УДК 664.002.5
ББК 36.81-5
П-63

Подгорный Сергей Александрович, *кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации производственных процессов ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2, тел.: 8(861)2559392;*

Кошевой Евгений Пантелеевич, *доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологического оборудования и систем жизнеобеспечения ФГБОУ ВПО «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2, тел.: 8(861)2752279;*

Косачев Вячеслав Степанович, *доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологического оборудования и систем жизнеобеспечения «Кубанский государственный технологический университет», 350072, г. Краснодар, ул. Московская, 2, тел.: 8(861)2752279;*

Схаляхов Анзаур Адамович, *доктор технических наук, доцент, профессор кафедры технологии, машин и оборудования пищевых производств, декан технологического факультета ФГБОУ ВПО «Майкопский государственный технологический университет», 385000, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 191, тел.: 8(8772)570412.*

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПИСАНИЯ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА, МАССЫ И ДАВЛЕНИЯ ПРИ СУШКЕ

(рецензирована)

В работе последовательно рассматриваются следующие вопросы. На основании теории тепломассообмена А.В. Лыкова формулируются дифференциальные уравнения в частных производных для описания переноса температуры, влажности и давления в объектах сушки. Далее система уравнений формулируется в конечных элементах.

Ключевые слова: тепло, масса, давление, сушка, конечные элементы.

Podgorny Sergey Alexandrovich, *Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Automation of Production Processes of FSBEI HPE “Kuban State Technological University”, 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str., tel.: 8 (861) 2559392;*

Koshevoy Eugenii Panteleevich, *Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Technological Equipment and Life Support Systems of FSBEI HPE “Kuban State Technological University”, 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str., tel.: 8 (861) 2752279;*

Kosachev Vyacheslav Stepanovich, *Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Technological Equipment and Life Support Systems of FSBEI HPE “Kuban State Technological University”, 350072, Krasnodar, 2 Moscow Str., tel.: 8 (861) 2752279;*

Skhalyakhov Anzaur Adamovich, *Doctor of Technical Sciences,* associate *professor, professor of the Department of Technology, Machinery and Equipment for Food Production, dean of the Technological Faculty of FSBEI HPE “Maikop State Technological University”, 385000, the Republic of Adyghea, Maikop, 191 Pervomayskaya str., tel.: 8 (8772) 570412.*

STATEMENT OF THE PROBLEM OF DESCRIPTION OF HEAT, MASS AND PRESSURE TRANSFER DURING DRYING

(reviewed)

Differential equations based on the A.V. Lykov’s theory of heat and mass transfer to describe the transfer of temperature, humidity and pressure in the drying facilities have been formulated. Then the system of equations is formulated in finite elements.

Keywords: heat; weight; pressure; drying; finite elements

Лыковым А.В. [1, 2], базируясь на термодинамике необратимых процессов, заложены основы тепломассопереноса и сформулированы системы связных дифференциальных уравнений в частных производных из двух уравнений для теплопередачи и перемещения массы и из трех уравнений для передачи тепла, массы и давления. В применении к процессам переноса при сушке были сделаны [3] следующие предположения:

1. Влага присутствует и переносится в объекте сушки в форме пара и жидкости.
2. Температуры жидкости, пара и сухого тела равны в совпадающих точках.

3. Перенос связанного вещества с твердой матрицей материала в капиллярной структуре отсутствует.

4. Химические реакции, связанные с потерей воды, не приняты во внимание.

Баланс тепловой энергии в пределах капиллярного пористого тела может быть описан как:

$$\rho_0 c_q \frac{\partial T}{\partial t} = -div j_q - \sum_{j=1}^{4} h_i I_i \quad , \tag{1}$$

где ρ_0 – плотность сухого тела, кг/м^3; c_p – удельная теплоемкость, Дж/кг К; T – температура, К; t – время, сек; j_q – удельный поток тепла, Вт/м^2. Член $\sum_{j=1}^{4} h_i I_i$ – источник (или сток) тепла. Влажность в форме пара обозначена индексом 1, в жидкой форме 2, в твердой форме 3 и инертном газе 4.

