

УДК 691.714
ББК 34.327
А-64

Котесова Анастасия Александровна, ассистент кафедры технической эксплуатации и сервиса автомобилей и оборудования Ростовского государственного строительного университета, e-mail: stasi777.86@mail.ru;

Котесов Анатолий Анатольевич, аспирант кафедры технической эксплуатации и сервиса автомобилей и оборудования Ростовского государственного строительного университета, e-mail: voodoo-doll@yandex.ru;

Котова Светлана Викторовна, аспирант кафедры технической эксплуатации и сервиса автомобилей и оборудования Ростовского государственного строительного университета, e-mail: Svetlana.kotova.89@mail.ru;

Уджуху Аскер Заурбиевич, кандидат технических наук, доцент кафедры организации и управления транспортными процессами Майкопского государственного технологического университета.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА ДЛЯ СОВОКУПНОСТИ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА ПО ТВЕРДОСТИ СТАЛИ (рецензирована)

В работе изложен метод оценки параметров закона Вейбулла для совокупности конечного объема с помощью распределения крайних членов выборки. Получены значения совокупности объемом $N_c = 10^4$ твердости по Бринеллю для сталей 15ХСНД и 09Г2С по выборочным данным.

Ключевые слова: совокупность, твердость, сталь, оценка, параметры, закон Вейбулла, выборка.

Kotesova Anastasia Alexandrovna, assistant of the Department of Technical Maintenance and Service of Automobiles and Equipment, RSUCE, e-mail: stasi777.86@mail.ru;

Kotesov Anatoly Anatolievich, post graduate student of the Department of Technical Maintenance and Service of Automobiles and Equipment, RSUCE, e-mail: voodoo-doll@yandex.ru;

Kotova Svetlana Victorovna, post graduate student of the Department of Technical Maintenance and Service of Automobiles and Equipment, RSUCE, e-mail: Svetlana.kotova.89@mail.ru;

Udzhukhu Asker Zaurbievich, Candidate of Technical Sciences, assistant professor of the Department of Organization and Management of Transport Processes, Maikop State Technological University.

ANALYTICAL DETERMINATION OF WEIBULL DISTRIBUTION PARAMETERS FOR THE FINITE VOLUME AGGREGATE ON THE STEEL HARDNESS (Reviewed)

The article presents the estimation method of parameters of Weibull law for the final volume aggregate by distribution of extreme components of the sample. The values of the total volume of $N_c = 10^4$ of hardness according to Brinell for 15HSND and 09G2S steels by sampling have been obtained.

Keywords: aggregate, hardness, steel, evaluation, parameters, the law of Weibull, sampling.

В период 2004-2007 гг. разработан аналитический метод РГСУ и составлен алгоритм расчета параметров масштаба A_c , формы B_c и сдвига C_c генеральной совокупности конечного объема (далее совокупность) распределения Вейбулла (рис. 1) по выборке исходных данных [1].

В этом алгоритме N_c – объем совокупности, n – объем выборки, s – среднее квадратическое отклонение для выборки, K_{sc} – коэффициент, A_c , B_c , C_c – параметры масштаба, формы и сдвига для совокупности.

Выполненные расчеты по этому методу показали, что параметр формы B_c совокупности составляет 0,3-0,5 для выборки с параметром $b = 3,5-4$ [1].

Анализ формулы Крамера [2] (рис. 1 блок 6) показал, что она имеет два недостатка. Первый недостаток состоит в том, что среднее квадратическое отклонение совокупности S_c в этой формуле возрастает с увеличением объема выборки. Второй недостаток заключается в том, что когда объем выборки достигнет объема совокупности, то есть $n = N_c$ значение среднеквадратического отклонения для совокупности S_c окажется равным бесконечности, что не может соответствовать действительности.

Установленные противоречия формулы Крамера не дают возможности использовать ее для расчета параметров A_c , B_c , C_c совокупности по известным выборочным данным.

В связи с этим возникла необходимость создать алгоритм расчета параметров A_c , B_c , C_c для совокупности.

