

УДК 678.067.5:624.07
ББК 35.719
К-90

Кулинич Иван Игоревич, аспирант кафедры «Сопротивление материалов» Ростовского государственного строительного университета, e-mail: kulia.shked@gmail.com;

Литвинов Владимир Витальевич, заведующий лабораторией кафедры «Сопротивление материалов» Ростовского государственного строительного университета;

Блягоз Алик Моссович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных и общепрофессиональных дисциплин Майкопского государственного технологического университета, т.: 89184205021, e-mail: alfa-maikop@yandex.ru.

ВЫПУЧИВАНИЕ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ (рецензирована)

Энергетическим методом в форме Тимошенко-Ритца решена задача устойчивости стеклопластиковых стержней, сжимаемых нагрузкой F . Задача свелась к проблеме определения собственных чисел в алгебраической теории матриц. Численно на программном комплексе MatLab получено значение критической нагрузки $F_{кр}$ при различной жесткости и схемах закрепления стержней.

Ключевые слова: стержень, устойчивость, энергия, работа, выпучивание, критическая сила, масса, объем, функция жесткости, обобщенное вековое уравнение.

Kulinich Ivan Igorevich, post graduate student of the department of Strength of Materials, FSBEI HPE "Rostov State University of Civil Engineering", kulia.shked@gmail.com;

Litvinov Vladimir Vitalievich, head of the Laboratory of the Department of Strength of Materials, FSBEI HPE "Rostov State University of Civil Engineering";

Blyagoz Alec Mossovich, Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the department of Construction and General Professional Disciplines of Maikop State Technological University, tel.: 89184205021, e-mail: alfa-maikop@yandex.ru.

BUCKLING OF GLASS AND PLASTIC RODS OF VARIABLE HARDNESS (Reviewed)

Using the energy method in the form of Timoshenko-Ritz the problem of stability of glass and plastic rods, compressed by load F has been solved. The problem is reduced to the problem of determining the Eigen values of the algebraic theory of matrices. Numerically by MatLab software complex the critical load meaning F_{crit} has been obtained at different stiffness and schemes of fixing rods.

Keywords: core, sustainability, energy, work, buckling, the critical force, weight, volume, stiffness function, generalized secular equation.

Потеря устойчивости сжатого стержня представляет собой опасное явление, и поэтому оценка несущей способности конструкции помимо прочностного расчета должна включать вопросы устойчивости всей системы и отдельных ее элементов. В первую очередь это очень важно для строительства, так как потеря устойчивости сжатого стержня возникает внезапно и задолго до того, как будет исчерпана прочность материала, процесс протекает очень быстро и часто приводит к разрушению строительной конструкции. Процесс потери устойчивости происходит в столь короткий промежуток времени, что часть здания, поддерживаемая колоннами, рушится и спастись практически невозможно.

В большинстве конструкций применяются стержни с неизменной по их длине жесткостью, а для уменьшения массы целесообразно использовать стержни переменной жесткости. Такие стержни рассматривались в источниках [2, 3], но стержни металлические, изготовление которых – сложный и дорогостоящий процесс.

Первые попытки отыскания оптимальной формы сжатых осевыми силами колонн принадлежат Ж.Л. Лагранжу. Для нахождения максимальной осевой критической силы P^* колонны сплошного кругового поперечного сечения при ее минимальном объеме V он ввел величину $\frac{P}{V^2}$, назвав ее эффективностью. До настоящего времени решение такой задачи в общем виде отсутствует [1-3].

Развитие технологии изготовления изделий из композиционных материалов (ПКМ) привело к тому, что стало возможным получение конструкций различной формы, при этом сам процесс получения таких изделий значительно проще и экономичнее, нежели аналогичных

металлических. Например, такие изделия можно получить путем подмотки пултрузионного стержня, либо методом ручной выкладки по шаблонам и т.п.

Снижение материалоемкости, характеризующееся отношением критической силы к массе стержня, стало актуальным в период развития авиа- и ракетостроения. Результаты расчета устойчивости стержней переменного сечения, связанные с этой проблемой, нашли отражение в справочной литературе [3]. Однако рекомендаций по выбору эффективной формы стержней обнаружить не удалось.

В настоящей работе предлагается решение задачи устойчивости стержня переменного по длине поперечного сечения с учетом его массы и рекомендации по выбору закона изменения поперечного сечения.

