

УДК 624.07:620.162.3

ББК 30.121

Ж-91

*Журавлев Александр Александрович, доктор технических наук, профессор кафедры МД и ПК Ростовского государственного строительного университета;*

*Журавлев Дмитрий Александрович, кандидат технических наук, доцент кафедры архитектурного проектирования Ростовского государственного строительного университета;*

*Саенко Наталья Николаевна, старший преподаватель кафедры строительных и общепрофессиональных дисциплин Майкопского государственного технологического университета, т.:89034660484.*

## ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ СКРУЧЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ

(рецензирована)

*В рассматриваемой статье изложена методика расчета на продольный изгиб стержня квадратного сечения скрученной конфигурации. Решается задача по определению критического значения консервативной силы, сжимающей стержень с одним заземленным концом, имеющий на противоположном конце скользящую заделку. Проиллюстрировано применение энергетического критерия устойчивости на основе выражений функции перемещений, полученных в результате прямого интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих упругую линию стержня с повернутыми поперечными сечениями.*

*Ключевые слова: продольный изгиб, потенциальная энергия, стержень скрученной конфигурации, критическая сила, функции перемещений.*

*Zhuravlev Alexander Alexandrovich, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of MD and PC (RSUCI);*

*Zhuravlev Dmitry Alexandrovich, Candidate of Technical Sciences, associate professor of the Department of Architectural Design (RSCI);*

*Saenko Natalia Nicholaevna, senior lecturer of the Department of Construction and General Professional Disciplines, Maikop State Technological University, tel: 89034660484.*

## BUCKLING OF PRISMATIC ROD OF A TWISTED CONFIGURATION

(Reviewed)

*The article considers the method of calculating the buckling of the rod of the square cross-section of a twisted configuration. The problem of determining the critical value of the conservative force, compressing the rod with one end clamped and having the sliding termination on the opposite end has been solved. The application of the energetic stability criterion based on the expression of the displacement function resulting from the direct integration of the differential equations describing the elastic line of a rod with a rotated cross-sections has been illustrated.*

*Keywords: buckling, potential energy, rod of the twisted configuration, the critical force of the displacement.*

В пространственных стержневых конструкциях кружально-сетчатых сводов элементы изготавливаются крыловатой формы в связи с их укладкой по двум взаимно пересекающимся направлениям, соответствующим винтовым линиям на цилиндрической поверхности. Такая крыловатая форма балочных элементов является характерной для различного рода рандбалок, входящих в состав оболочечных конструкций в форме гиперболического параболоида, ограниченных по контуру прямолинейными образующими.

Следует отметить, что подобная ситуация может иметь место с призматическими элементами стержневых конструкций, обладающими начальными несовершенствами формы, которые заключаются в наличии углов поворота их концевых сечений.

Из сказанного становится понятным, что решение задачи о продольном изгибе призматических стержней скрученной конфигурации приобретает большое прикладное значение.

При разработке деформационной теории расчета крыловатой формы элементов принимается, что поперечные сечения таких элементов являются аффинными, и предполагаются прямолинейной ось скрученного элемента, а также постоянными углы поворота  $d\varphi/dx$  центральных осей [1].

Определим критическую нагрузку для призматического стержня в случае, когда нижний его конец неподвижно зашпелен, в то время как верхний имеет скользящую заделку.

Пусть поперечное сечение стержня таково, что  $J_y = J_z = J$ , причем начало координат располагается в середине длины стержня так, как показано на рис. 1а.

При малых значениях силы  $N$ , сохраняющей во все время нагружения свое вертикальное направление, ось стержня остается прямолинейной и в его сечениях возникают напряжения сжатия  $\sigma_{xx} = \frac{N}{F}$ .

При достижении критического значения силы  $N$  прямолинейная форма равновесия стержня перестает быть устойчивой.

Обозначим через  $u_y$  и  $u_z$  перемещения вдоль  $y$  и  $z$  некоторой точки, принадлежащей осевой линии элемента 1-2 стержня в искривленном состоянии в сечении на расстоянии  $x$  от начала координат.