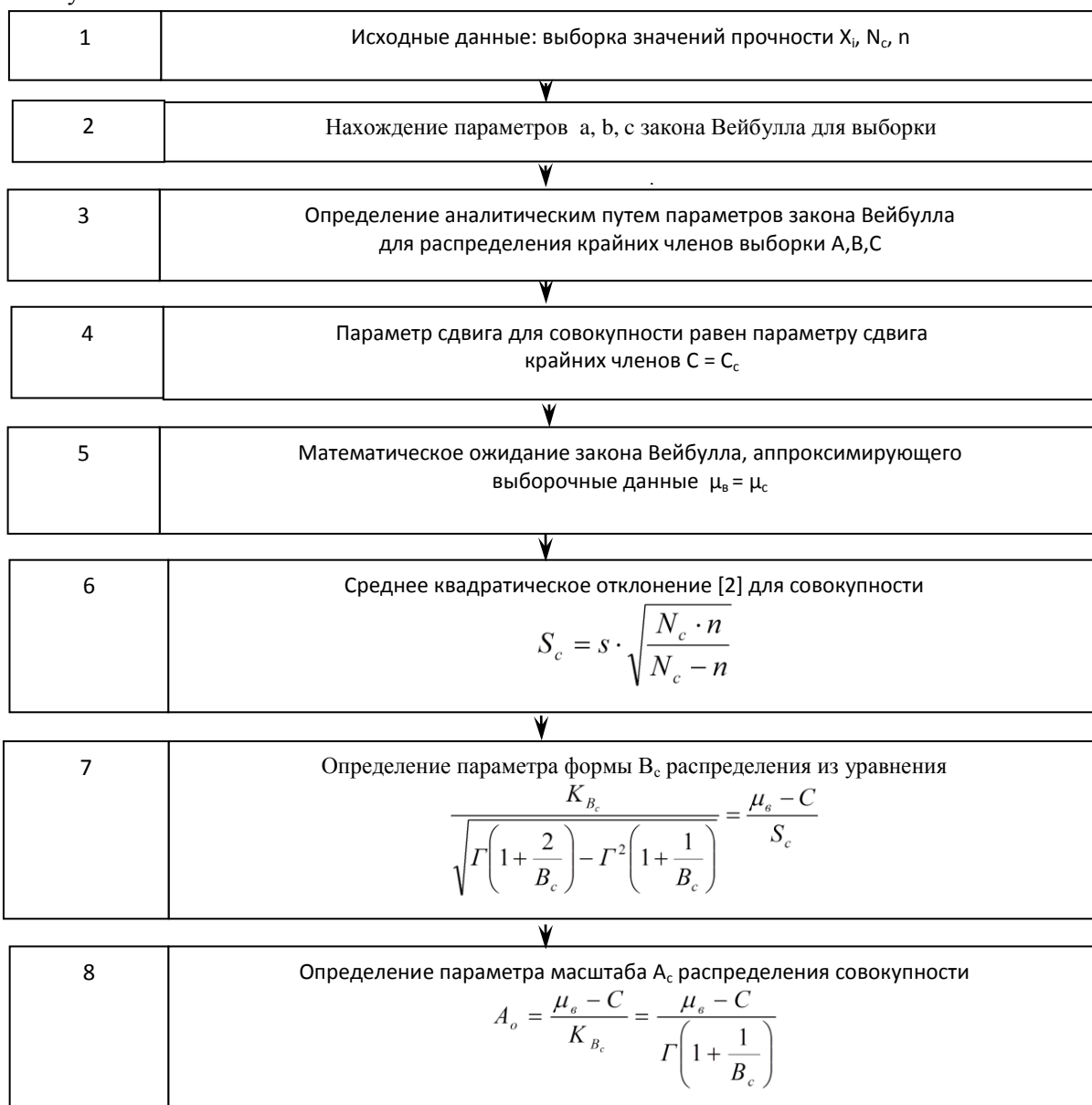


Рис. 1. Блок-схема алгоритма расчета параметров распределения Вейбулла для совокупности по выборке

Применение алгоритма (рис. 1) в расчетах показало, что параметр B_c для совокупности оказывается примерно в 10 раз меньше, чем у выборки, а форма кривой совокупности существенно отличается от формы кривой выборки. Попытка изменить форму и значение B_c предпринята путем удаления из формулы Крамера объема выборки n из числителя, что подсказало правильность такого действия, так как B_c резко возросло с 0,3-0,5 до близкого значения $b = 3,72$.