При эйлеровой форме потери устойчивости критическую силу определяют из дифференциального уравнения изогнутой оси, справедливого для любого участка стержня, в пределах которого продольная сила неизменна [2]. Для стержня с переменной жесткостью это уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EI(x) \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right\} + F \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = 0, \quad (1)$$

где $v(x)$ – прогиб стержня; $EI(x)$ – переменная жесткость стержня; F – сжимающая нагрузка.

При расчете стержня переменного сечения (рис. 1) уравнение (1) становится однородным дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами.

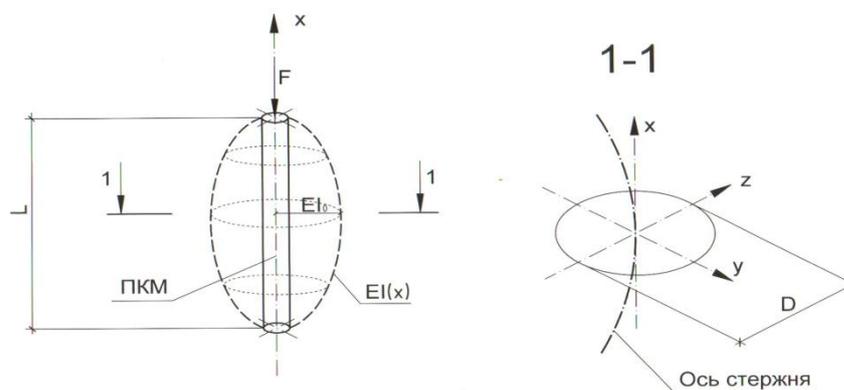


Рис. 1. Продольно-сжатый стержень переменной жесткости

Аналитически такого вида уравнения (1) решаются крайне редко, ввиду сложности переменных коэффициентов, и чаще всего прибегают к использованию приближенных методов, к которым относится и энергетический метод Ритца-Тимошенко. Энергетический критерий служит основой для эффективных приближенных методов решения задач устойчивости.

Примем, что изогнутая линия стержня при потере устойчивости приближенно может быть представлена с помощью ряда. Согласно методу, изначально задаются предполагаемой формой изгиба в виде суммы функций с неопределенными множителями a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) [3]:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad (2)$$

Здесь под f_i понимаются функции от x , удовлетворяющие геометрическим граничным условиям задачи, т.е. такие, которые относятся к прогибам и углам поворота, независимо от x .

Формула полной потенциальной энергии стержня имеет вид [3]:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]^2 dx - \frac{1}{2} F \int_0^l \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]^2 dx. \quad (3)$$

Разрешающие уравнения для определения критических усилий представляют собой такую систему:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_n} = 0 \quad (4)$$

Определитель системы уравнений (4) содержит нагрузку в степени $2n$. Решая эту систему,

получаем значения. Наименьший корень и будет искомым критическим усилием [2, 4, 5].

Теперь, если в (3) подставить (2), выражение (4) после некоторых преобразований можно записать в виде

Выражение (5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Если учесть, что ΔF , то решение (5) будет существовать только в том случае, если ΔV и если определитель, состоящий из коэффициентов при a_i , будет равен нулю [2, 4, 5].

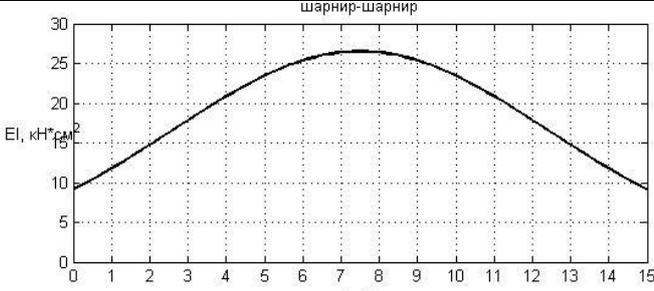
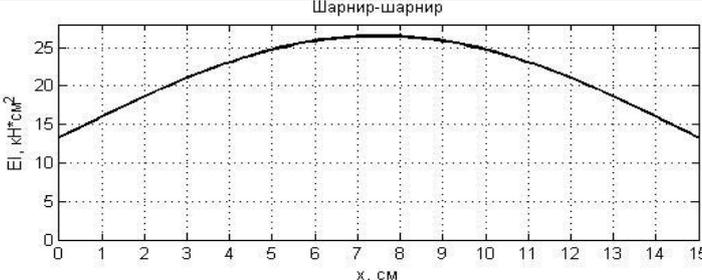
$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^l EI(x) \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_k}{dx^2} dx - P \int_0^l \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_k}{dx^2} dx \right\} a_i = 0; \quad k = 1 \dots n \quad (5)$$

