} = 1 \Rightarrow x_{i,0} = |A|^{-1} \cdot |b| \Rightarrow b_{i,1} = x_{i,0} \Rightarrow x_{i,1} = |A|^{-1} \cdot |b| \Rightarrow \dots \quad (20)$$

Реализуя последовательно  $MaxTime$  раз схему (20) получаем конечно-разностную аппроксимацию нестационарного поля переноса потенциала влаги в эллипсоиде на полосе решения  $0 \leq \xi(x_i) \leq 1$  и  $0 \leq \tau_j \leq MaxTime \cdot \Delta \tau$ . Полученная матрица нестационарного поля переноса потенциала влаги в эллипсоиде  $t_{x\tau_{ell}}$  использовалась для расчета среднего значения потенциала во времени. Для расчета использовалась формула Симпсона:

$$\Theta_{e_j} := \frac{3}{(x_{MaxNum})^3} \cdot \frac{\Delta h}{3} \cdot \left[ \xi(x_0)^2 \cdot t_{x\tau_{ell}0,j} + 4 \cdot \sum_{i=1}^n \left( \xi(x_{2 \cdot i-1})^2 \cdot t_{x\tau_{ell}2 \cdot i-1,j} \right) \dots \right] \cdot Rph^2 \quad (21)$$

$$\left[ + 2 \cdot \sum_{i=1}^n \left( \xi(x_{2 \cdot i-2})^2 \cdot t_{x\tau_{ell}2 \cdot i-2,j} \right) + \xi(x_{2 \cdot n})^2 \cdot t_{x\tau_{ell}2 \cdot n,j} \right]$$

где  $\Theta_{e_j}$  – среднее значение потенциала во времени на шаге  $\tau_j = j \cdot \Delta \tau$ .

Таким образом, рассматривая процессы при сушке с использованием потенциалопроводности для зерна в эллипсовидной форме, обосновано решение задачи численным методом сеток.

#### **Литература:**

1. Кошевой Е.П., Косачев В.С., Алексеев В.С. Анализ метрических коэффициентов одномерного уравнения диффузии в криволинейных координатах // Журнал прикладной химии. 1987. Вып. 60, №10. С. 2384-2388.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
3. Подгорный С.А. Кошевой Е.П., Косачев В.С. Математическое моделирование процессов сушки и кондиционирования зерна. Потенциалы массопереноса. LAMBERT Academic Publishing, 2012. 128 с.
4. Firatligil-Durmus E., Sukorova A., Bubka E. Geometric parameters of wheat grains using image analysis and FEM approach // 18<sup>th</sup> International Congress of Chemical and Process Engineering (24-28 August 2008). Prague: Czech Republic, 2008.
5. Li Z., Ye J., Kobayashi N. Modeling of Diffusion in Ellipsoidal Solids: a Simplified Approach to Solving Some Drying Problems // 16<sup>th</sup> International Congress of Chemical and Process Engineering (22-26 August 2004). Prague: Czech Republic, 2004.

#### **References:**

1. Koshevoy E.P., Kosachev V.S., Alekseev V.S. Analysis of the metric coefficients of one-dimensional diffusion equation in curvilinear coordinates // Journal of Applied Chemistry. 1987. v.60, N10. P. 2384-2388.
2. Lykov A.V. Theory of heat conduction / A.V. Lykov. M.: Higher School, 1967. 600 p.
3. Podgorny S.A., Koshevoy E.P., Kosachev V.S. Mathematical modeling of grain drying and cooling. Potentials of mass transfer. LAMBERT Academic Publishing, 2012. 128 p.
4. Firatligil-Durmus E., Sukorova A., Bubka E. Geometric parameters of wheat grains using image analysis and FEM approach // 18<sup>th</sup> International Congress of Chemical and Process Engineering (24-28 August 2008). Prague: Czech Republic, 2008.



5. Li Z., Ye J., Kobayashi N. *Modeling of Diffusion in Ellipsoidal Solids: a Simplified Approach to Solving Some Drying Problems // 16<sup>th</sup> International Congress of Chemical and Process Engineering (22-26 August 2004). Prague: Czech Republic, 2004.*