Поэтому в целях определения формы кривой распределения совокупности, соответствующей форме выборочной кривой в формуле Крамера [2] (рис. 1 блок 6), в алгоритме (рис. 4) произведена замена объема выборки n в числителе на коэффициент k , влияющий на значение среднее квадратического отклонения совокупности S_c и параметра формы B_c совокупности; здесь m – число выборок.

Выполненный расчет параметров A_c , B_c , C_c по алгоритму (рис. 2) для твердости НВ стали 15ХСНД позволил получить следующие значения: $A_c = 31,831$; $B_c = 3,705$; $C_c = 116,000$. Необходимо было найти оптимальное значение B_c . Для этого в формуле (рис. 2 блок 6) значение k изменялось в интервале от 1 до 100. В качестве критерия оптимизации использована относительная ошибка при сравнении мод распределения выборки и совокупности, где $\delta = 0,173\%$.

Предварительно установлено, что в интервале $k = 2-5$ находилось оптимальное значение B_c .

Согласно принципу пропорциональности (максимального соответствия) выборки из совокупности конечного объема ожидаются близкие значения моды выборки и плотности статистического распределения совокупности прочности, нагруженности, ресурса и т.п.

Для трех параметрического закона Вейбулла плотность вероятностного распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{x-c}{a} \right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{x-c}{a} \right)^b}$$

Когда $f(x) \rightarrow \max$, тогда для выборки первая производная $f'_e(x) = 0$ и для совокупности первая производная $f'_c(x) = 0$ для этих условий мода выборки $M_e \rightarrow \text{opt}$ и также мода совокупности $M_c \rightarrow \text{opt}$.