Поток тепла j_q обычно связывается с температурным градиентом, но в случае связной системы, это также связано с градиентом влажности, что известно как эффект Дюфора. Однако это имеет небольшое значение в практике сушки [3]. Эта связь слабая и ей можно пренебречь. Поэтому передача тепла проводимостью дается законом Фурье:

$$j_q = -k_q \nabla T \quad , \tag{2}$$

где k_q – коэффициент теплопроводности, Вт/м К.

Источник тепла ($\sum_{j=1}^{4} h_i I_i$) происходит из-за фазового перехода воды, содержавшейся в пределах тела и это может быть представлено как:

$$\sum_{j=1}^{4} h_i I_i = \lambda div \left(\in D\rho_0 \left(\nabla m + \delta \nabla T + \frac{k_p}{D\rho_0} \nabla P \right) \right) \quad , \tag{3}$$

где λ – скрытая теплота, Дж/кг; $\in$ – отношение коэффициента диффузии пара к коэффициенту диффузии полной влажности, D – коэффициент диффузии влажности, м^2/с; m – является базисным влагосодержанием (кг$_{влаги}$/кг$_{сух.\ тела}$), δ – термоградиентный коэффициент, 1/K; k_p – коэффициент фильтрации влажности, кг м/с kH; и P – давление, kH/м^2.

Лыков [2, 3] выражает влагосодержание через потенциал влажности:

$$M = c_m M, \tag{4}$$

где M – потенциал влажности, M°; c_m – удельная влагоемкость материала, кг$_{влага}$/кг$_{сух.тело}$ M°. Величина c_m обычно определяется экспериментально с использованием эталонной шкалы, построенной на гигроскопических свойствах фильтровальной бумаги [3] по уравнению (4).

Подставляя уравнения (2) и (3) в (1) после преобразования получается:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\in \lambda c_m D}{c_q} \nabla^2 M + \left(\frac{k_q}{\rho_0 c_q} + \frac{\in \lambda \delta D}{c_q} \right) \nabla^2 T + \frac{\in \lambda k_p}{\rho_0 c_q} \nabla^2 P \tag{5}$$

Массовый баланс для одного из связанных компонентов: материала, пара или жидкости следует из закона о сохранении массы:

$$\frac{\partial (m_i \rho_0)}{\partial t} = -div\left(j_{mi,dif} + j_{mi,fil} \right) + I_i \quad , \tag{6}$$

где $j_{mi,dif}$ – массовый поток из-за распространения влажности, и $j_{mi,fil}$ – массовый поток из-за фильтрации влажности.

Для материала в целом массовый баланс получен, суммируя для всех связанных компонентов (i = 1, 2, 3, 4), то есть:

$$\frac{\partial (m_i \rho_0)}{\partial t} = -div\left(j_{m,dif} + j_{m,fil} \right) + \sum_{j=1}^{4} I_i \tag{7}$$

Массовый поток (j_m) не только связан с градиентом концентрации влажности, но также и с температурным градиентом. Это известно как эффект Соре, с учетом которого поток может быть написан как:

$$j_{m,dif} = -D\boldsymbol{\rho}_0 \left(\nabla m + \boldsymbol{\delta} \nabla T \right) \tag{8}$$

Присутствие полного градиента давления в капиллярном пористом теле вызывает передачу фильтрацией газа, жидкости и смеси пара. Передача фильтрацией определена как:

$$j_{m,fil} = j_{m1,fil} + j_{m2,fil} + j_{m4,fil} \tag{9}$$

или $\quad = -k_p \nabla P$ (10)

Сумма источников и стоков для всех связанных компонентов ($\sum_{j=1}^{4} I_i$) равняется нолю.

