

УДК 532.5
ББК 22.253.3
К-71

Кошевой Евгений Пантелеевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой машин и аппаратов пищевых производств Кубанского государственного технологического университета, т. (861) 2752279;

Блягоз Хазрет Рамазанович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры технологий, машин и оборудования пищевых производств Майкопского государственного технологического университета, ректор Майкопского государственного технологического университета, т. (8772) 570011;

Схаляхов Анзаур Адамович, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры технологий, машин и оборудования пищевых производств, декан технологического факультета Майкопского государственного технологического университета, т. (8772) 570412;

Косачев Вячеслав Степанович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры машин и аппаратов пищевых производств Кубанского государственного технологического университета, т. (861) 2752279;

Заславец Александр Алексеевич, соискатель кафедры машин и аппаратов пищевых производств Кубанского государственного технологического университета, т. (861) 2752279.

КРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ГИДРОДИНАМИКИ ФОРМИРОВАНИЯ КАПЛИ В ВИДЕ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИЙ (рецензирована)

В работе представлен метод сплайн аппроксимации для обобщения численного моделирования и получения многомерной критериальной модели гидродинамики формирования капли.

Ключевые слова: число Рейнольдса, капиллярное число, численное моделирование, метод сплайн аппроксимации.

Koshevoi Eugene Panteleevich, Doctor of Technical Sciences, professor, Head of the Department of Machines and Apparatus of Food Production, Kuban State Technological University, tel.: (861) 2752279;

Blyagoz Khazret Ramazanovich, Doctor of Technical Sciences, professor, professor of The Department of Technology, Machinery and Equipment for Food Production of Maikop State Technological University, the rector of Maikop State Technological University, tel.: (8772) 570011;

Skhalyahov Anzaur Adamovich, Doctor of Technical Sciences, associate professor, professor of The Department of Technology, Machinery and Equipment for Food Production of Maikop State Technological University, dean of the Faculty of Technology Maikop State Technological University, tel.: (8772) 570 412;

Kosachev Vyacheslav Stepanovich, Doctor of Technical Sciences, professor, professor of the Department of Machines and Apparatus of Food Production, Kuban State Technological University, tel.: (861) 2752279;

Zaslavets Alexander Alexeevich, seeker of the Department of Machines and Apparatus of Food Production, Kuban State Technological University, tel.: (861) 2752279.

CRITERION DEPENDENCES OF DROP FORMATION HYDRODYNAMICS IN THE FORM OF SPLINE – APPROXIMATIONS (reviewed)

This paper presents a method of spline approximation for a generalization of the numerical modeling and obtaining of multi-dimensional criterion model of drop formation hydrodynamics.

Keywords: Reynolds number, capillary number, numerical simulation, the method of spline approximation.

В результате численного решения уравнений гидродинамической модели формирования капли установлено влияние целого ряда параметров [1], на основе которых сформированы обобщенные переменные. В частности использованы число Рейнольдса Re , которое измеряет значение сил инерции относительно вязких сил, капиллярное число Ca , которое измеряет значение вязких сил относительно сил поверхностного натяжения и гравитационное число Бонда G , которое измеряет значение сил тяжести относительно сил поверхностного натяжения. Дополнительно исследовали влияние относительной вязкости λ и соотношение радиуса мембраны к радиусу поры R_t/R .

Численное моделирование выполнялось в широком диапазоне изменения параметров. Количественные результаты обобщались в виде графиков отношения предельной длины L в момент отрыва капли L_d от радиуса отверстия L_d/R , а также отношения объема капли V к кубу радиуса отверстия V/R^3 .

Ниже представлен метод сплайн аппроксимации [2] для обобщения численного моделирования и получения многомерной критериальной модели гидродинамики формирования капли. В данной работе этот метод представлен для отдельной зависимости от числа Рейнольдса Re и парной зависимости от числа Рейнольдса Re и числа Капиллярности Ca .

Для получения гладкой функциональной зависимости используем сплайн-аппроксимацию заданной в точках графика зависимости на отрезке $[a, b]$, разбитом на части $[x_{i-1}, x_i]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Для аппроксимации используем кубический сплайн дефекта 1, представляющий собой функцию $S(Re)$, которая:

- на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ является многочленом степени не выше третьей;
- имеет непрерывные первую и вторую производные на всём отрезке $[a, b]$;
- в точках x_i выполняется равенство $S(x_i) = f(x_i)$, т. е. сплайн $S(x)$ интерполирует функцию

$V/R^3[\text{Log}(Re)]$ в точках $x_i = \text{Log}(Re_i)$.

Для однозначного задания сплайна накладываем дополнительные требования на границах сплайна:

$$S''(a) = S''(b) = 0.$$

В этом случае согласно теореме Шёнберга-Уитни об условиях существования интерполяционного сплайна существует ровно один естественный сплайн $S(x)$, удовлетворяющий перечисленным выше условиям.