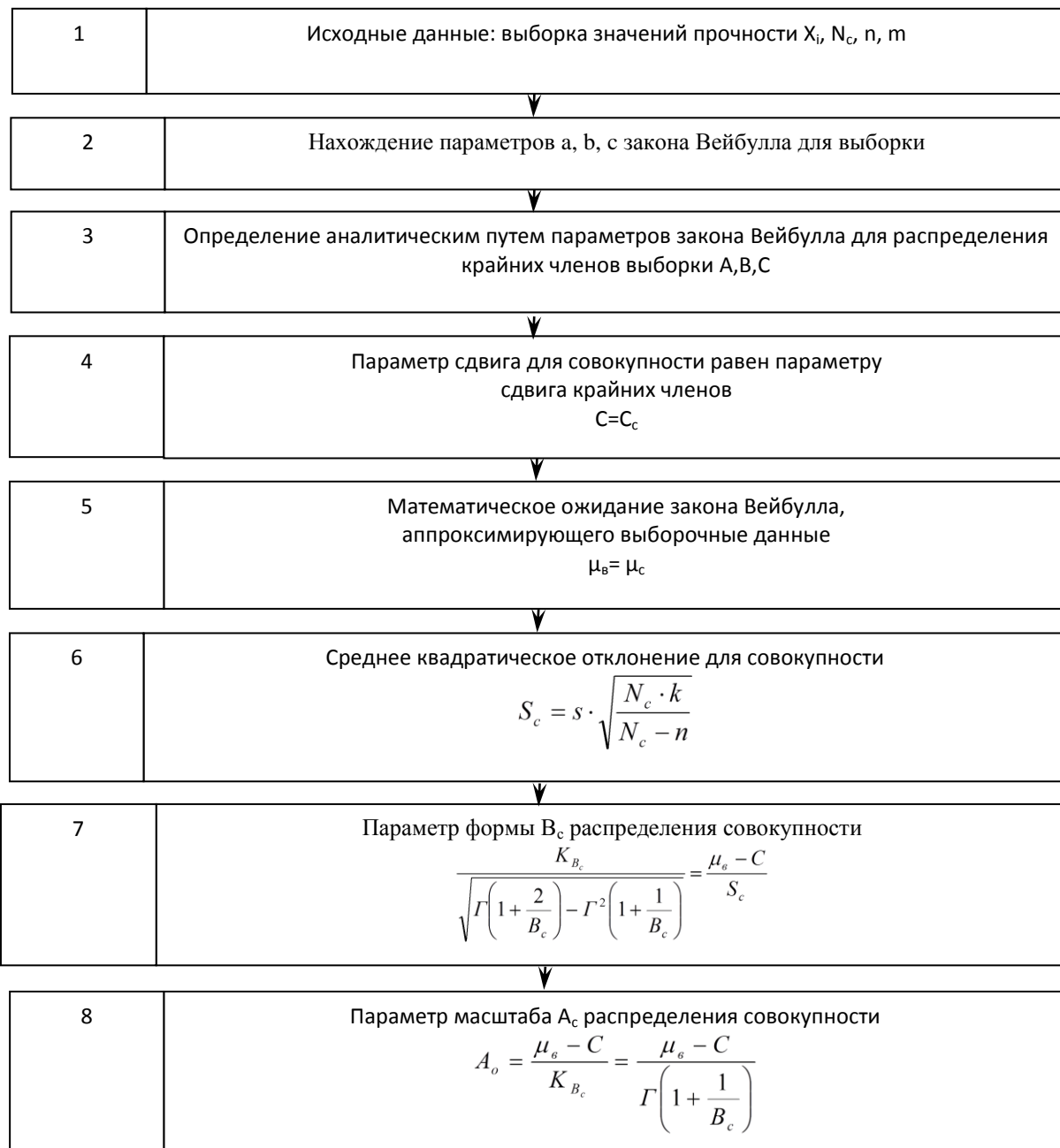


Рис. 2. Блок-схема алгоритма расчета параметров распределения Вейбулла для совокупности по выборке (после замены n на k)

Для выборки:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(a^2 \cdot b \cdot (x-c)^{2b} + (a^{b+2} - a^{b+2}b) \cdot (x-c)^b) \cdot e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b}}{a^{2b} \cdot b \cdot x^2 - 2a^{2b} \cdot b \cdot c \cdot x + a^{2b} \cdot b \cdot c^2};$$

для совокупности:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(A_c^2 \cdot B_c \cdot (x-C_c)^{2B_c} + (A_c^{B_c+2} - A_c^{B_c+2}B_c) \cdot (x-C_c)^{B_c}) \cdot e^{-\left(\frac{x-C_c}{A_c}\right)^{B_c}}}{A_c^{2B_c} \cdot B_c \cdot x^2 - 2A_c^{2B_c} \cdot B_c \cdot C_c \cdot x + A_c^{2B_c} \cdot B_c \cdot C_c^2}$$

По принципу соответствия выборки и совокупности конечного объема (репрезентативности выборки) ожидается близкая форма кривой распределения совокупности к форме выборки и поэтому близкие значения параметров формы b и B_c .

На величину $\Delta = M_g - M_c$, влияет параметр формы B_c распределения Вейбулла совокупности. Оптимальное значение параметра B_c будет соответствовать минимальному различию мод, т.е. Δ_{\min} .

Согласно принципу соответствия, мода совокупности имеет максимальную ординату, т.е. вероятность, следовательно, мода выборки также будет иметь максимальную ординату, т.е. вероятность с некоторой ошибкой. Выполненное моделирование с помощью ЭВМ (компьютерный эксперимент) путем получения выборок из совокупности показало, что значение параметров формы b и B_c отличаются на 0,012-0,440 %.

Этот компьютерный эксперимент предусматривал получение 200 выборок по 56 значений и построение графика (рис. 3), из которого видно, что относительная ошибка δ мод составила от 0,027 до 2% , что является допустимым значением, которое включает в себя до 95% эксперимента.

На рис. 3 представлен график изменения ошибки δ моды для m выборок (данные выборки расположены в порядке проведения эксперимента).