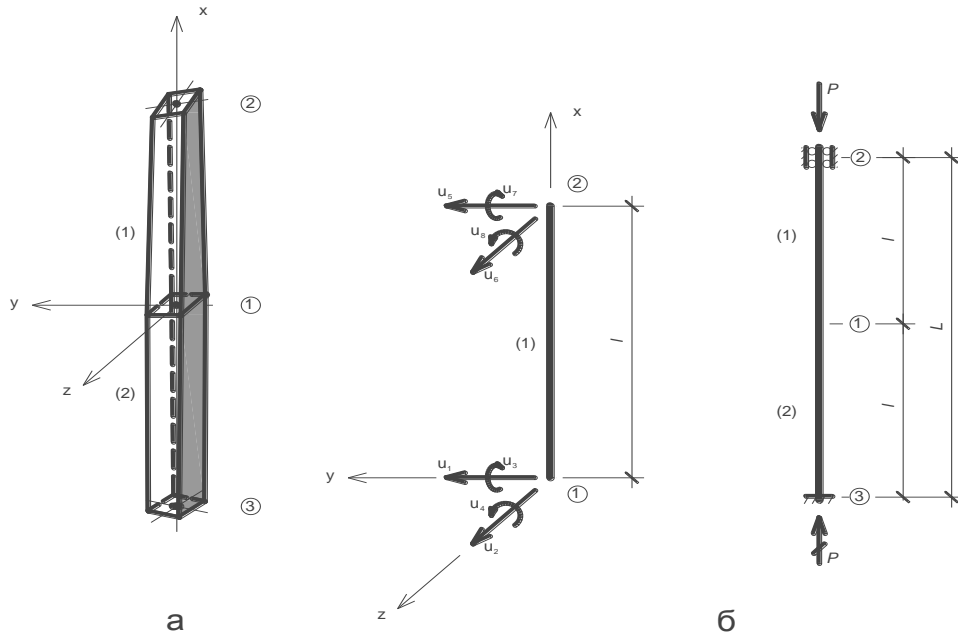


Рис. 1. Стержень скрученной конфигурации: а – общий вид; б – расчетная схема стержня

Как показано в работе [2], эти функции, описывающие упругую линию элемента стержня квадратного сечения, имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u_y = & [(1-3\xi^2 + 2\xi^3) \cos\varphi_0\xi + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \varphi_0 \sin\varphi_0\xi] u_1 + \\
 & + [-(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \varphi_0 \cos\varphi_0\xi + (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \sin\varphi_0\xi] u_2 - \\
 & - (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \sin\varphi_0\xi \cdot \ell u_3 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \cos\varphi_0\xi \cdot \ell u_4 + \\
 & + \{ [(3 \cos\varphi_0 + \varphi_0 \sin\varphi_0) \xi^2 - (2 \cos\varphi_0 + \varphi_0 \sin\varphi_0) \xi^3] \cos\varphi_0\xi + \\
 & + [(3 \sin\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) \xi^2 - (2 \sin\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) \xi^3] \sin\varphi_0\xi \} u_5 + \\
 & + \{ [- (3 \sin\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) \xi^2 + (2 \sin\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) \xi^3] \cos\varphi_0\xi + \\
 & + [(3 \cos\varphi_0 + \varphi_0 \sin\varphi_0) \xi^2 - (2 \cos\varphi_0 + \varphi_0 \sin\varphi_0) \xi^3] \sin\varphi_0\xi \} u_6 + \\
 & + [-(\xi^2 - \xi^3) \sin\varphi_0 \cos\varphi_0\xi + (\xi^2 - \xi^3) \cos\varphi_0 \sin\varphi_0\xi] \ell u_7 + \\
 & + [-(\xi^2 - \xi^3) \cos\varphi_0 \cos\varphi_0\xi - (\xi^2 - \xi^3) \sin\varphi_0 \sin\varphi_0\xi] \ell u_8, \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_z = & [-(1-3\xi^2 + 2\xi^3) \sin\varphi_0\xi + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \varphi_0 \cos\varphi_0\xi] u_1 + \\
 & + [(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \varphi_0 \sin\varphi_0\xi + (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \cos\varphi_0\xi] u_2 - \\
 & - (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \cos\varphi_0\xi \cdot \ell u_3 - (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \sin\varphi_0\xi \cdot \ell u_4 + \\
 & + \{ [- (3 \cos\varphi_0 + \varphi_0 \sin\varphi_0) \xi^2 + (2 \cos\varphi_0 + \varphi_0 \sin\varphi_0) \xi^3] \sin\varphi_0\xi + \\
 & + [(3 \sin\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) \xi^2 - (2 \sin\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) \xi^3] \cos\varphi_0\xi \} u_5 + \\
 & + \{ [(3 \sin\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) \xi^2 - (2 \sin\varphi_0 - \varphi_0 \cos\varphi_0) \xi^3] \sin\varphi_0\xi + \\
 & + [(3 \cos\varphi_0 + \varphi_0 \sin\varphi_0) \xi^2 - (2 \cos\varphi_0 + \varphi_0 \sin\varphi_0) \xi^3] \cos\varphi_0\xi \} u_6 + \\
 & + [(\xi^2 - \xi^3) \sin\varphi_0 \sin\varphi_0\xi + (\xi^2 - \xi^3) \cos\varphi_0 \cos\varphi_0\xi] \ell u_7 + \\
 & + [(\xi^2 - \xi^3) \cos\varphi_0 \sin\varphi_0\xi - (\xi^2 - \xi^3) \sin\varphi_0 \cos\varphi_0\xi] \ell u_8, \tag{2}
 \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta = x/l$ , а под  $\varphi_0$  понимается угол поворота сечения элемента стержня 1-2 в точке 2. В силу того, что  $\varphi = \frac{\varphi_0}{l}x$ , угол поворота сечения в точке 3 равен  $-\varphi_0$ .