Подставляя уравнения (8) и (10) в (7), получается:

$$\frac{\partial(m\rho_0)}{\partial t} = div\left(D\rho_0 \nabla m + D\rho_0 \delta \nabla T + k_p \nabla P\right) \tag{11}$$

Выражая влагосодержание через потенциал влажности (M) при условии, что влагоемкость c_m является постоянной, уравнение (11) становится:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D\nabla^2 M + \frac{\delta D}{c_m}\nabla^2 T + \frac{k_p}{\rho_0 c_m}\nabla^2 P \tag{12}$$

Принимается передача влаги фильтрацией в виде жидкости маленькой по сравнению с фильтрацией пара и воздуха, соответственно уравнение (10) становится:

$$j_{m,fil} = j_{m1,fil} + j_{m4,fil} \tag{13}$$

или $\quad = -k_p \nabla P$ (14)

В итоге дифференциальное уравнение для перемещения массы компонентов i = 1 и 4 принимает вид:

$$\frac{\partial(\rho_0(u_1+u_4))}{\partial t} = -div(j_1 + j_4) + I_1 + I_4, \tag{15}$$

где u – средняя массовая скорость. Удельное массовое содержание смеси «пар-газ» определено газовым уравнением:

$$\boldsymbol{\rho}_0(u_1+u_4) = \frac{PM}{RT}\Pi b, \tag{16}$$

где R – газовая константа, Пb – оптовая пористость тела.

Принимается:

$$c_p = \frac{\Pi b M}{TR\rho_0} \tag{17}$$

Уравнение (16) становится:

$$\frac{\partial(u_1+u_4)}{\partial t} = c_p \frac{\partial P}{\partial t} \tag{18}$$

Подстановка уравнений (14) и (18) в уравнение (15) дает:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k_p}{\rho_0 c_p}\nabla^2 P - \frac{\in c_m}{c_p}\frac{\partial M}{\partial t} \tag{19}$$

С учетом подстановки уравнения (12) уравнение (19) становится:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{D \in c_m}{c_p}\nabla^2 M + \frac{D \in \delta}{c_p}\nabla^2 T + \frac{k_p}{\rho_0 c_p}(1-\in)\nabla^2 P \tag{20}$$

Связанная система дифференциальных уравнений в частных производных для температуры, влажности и давления сформирована уравнениями (5), (12) и (20). Система асимметрична, что делает трудным решить ее в цифровой форме. Однако, умножение уравнения (5) на $\rho_o C_q\ \delta/c_m$, уравнения (12) на $\in\lambda\rho_o C_m$ и уравнения (20) на – $\lambda\rho_o C_p k_p/k_m$ производит симметрическую систему уравнений, которые могут быть написаны как

$$C_q \frac{\partial T}{\partial t} = K_{11}\nabla^2 T + K_{12}\nabla^2 M + K_{13}\nabla^2 P \tag{21}$$

$$C_m \frac{\partial M}{\partial t} = K_{21}\nabla^2 T + K_{22}\nabla^2 M + K_{23}\nabla^2 P \quad (22)$$

$$C_p \frac{\partial P}{\partial t} = K_{31}\nabla^2 T + K_{32}\nabla^2 M + K_{33}\nabla^2 P \quad (23),$$

где

$C_q = \rho_0 c_q \delta / c_m$; $C_m = \in \lambda \rho_0 c_m$; $C_p = -\lambda \rho_0 c_p k_p / k_m$;

$K_{11} = (k_q + \in \lambda k_m)\delta / c_m$; $K_{12} = \in \lambda k_m \delta / c_m$; $K_{13} = \in \lambda k_p \delta / c_m$;

$K_{21} = \in \lambda k_m \delta / c_m$; $K_{22} = \in \lambda k_m$; $K_{23} = \in \lambda k_p$;

$K_{31} = \in \lambda k_p \delta / c_m$; $K_{32} = \in \lambda k_p$; $K_{33} = -\lambda (1 - \in) k_p^2 / k_m$

Общий набор граничных условий для системы уравнений (21) - (23) дан [3]:

$M = M_a$ $\qquad \Gamma_1 \qquad (24)$

$k_m \frac{\partial M}{\partial n} + j_m + \frac{k_m \delta}{c_m}\frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_m (M - M_a) = 0$ $\qquad \Gamma_2 \qquad (25)$

$T = T_a$ $\qquad \Gamma_3 \qquad (26)$

$k_q \frac{\partial T}{\partial n} + j_q + \alpha_q (T - T_a) + \alpha_m \lambda (1 - \in)(M - M_a) = 0$ $\qquad \Gamma_4 \qquad (27)$

$P = P_a$ $\qquad \Gamma_5 \qquad (28)$

где Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 и Γ_5 составляют полную пограничную поверхность; α_m конвективный коэффициент перемещения массы (кг/м^{2}с); α_q – конвективный коэффициент теплопередачи (Вт/м^{2}K). Приписка "*a*" обозначает окружающее.