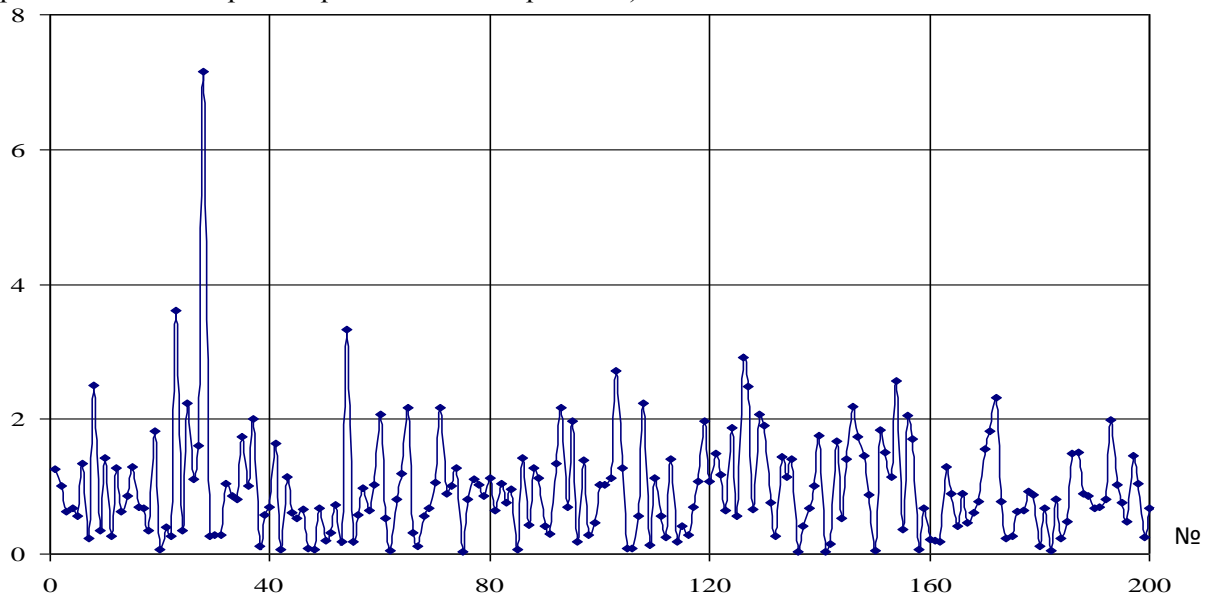


Рис. 3. Ошибки δ моды для m выборок (данные выборки расположены в порядке проведения эксперимента): № — номер эксперимента на ЭВМ

При таком низком размахе мода выборки и мода совокупности по причине соответствия (репрезентативности) должны незначительно отличаться. При равенстве параметров формы выборок $b = B_c$, различие между модами будет минимальным.

Так как параметр сдвига C_c соответствует вероятности отказа, равной нулю, то другие оценки параметров сдвига C распределения крайних членов по физическому смыслу не могут быть меньше, чем C_c . Далее полагаем $C_c = C$ с ошибкой 3-5 % [2]. Достаточного обоснования величины этой сравнительно большой ошибки не приводится. В целях тщательного определения величины данной относительной ошибки выполнено моделирование (компьютерный эксперимент) для параметров детали (твёрдость, предел прочности, ресурс) из совокупности $N_c = 10^4$ путем извлечения выборок объемом $n = 50$ в количестве $m = 200$. Относительные ошибки при сравнении сдвигов совокупности и крайних членов

выборки составили 0,1-0,9% (среднее значение ошибки составляет $\delta_{cp} = 0,378\%$) [3], что во много раз меньше 3-5% и обеспечивает достаточно корректное определение C_c через C .

С учетом принципа соответствия скорректирован алгоритм расчета параметров A_c , B_c , C_c распределения Вейбулла совокупности (рис. 4).

Для апробации этого алгоритма выполнен расчет параметров $A_c = 31,824$; $B_c = 3,720$; $C_c = 116,000$ для симметричной выборки и построен график (рис. 5) плотностей распределения выборочных данных и совокупности, из которого видно, что расхождения мод весьма малы.