Обозначим шаг аппроксимации: $h_i = x_i - x_{i-1}$. Тогда на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция $S(x)$ есть полином третьей степени $S_i(x)$, коэффициенты которого необходимо определить. Запишем для удобства $S_i(x)$ в виде:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3.$$

Тогда

$$S_i(x_i) = a_i, \quad S_i'(x_i) = b_i, \quad S_i''(x_i) = c_i.$$

Условия непрерывности всех производных до второго порядка включительно записываются в виде:

$$\begin{aligned} S_i(x_{i-1}) &= S_{i-1}(x_{i-1}); \\ S_i'(x_{i-1}) &= S_{i-1}'(x_{i-1}); \\ S_i''(x_{i-1}) &= S_{i-1}''(x_{i-1}), \end{aligned}$$

а условия интерполяции в виде:

$$S_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}).$$

Отсюда получаем зависимости для вычисления коэффициентов сплайна:

$$a_i = f(x_i);$$

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \right);$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i};$$

$$b_i = -\frac{1}{2}h_i c_i - \frac{1}{6}h_i^2 d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}.$$

Если учесть, что $c_0 = c_n = 0$, то вычисление c_i можно провести с помощью метода прогонки для трёхдиагональной матрицы. В среде инженерно-математических расчетов Mathcad 14.0 построение интерполяционного сплайна осуществлялось с помощью специализированного набора встроенных функций, позволяющих использовать неравномерный шаг аппроксимации h_i . В ряде случаев построение сплайна осуществлялось непосредственно по данным численного моделирования. Однако в случае медленно меняющихся асимптотических зависимостей такой подход приводил к появлению диагональной матрицы, в которой нарушается свойство диагонального преобладания, что приводит к неприменимости формул метода прогонки при вычислении коэффициентов кусочно-непрерывной функции. А именно в матрице $C_{n,n}$ не выполняется неравенство:

$$|c_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} c_{i,j}, \quad i \in 1, 2, \dots, n$$

Для таких случаев использовали преобразование координат, соответствующее характеру наблюдаемой зависимости.

В результате численного моделирования получили зависимость относительного объема V/R^3 и относительной предельной длины L_d/R от числа Рейнольдса Re . Как видно из представленных данных (рисунок 1) влияние числа Рейнольдса Re на эти геометрические параметры формирования капли носит двоякий характер. Вначале влияние этого критерия значительно, но с ростом числа Рейнольдса Re его влияние нивелируется.

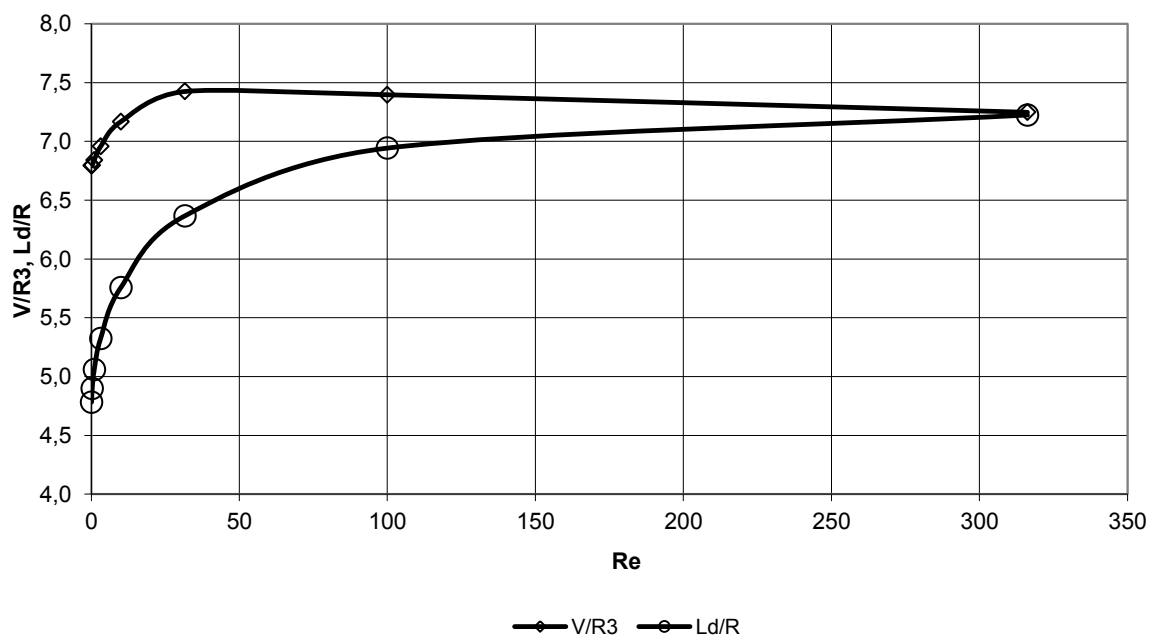


Рис. 1.