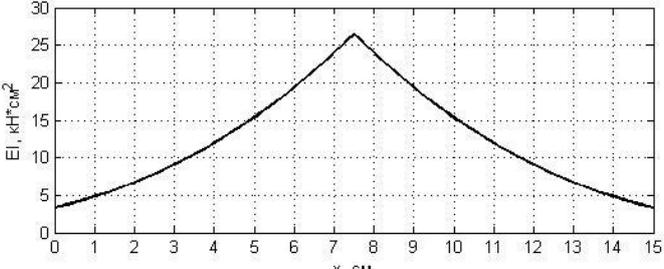
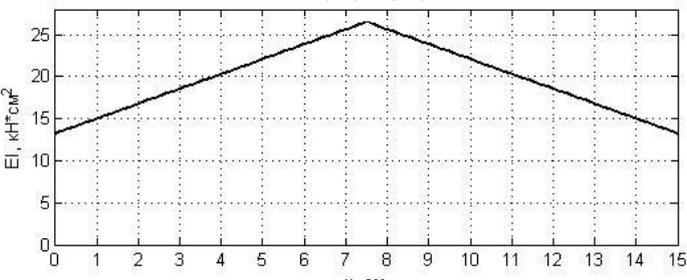
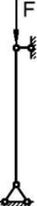
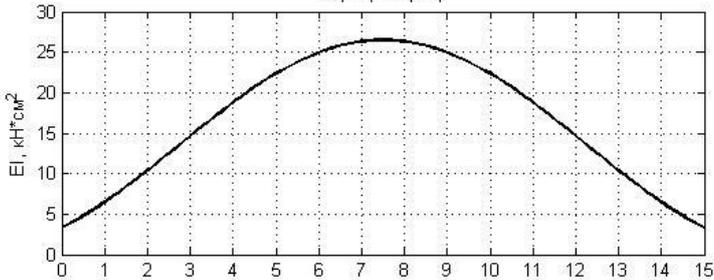
Рассмотрим несколько типовых форм изменения жесткости, найдем оптимальную для каждого варианта и подберем функцию прогиба для стержней с различными условиями закрепления концов.

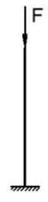
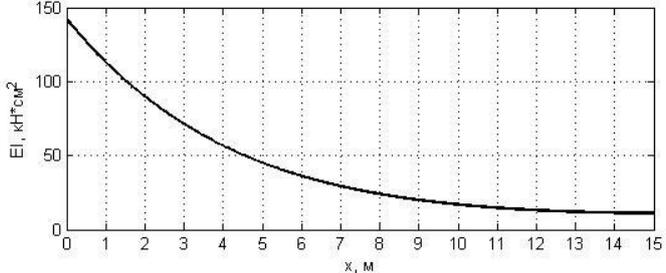
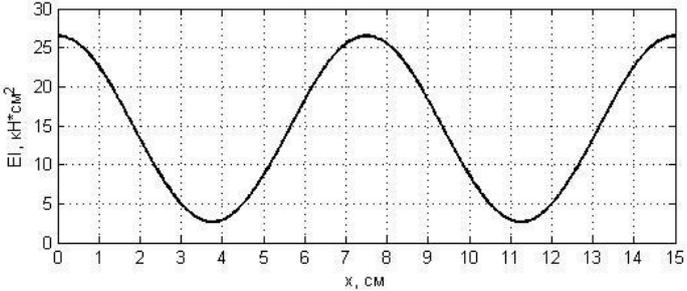
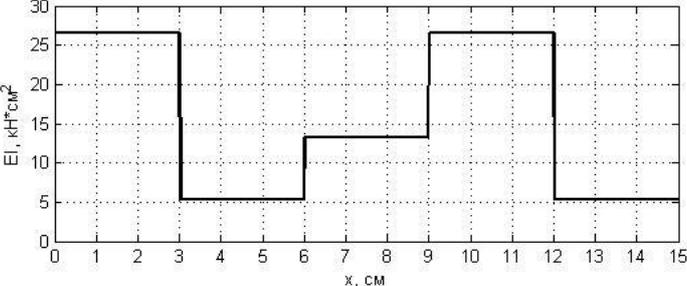
Во всех вариантах подбора функции прогиба ограничиваемся четырьмя членами ряда, так как этого достаточно для его сходимости. Погрешность составляет менее 6% [3].