Ошибка C и C_c составляет $\delta = 10,5\%$, $C_\gamma = 68,019$ для $\gamma = 0,999$.

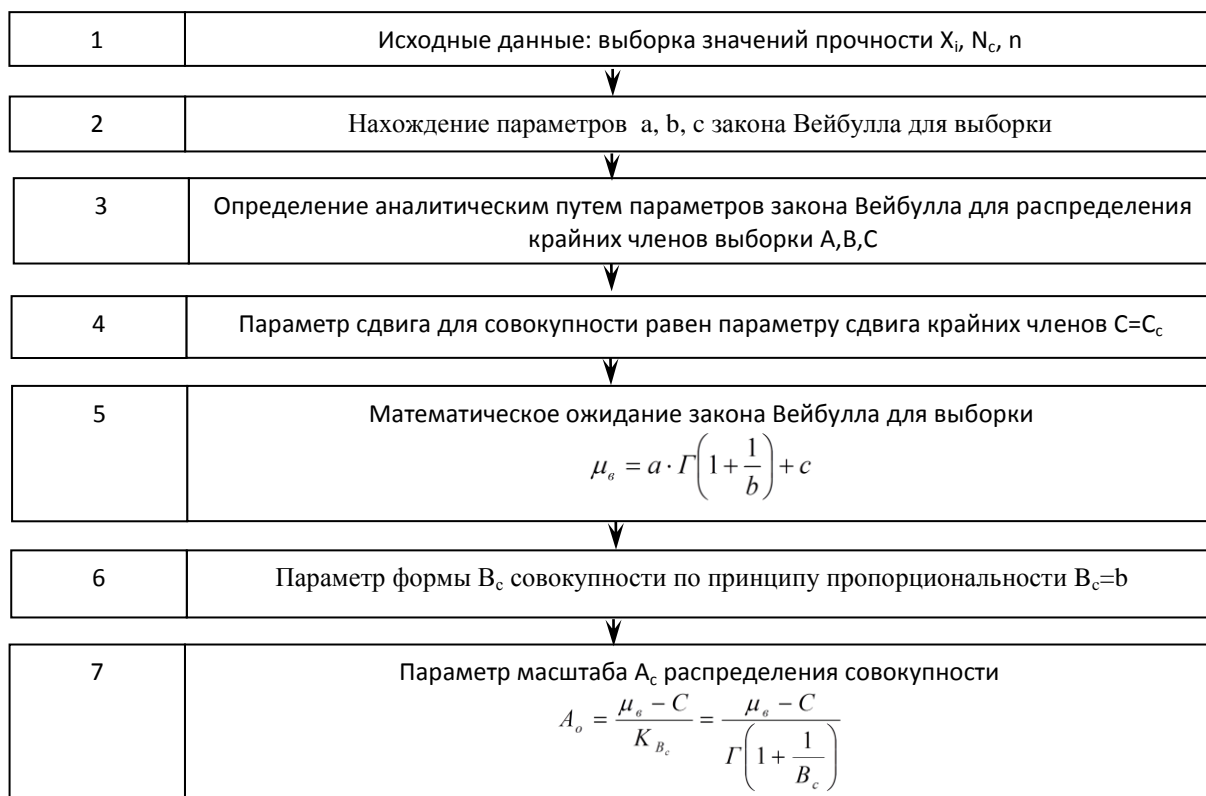


Рис. 4. Блок-схема алгоритма расчета параметров распределения Вейбулла для совокупности по выборке