Первый член в уравнении (27) является количеством тепла, проходящим в тело, второй член (j_q) и третий член [α_q $(T - T_a)$] являются теплом, поставляемым в поверхности, и последний член $\alpha_m \lambda$ $(l - \in)$ $(M - M_a)$) является количеством тепла, израсходованным в фазовом переходе жидкости.

Первый член ($k_m \partial M / \partial n$) в уравнении (25) является потоком влажности в направлении нормальном к поверхности, в то время как последние два члена $\frac{k_m \delta}{c_m}\frac{\partial T}{\partial n}$ и $\alpha_m (M - M_a)$ описывают количество влажности, отведенной от поверхности.

Уравнения (25) и (27) могут быть переписаны в общей форме как

$$(k_q + \in \lambda \rho_0 \delta D)\frac{\partial T}{\partial n} + J_q^* = 0 \quad (29)$$

или $\quad D \frac{\partial M}{\partial n} + J_m^* = 0 \quad (30),$

где

$$J_q^* = A_q (T - T_a) + A_e (M - M_a) + J_q \quad (31)$$

$$J_m^* = A_\delta (T - T_a) + A_m (M - M_a) + J_m \quad (32)$$

и

$$A_q = \frac{(k_q + \in \lambda \rho_0 \delta D)\alpha_q}{k_q}$$

$$A_e = \frac{\lambda \rho_0 \alpha_m}{k_q}(1 - \in)(k_q + \in \lambda \rho_0 \delta D)$$

$$A_\delta = -\frac{D \delta \alpha_q}{k_q}$$

$$A_m = \alpha_m - \frac{D\alpha_m \rho_0 \lambda \delta}{k_q}(1-\in)$$

$$J_q = \frac{k_q + \in \lambda \rho_0 \delta D}{k_q}$$

$$J_m = \frac{j_m}{\rho_0} - \frac{D\delta j_q}{k_q}$$

Управляющие дифференциальные уравнения (21) - (23) были преобразованы в уравнения конечного элемента при использовании метода взвешенных остатков Галеркина [4].

Зависимые переменные T, M и P могут быть приближены через соответствующие центральные значения T_j, M_j и P_j, интерполируя функции:

$$T = \sum_{j=1}^{n} N_j(x,y)T_j(t) \tag{33}$$

$$M = \sum_{j=1}^{n} N_j(x,y)M_j(t) \tag{34}$$

$$P = \sum_{j=1}^{n} N_j(x,y)P_j(t) \tag{35}$$

где N_j – функция надбавки, и n – число узлов в элементе.

Используя метод взвешенных остатков Галеркина и урегулирование ошибок взвешенных остатков к нолю уравнения (21) - (23) могут быть написаны как:

$$\int_\Omega N_i\left[\nabla\left(K_{11}\nabla \bar{T}\right) + \nabla\left(K_{12}\nabla \bar{M}\right) + \nabla\left(K_{13}\nabla \bar{P}\right) - C_q \frac{\partial \bar{T}}{\partial t}\right]d\Omega = 0 \tag{36}$$

$$\int_\Omega N_i\left[\nabla\left(K_{21}\nabla \bar{T}\right) + \nabla\left(K_{22}\nabla \bar{M}\right) + \nabla\left(K_{23}\nabla \bar{P}\right) - C_m \frac{\partial \bar{M}}{\partial t}\right]d\Omega = 0 \tag{37}$$

$$\int_\Omega N_i\left[\nabla\left(K_{31}\nabla \bar{T}\right) + \nabla\left(K_{32}\nabla \bar{M}\right) + \nabla\left(K_{33}\nabla \bar{P}\right) - C_p \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}\right]d\Omega = 0 \tag{38}$$