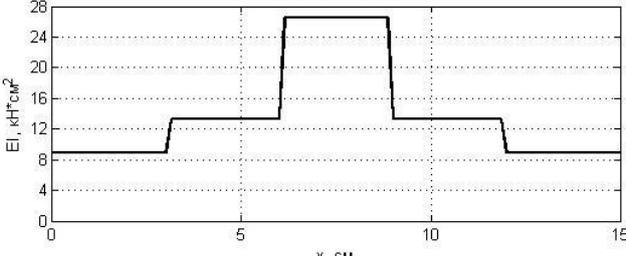
При рассмотрении стержней за EI_0 принимается жесткость в сечении $x=0$, где l — длина стержня.

Таблица 1

№ варианта	Функция и график изменения жесткости	Функция прогиба	Схема опирания стержня
1.	$EI(x) = EI_0 \left[(1 - 0,7) \sin \frac{\pi x}{l} + 0,7 \right]^3$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi x i}{l}$ $n = 1 \dots 4$	
			$F_{\text{кр}} = 0,987 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 16\%$ $\Delta V(\%) = 9,11\%$
2.	$EI(x) = EI_0 \left[(1 - 0,5) \sin \frac{\pi x}{l} + 0,5 \right]$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi x i}{l}$ $n = 1 \dots 4$	
			$F_{\text{кр}} = 1,06 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 11,3\%$ $\Delta V(\%) = 6,18$

3.	$EI(x) = \begin{cases} EI_0 \left[1 - \frac{(l/2 - x)}{l} \right]^3, & \text{if } x \in \left[0; \frac{l}{2} \right] \\ EI_0 \left[1 + \frac{(l/2 - x)}{l} \right]^3, & \text{if } x \in \left[\frac{l}{2}; l \right] \end{cases}$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi x i}{l}$ $n = 1 \dots 4$	
<p style="text-align: center;">Шарнир-шарнир</p> 			$F_{\text{кр}} = 0,632 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 20,2\%$ $\Delta V(\%) = 11,97\%$
4.	$EI(x) = \begin{cases} EI_0 \left[1 - \frac{(l/2 - x)}{l} \right], & \text{if } x \in \left[0; \frac{l}{2} \right] \\ EI_0 \left[1 + \frac{(l/2 - x)}{l} \right], & \text{if } x \in \left[\frac{l}{2}; l \right] \end{cases}$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi x i}{l}$ $n = 1 \dots 4$	
<p style="text-align: center;">Шарнир-шарнир</p> 			$F_{\text{кр}} = 0,972 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 11,13\%$ $\Delta V(\%) = 6,08\%$
5.	$EI(x) = EI_0 \left[-2 \frac{(l/2 - x)^2}{l^2} + 1 \right]^3$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi x i}{l}$ $n = 1 \dots 4$	
<p style="text-align: center;">Шарнир-шарнир</p> 			$F_{\text{кр}} = 0,889 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 22,47\%$ $\Delta V(\%) = 13,57\%$

6.	$EI(x) = EI_0 \left[\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{l^2} + \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{l} + 1 \right]^3$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \left(1 - \cos \frac{\pi x i}{2l}\right),$ $n = 1, \dots, 4.$	
<p style="text-align: center;">Заделка-свободный край</p> 		$F_{\text{кр}} = 0,434 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 10,00\%$ $\Delta V(\%) = 5,42\%$	
7.	$EI(x) = EI_0 \left[0,1 + 0,9 \left(\cos^2 \frac{2\pi x}{l} \right) \right]$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin^2 \frac{\pi x i}{l}$ $n = 1 \dots 4$	
<p style="text-align: center;">Заделка-заделка</p> 		$F_{\text{кр}} = 2,99 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 23,0\%$ $\Delta V(\%) = 13,9\%$	
8.	$EI(x) = \begin{cases} EI_0; & \text{if } x \in \left[0; \frac{l}{5}\right] \\ 0,2EI_0; & \text{if } x \in \left[\frac{l}{5}; \frac{2l}{5}\right] \\ 0,5EI_0; & \text{if } x \in \left[\frac{2l}{5}; \frac{3l}{5}\right] \\ EI_0; & \text{if } x \in \left[\frac{3l}{5}; \frac{4l}{5}\right] \\ 0,2EI_0; & \text{if } x \in \left[\frac{4l}{5}; l\right] \end{cases}$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^{i+1} (l-x),$ $n = 1, \dots, 4.$	
<p style="text-align: center;">Заделка-шарнир</p> 		$F_{\text{кр}} = 1,69 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 27,2\%$ $\Delta V(\%) = 17,2\%$	