Следует отметить, что выбранные функции перемещений являются результатом прямого интегрирования системы двух дифференциальных уравнений четвертого порядка, описывающих упругую линию стержня скрученной конфигурации при его выпучивании. Что касается узловых перемещений  $u_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ), то их положительные направления соответствуют принятым на рис. 1б.

Нетрудно убедиться в том, что выражения (1) и (2) удовлетворяют геометрическим граничным условиям: функции перемещений  $u_y$  и  $u_z$ , а также их производные  $du_y/d\xi$  и  $du_z/d\xi$  принимают значения узловых перемещений в точках 1 и 2.

Поскольку для элемента 1-2, представляющего собой верхнюю половину стержня, линейные и угловые перемещения в заделке невозможны, то в выражениях (1) и (2) в дальнейшем принимается  $U_5 = U_6 = U_7 = U_8 = 0$ .

Потенциальная энергия, накапливаемая в рассматриваемом элементе стержня, может быть записана следующим образом:

$$U = \frac{EJ_y}{2\ell^3} \int_0^1 \left(\frac{d^2 u_y}{d\xi^2}\right)^2 d\xi + \frac{EJ_z}{2\ell^3} \int_0^1 \left(\frac{d^2 u_z}{d\xi^2}\right)^2 d\xi + \frac{N}{2\ell} \int_0^1 \left[\left(\frac{du_y}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{du_z}{d\xi}\right)^2\right] d\xi. \quad (3)$$

Подставив выражения производных функций формы в уравнение (3), после интегрирования получим

$$\begin{aligned} U = & \left[ \frac{EJ}{2\ell^3} \frac{1}{105} (1260 + 336\varphi_0^2 + 39\varphi_0^4 + \varphi_0^6) (u_1^2 + u_2^2) + \right. \\ & + \frac{1}{105} (420 + 84\varphi_0^2 + \varphi_0^4) (\ell^2 u_3^2 + \ell^2 u_4^2) + \\ & + \frac{1}{210} (1260 + 336\varphi_0^2 + 11\varphi_0^4) (2u_1 \ell u_4 - 2u_2 \ell u_3) - \\ & - \frac{1}{105} (42\varphi_0^3 + \varphi_0^5) (2u_1 \ell u_3 + 2u_2 \ell u_4) \left. \right] + \\ & + \frac{N}{2\ell} \left[ \frac{1}{105} (126 + 11\varphi_0^2 + \varphi_0^4) (u_1^2 + u_2^2) + \right. \\ & + \frac{1}{105} (14 + \varphi_0^2) (\ell^2 u_3^2 + \ell^2 u_4^2) + \frac{1}{210} (21 + 11\varphi_0^2) (2u_1 \ell u_4 - \\ & \left. - 2u_2 \ell u_3) + \frac{1}{105} (7\varphi_0 - \varphi_0^3) (2u_1 \ell u_3 - 2u_2 \ell u_4) \right], \quad (4) \end{aligned}$$

Судя по выражению 4, энергия как для отдельного элемента 1-2, так и для стержня в целом, является квадратичной функцией относительно узловых перемещений  $u_1, u_2, \ell u_3$  и  $\ell u_4$ . Узловые силы в точке 1 для рассматриваемого элемента стержня 1-2 определим с помощью теоремы Кастилиано

$$S_i = \frac{\partial U}{\partial U_i}; \quad (i=1,2,3,4), \quad (5)$$

Если приравнять нулю реакции в связях, накладываемых в средней части длины выпученного стержня, то придем к системе из четырех однородных уравнений относительно узловых перемещений  $u_1, u_2, \ell u_3$  и  $\ell u_4$ .

Полагая линейные и угловые перемещения при выпучивании призматического стержня скрученной конфигурации отличными от нуля, имеем условие нетривиального решения уравнений.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{13} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

Коэффициенты этого определителя получаются равными:

$$a_{11} = a_{22} = 1260 + 336\varphi_0^2 + 39\varphi_0^4 + \varphi_0^6 - (126 + 11\varphi_0^2 + \varphi_0^4)\lambda, \quad (7)$$

$$a_{13} = a_{24} = -(42\varphi_0^3 + \varphi_0^5) - (7\varphi_0 - \varphi_0^3)\lambda, \quad (8)$$

$$a_{33} = a_{44} = 420 + 84\varphi_0^2 + \varphi_0^4 - (14 + \varphi_0^2)\lambda, \quad (9)$$