Применение теоремы Грина (интегрирование по частям) к вышеупомянутым выражениям, привело к результатам в системе дифференциальных уравнений, которые могут быть выражены как:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \dot{T}_j \int_\Omega C_q N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{n} T_j \int_\Omega K_{11}\left(\frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial N_j}{\partial Y}\right)d\Omega + \\
&\sum_{j=1}^{n} M_j \int_\Omega K_{12}\left(\frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial N_j}{\partial Y}\right)d\Omega + \\
&\sum_{j=1}^{n} P_j \int_\Omega K_{13}\left(\frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial N_j}{\partial Y}\right)d\Omega + \\
&\int_\Gamma N_i\left(K_{11}\frac{\partial T}{\partial n} + K_{12}\frac{\partial M}{\partial n} + K_{13}\frac{\partial P}{\partial n}\right)d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \dot{M}_j \int_\Omega C_m N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{n} T_j \int_\Omega K_{21}\left(\frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial N_j}{\partial Y}\right)d\Omega + \\
&\sum_{j=1}^{n} M_j \int_\Omega K_{22}\left(\frac{\partial N_i}{\partial X}\frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y}\frac{\partial N_j}{\partial Y}\right)d\Omega +
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \int_{\Omega} K_{23} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) d\Omega +$$

$$\int_{\Gamma} N_i \left(K_{21} \frac{\partial T}{\partial n} + K_{22} \frac{\partial M}{\partial n} + K_{23} \frac{\partial P}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \qquad (40)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{P}_j \int_{\Omega} C_p N_i N_j d\Omega + \sum_{j=1}^{n} T_j \int_{\Omega} K_{31} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) d\Omega +$$

$$\sum_{j=1}^{n} M_j \int_{\Omega} K_{32} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) d\Omega +$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \int_{\Omega} K_{33} \left(\frac{\partial N_i}{\partial X} \frac{\partial N_j}{\partial X} + \frac{\partial N_i}{\partial Y} \frac{\partial N_j}{\partial Y} \right) d\Omega +$$

$$\int_{\Gamma} N_i \left(K_{31} \frac{\partial T}{\partial n} + K_{32} \frac{\partial M}{\partial n} + K_{33} \frac{\partial P}{\partial n} \right) d\Gamma = 0 \qquad (41)$$

Применив обобщенные граничные условия (28), (29) и (30) и с учетом дальнейшего упрощения вышеупомянутые выражения могут быть написаны в матричной форме как:

$$\begin{bmatrix} C_T & 0 & 0 \\ 0 & C_M & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{M} \\ \dot{P} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T \\ M \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_T \\ F_M \\ F_P \end{pmatrix} = 0,$$

где C_T, C_M, C_P, K_{11}, K_{12}, K_{13}, K_{21}, K_{22}, K_{23}, K_{31}, K_{32}, k_{33}, F_T, F_M и F_P представленные в матрицах соответствуют членам температуры, влажности и давления в уравнениях (39) – (41).

Выражения в представленных выше матрицах могут быть записаны в более общей форме как

$$[C(\phi)]\{\dot{\phi}\} + [K(\phi)]\{\phi\} + \{F\} = \{0\} \qquad (42)$$

где $\{\phi\}^T = [T, M, P]$; C(ϕ) – глобальная матрица емкости; K(ϕ)– глобальная матрица проводимости; {F} – глобальный силовой вектор

Таким образом, на основании теории Лыкова передачи тепла, массы и давления может быть получена система из трех дифференциальных уравнений в частных производных с рабочими переменными температурой, потенциалом влажности и давлением. Для решения системы дифференциальных уравнений может быть использована формулировка конечного элемента.

Литература:

1. Лыков А.В. Тепломассообмен: справочник. М.: Энергия, 1971. 560 с.
2. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. М.: Госэнергоиздат, 1963. 536 с.
3. Лыков А.В. Теория сушки. М.: Энергия, 1968. 472 с.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина / пер. с англ. М.: Мир, 1988. 352 с.