9.	$EI(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}EI_0; & \text{if } x \in \left[0; \frac{l}{5}\right) \cap \left(5 - \frac{l}{5}; l\right] \\ \frac{1}{2}EI_0; & \text{if } x \in \left[\frac{l}{5}; \frac{2l}{5}\right) \cap \left[l - \frac{2l}{5}; l - \frac{l}{5}\right] \\ EI_0; & \text{if } x \in \left[\frac{2l}{5}; l - \frac{2l}{5}\right) \end{cases} \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi x i}{l}$ $E = 0,59 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$	
<p style="text-align: center;">Шарнир-шарнир</p> 		$F_{\text{кр}} = 0,681 \text{ кН}$ $\Delta F(\%) = 14,0\%$ $\Delta V(\%) = 7,83\%$

Рассмотрим подробнее одну из девяти представленных задач. В частности, задачу №7 (вариант закрепления – «заделка»-«заделка»).

- Здесь:
- критическая сила для стержня переменной жесткости;
 - критическая сила для стержня постоянной жесткости при той же массе;
 - объём стержня переменной жесткости;
 - объём стержня постоянной жесткости при той же критической силе.

$$\Delta F(\%) = \frac{F_{\text{кр}} - F_0}{F_0} 100\%$$

$$\Delta V(\%) = \frac{V_0 - V}{V} 100\%$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin^2 \frac{\pi x i}{l};$$

$$f_i = \sin^2 \frac{\pi x i}{l}; \quad \frac{df_i}{dx} = 2 \frac{\pi i}{l} \sin \frac{\pi x i}{l} \cos \frac{\pi x i}{l} = \frac{\pi i}{l} \sin 2 \frac{\pi x i}{l}; \quad \frac{d^2 f_i}{dx^2} = 2 \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 \cos 2 \frac{\pi x i}{l};$$

$$f_k = \sin^2 \frac{\pi x k}{l}; \quad \frac{df_k}{dx} = 2 \frac{\pi k}{l} \sin \frac{\pi x k}{l} \cos \frac{\pi x k}{l} = \frac{\pi k}{l} \sin 2 \frac{\pi x k}{l}; \quad \frac{d^2 f_k}{dx^2} = 2 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cos 2 \frac{\pi x k}{l}$$

$$b_{ik} = 4 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 (ik)^2 \int_0^l EI(x) \cos 2 \frac{\pi x i}{l} \cos 2 \frac{\pi x k}{l} dx;$$

$$c_{ik} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (ik) \int_0^l \sin 2 \frac{\pi x i}{l} \sin 2 \frac{\pi x k}{l} dx; \quad \left\{ \begin{array}{ll} 0, & i \neq k \\ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot i \cdot k \cdot \frac{l}{2}, & i = k \end{array} \right\}$$

$$(b_{11} - Fc_{11})a_1 + (b_{12} - Fc_{12})a_2 + \dots + (b_{1n} - Fc_{1n})a_n = 0$$

$$(b_{21} - Fc_{21})a_1 + (b_{22} - Fc_{22})a_2 + \dots + (b_{2n} - Fc_{2n})a_n = 0$$

$$(b_{m1} - Fc_{m1})a_1 + (b_{m2} - Fc_{m2})a_2 + \dots + (b_{mn} - Fc_{mn})a_n = 0$$

или в матричной форме

$$(B - FC)X = 0$$

умножив на обратную матрицу C^{-1} , получим:

$$(C^{-1}B - FE)X = 0$$

(6)

Условием для нахождения критической нагрузки является равенство нулю определителя системы (6) которое представляет собой вековое уравнение. В результате задача определения критической силы свелась к проблеме определения собственных чисел в алгебраической теории матриц. Вычисления производились численно на программном комплексе MatLab.