Здесь использовано обозначение

$$\lambda = \frac{Pl^2}{EI} \quad (10)$$

Развертывая определитель, приходим к квадратному уравнению относительно параметра  $\lambda$ :

$$(1764 + 231\varphi_0^2 + 39\varphi_0^4)\lambda^2 - 2(35280 + 10584\varphi_0^2 + 1470\varphi_0^4 + 39\varphi_0^6)\lambda + 529200 + 246960\varphi_0^2 + 45864\varphi_0^4 + 2268\varphi_0^6 + 39\varphi_0^8 = 0, \quad (11)$$

Для стержня нескрученной конфигурации, полагая в (11)  $\varphi_0 = 0$ , получим следующее уравнение:

$$\lambda^2 - 40\lambda + 300 = 0, \quad (12)$$

Наименьший корень этого уравнения определяет критическую силу:

$$P_{кр} = \frac{40EI}{L^2} \quad (13)$$

Как известно, точное решение приводит для рассматриваемого случая концевых закреплений стержня к коэффициенту  $4\pi^2$ ; таким образом, ошибка составляет лишь 1,3%.

Если принять  $lu_3 = lu_4 = 0$  и считать отличными от нуля только линейные перемещения  $u_1$  и  $u_2$ , то в таком случае будем иметь

$$P_{кр} = \frac{4EI}{L^2} \cdot \frac{1260 + 336\varphi_0^2 + 39\varphi_0^4 + \varphi_0^6}{126 + 11\varphi_0^2 + \varphi_0^4}, \quad (14)$$

Выражение (14) можно изобразить графически линией АСВ (рис. 2), если принять  $\varphi_0$  за абсциссы, а  $P_{кр}^* = P_{кр} L^2 / (EI)$  – за ординаты. Эта кривая отсекает на оси ординат отрезок, который соответствует численному значению  $P_{кр}^*$  на основании выражения (13).

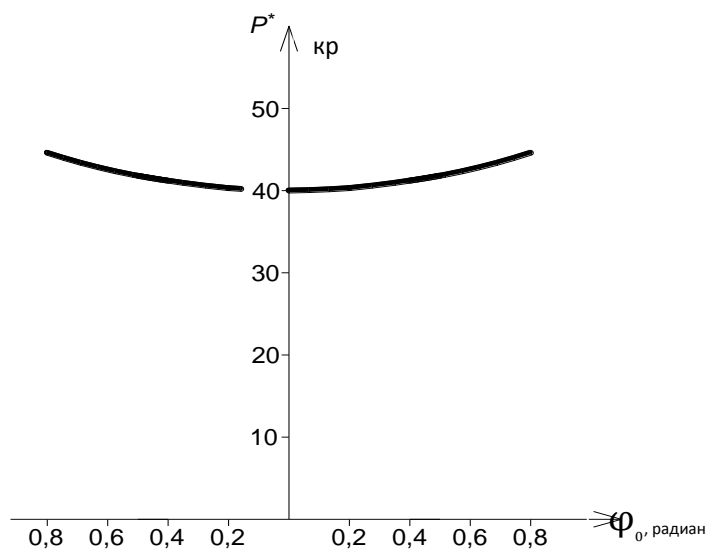


Рис. 2. Зависимость параметра критической нагрузки от углов поворота концевых сечений стержня

Вычисления показали, что значения параметра критической нагрузки, найденные с помощью уравнения (11) и по формуле (14), оказываются практически одинаковыми.

Как видно из рис. 2, кривая АСВ является пологой кривой. С изменением угла поворота концевых сечений  $\varphi_0$  в интервале  $0 < \varphi_0 < 11,5^\circ$  параметр критической нагрузки  $P_{кр}^*$  увеличивается весьма незначительно. При увеличении  $\varphi_0$  до  $45^\circ$  параметр  $P_{кр}^*$  возрастает лишь на 10% по отношению к его значению для призматического стержня нескрученной конфигурации.

***Литература:***

1. Журавлев А.А., Журавлев Д.А. Сопротивление продольному изгибу призматического стержня с повернутыми относительно центра тяжести поперечными сечениями // Известия РГСУ. 2004. №8. С. 27-36.

2. Журавлев Д.А., Журавлев А.А., Шапиро Г.Е. Изгиб деревянной призматической балки скрученной конфигурации // Там же. 2010. №14. С. 21-29.

***References:***

1. Zhuravlev A.A., Zhuravlev D.A. Resistance to buckling of a prismatic rod with rotated cross sections regarding the center of gravity // Proceedings of RSUCE. 2004. № 8. P. 27-36.

2. Zhuravlev D.A., Zhuravlev A.A., Shapiro G.E. Bending of wooden prismatic beams of twisted configuration // Proceedings RSUCI. 2010. № 14. P. 21-29.