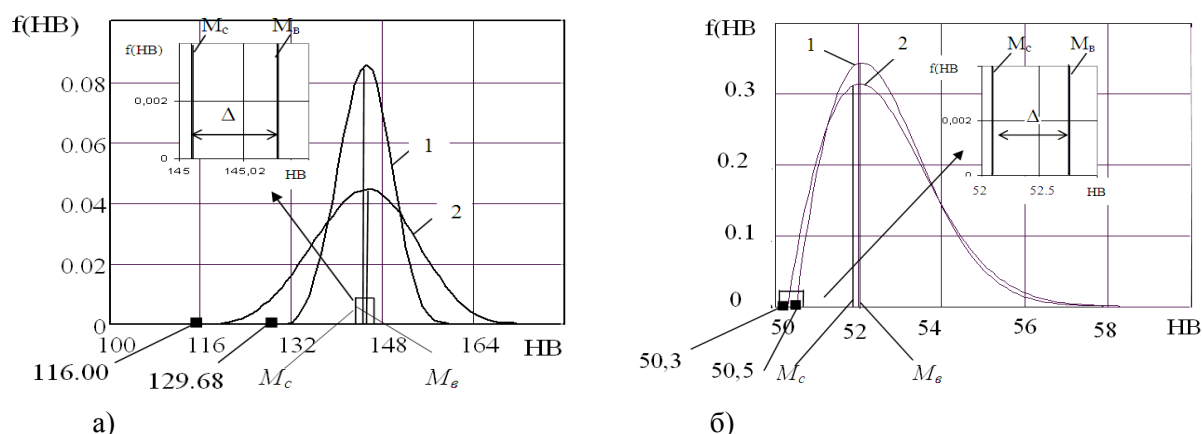


Рис. 5. Плотности распределения выборочных данных (1) и совокупности (2) для симметричной (а) и асимметричной (б) выборки; M_a , M_c – моды выборки и совокупности

Из сравнения значений, полученных по алгоритмам (рис. 2 и 4), имеем расхождения для параметров A_c , B_c , C_c

$$\delta_{A_c} = \frac{A_{c_4} - A_{c_7}}{A_{c_4}} \cdot 100\% = \frac{31,831 - 31,824}{31,831} \cdot 100\% = 0,022\% ;$$

$$\delta_{B_c} = \frac{B_{c_7} - B_{c_4}}{B_{c_7}} \cdot 100\% = \frac{3,720 - 3,705}{3,720} \cdot 100\% = 0,403\% .$$

Расхождения значений δ_{B_c} , полученные по алгоритмам (рис. 2 и 4), хотя и достигают 0,403%, вместе с тем расхождение для параметра δ_{A_c} составило 0,022%, а расхождения мод для распределения выборки и совокупности для алгоритма (рис. 2) 0,163%, а для алгоритма (рис. 4) – 0,173%.

Таким образом, эти различия весьма малы и свидетельствуют о хорошем соответствии формы кривых плотности распределения совокупности и выборки, полученные новым аналитическим методом по алгоритму (рис. 4).

Также по новому аналитическому методу рассчитаны параметры $A_c = 2,6$, $B_c = 1,87$, $C_c = 50,3$ для асимметричной выборки и построен график (рис. 5б) плотностей распределения выборочных данных и совокупности, из которого видно, что мода выборки и мода совокупности практически равны с ошибкой $\delta = 0,096$.

Исходя из всего изложенного, можно сделать вывод, что новый аналитический метод подходит, как для симметричной выборки, так и для асимметричной.

Литература:

1. Определение параметров распределения Вейбулла для совокупности конечного объема по выборке прочностных характеристик сталей / В.Е. Касьянов [и др.]. Деп. в ВИНТИ 03.03.04, №389.
2. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
3. Анализ соотношения сдвигов для крайних членов выборок и совокупности конечного объема параметров надежности машин и деталей / В.В. Касьянов [и др.]. Деп. в ВИНТИ 24.01.2012, №20-B2012.

References:

1. *Defining the parameters of the Weibull distribution for the set of the final volume in the sample of strength properties of steel / Kasyanov V.E. [and oth.]. Dep. in VINITI 03.03.04, № 389.*
2. *Cramer G. Mathematical methods of statistics. M.: Mir, 1975. 648p.*
3. *Analysis of the ratio of shifts to the extreme terms of the aggregate sample and the final volume of reliability parameters of machines and parts / Kasyanov V.V. [and oth.]. Dep. in VINITI 24.01.2012, № 20-B2012.*