Представляет интерес сравнение уровня критической сжимающей силы стержней с постоянной и переменной жесткостью одной и той же массы. При этом на наш взгляд интересны и объемные показатели стержня. Для первого и вплоть до пятого вариантов (таблица) отношение критических усилий стержней с переменной и постоянной структурами ПКМ меняется от $\Delta F(\%) = 11,13\%$ вариант 4 до $\Delta F(\%) = 22,47\%$ вариант 5. Отметим, что здесь имеет место шарнирное опирание.

На рис. 2 показана зависимость критической силы от длины стержня.

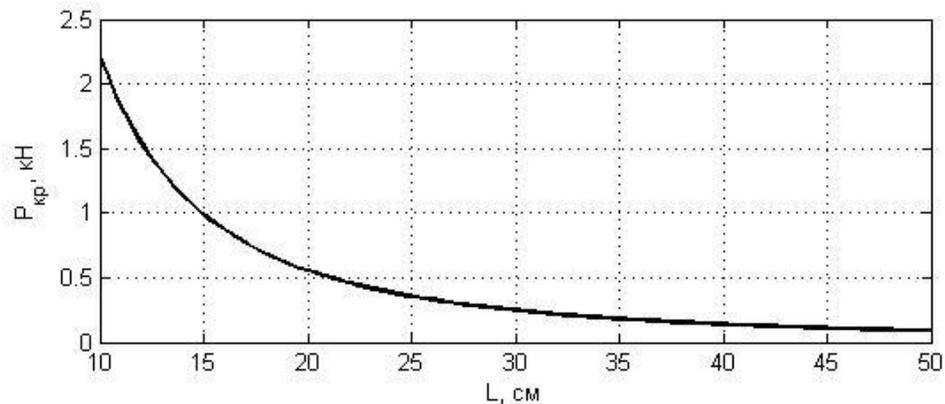


Рис. 2. Зависимость критической силы от длины стержня

ВЫВОДЫ

Разработана методика определения критических усилий для стержней переменной жесткости и составлено программное обеспечение для ее реализации. Подобраны оптимальные формы стержней. Показано, что уровень снижения массы для всех рассматриваемых форм стержней составляет до 17%.

Величина критических усилий для стержней с переменной жесткостью при варианте закрепления «жесткое защемление – шарнир» в 1,27 раза больше критических усилий стержня постоянной жесткости.

Учитывая простоту изготовления стержней с переменной жесткостью из ПКМ, их применение для уменьшения массы конструкции целесообразно и достаточно эффективно.

Литература:

1. Дибир А.Г., Макаров О.В., Пекельный Н.И. Устойчивость продольно сжатых стержней: учеб. пособие. Харьков, 2008. 43 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
3. Биргер И.А. Прочность. Устойчивость. Колебания: справочник. В 3 т. Т. 3 / под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.
4. Литвинов В.В., Языев Б.М. Энергетический метод в форме Тимошенко-Ритца для определения критических сил осевого сжатия круговой цилиндрической оболочки // Инженерный вестник Дона. 2012. Вып. 1.
5. Языев Б.М., Литвинов В.В., Бескопильный А.Н. Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при равномерном внешнем давлении // Там же. 2011. Вып. 4.

References:

1. Dibir A.G., Makarov O.V. *Stability of longitudinally compressed bars: a textbook*. Kharkov, 2008. 43 p.
2. Volmir A.S. *Stability of deformable systems*. M.: Nauka, 1967. 984 p.
3. Birger I.A. *Strength. Stability. Vibrations: ref. in 3 volumes*. V. 3 / ed. I.A. Birger, J.G. Panovko. M.: Mashinostroenie, 1968. 568 p.
4. Litvinov V.V., Yazyev B.M. *Energy method in the form of Timoshenko-Ritz for determining the critical axial compressive strength of a circular cylindrical shell*// *Engineering Journal of the Don*, 2012. № 1.
5. Yazyev B.M., Litvinov V.V., Beskopylny A.N. *Stability of circular cylindrical shells under equal external pressure*. *Engineering Journal of the Don*, 2011. № 4.