Влияние числа Рейнольдса Re на геометрические параметры формирования капли

Для функционального описания относительного объема V/R^3 от Re использовался кубический сплайн, построенный по данным представленным в логарифмической форме и имеющий следующие числовые характеристики:

$$VR_{lgRe}(lgRe) := \text{interp} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0.06441026019436119 \\ 0.27853499999999976 \\ 0.4926597398056383 \\ -2.0040454082137664 \\ -0.5318788580596098 \\ 1.732385349820803 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1.702 \\ 2 \\ 2.459 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6.7936 \\ 6.8418325 \\ 7.1686 \\ 7.4621 \\ 7.3969 \\ 7.2501 \end{pmatrix}, lgRe \right]$$

Для функционального описания относительной предельной длины L_d/R использовался кубический сплайн, построенный по данным, представленным в логарифмической форме и имеющий следующие числовые характеристики:

$$LdR_{lgRe}(lgRe) := 0.995734264370727 \cdot \text{interp} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -0.076 \\ 0.424 \\ 0.924 \\ -1.184 \\ -2.15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2.459 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4.804 \\ 5.082 \\ 5.783 \\ 6.973 \\ 7.25 \end{pmatrix}, lgRe \right]$$

Представление с использованием интерполяционного сплайна позволяют при ограниченном объеме данных получить гладкую кривую, проходящую через все точки численного моделирования. Это позволяет уменьшить объем численного моделирования и обобщить полученные данные на заданной области изменения числа Рейнольдса.

Аналогичные зависимости, используя интерполяционные сплайны, получены с другими исследуемыми параметрами.

В частности, в результате численного моделирования получили зависимость относительного объема V/R^3 и относительной предельной длины L_d/R от капиллярного числа Ca (рисунок 2).

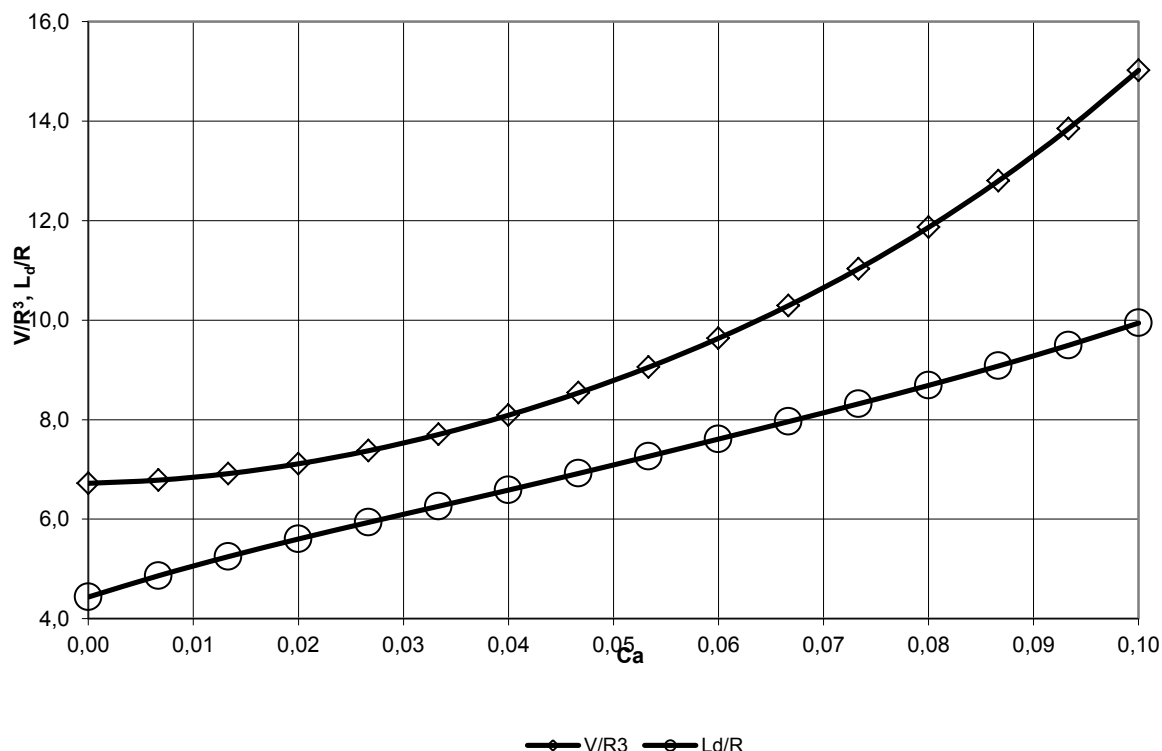


Рис. 2.

Влияние Капиллярного числа на геометрические параметры формирования капли

Как видно из рисунка влияние Капиллярного числа на геометрию капли носит достаточно монотонный характер на всем моделируемом интервале. Это позволяет использовать сплайн-аппроксимацию непосредственно по представленным данным.

Как и в предыдущем случае, использование интерполяционного сплайна позволяет при ограниченном объеме данных получить гладкую кривую, проходящую через все точки численного моделирования.

Полученные одномерные функциональные зависимости могут быть использованы для получения многомерных зависимостей. Рассмотрим процесс получения бинарной зависимости $Z_{VR2}(Re, Ca)$ при использовании одномерных сплайнов $VR_{re}(\lg Re)$ и $VR_{ca}(Ca)$. Учитывая, что одномерные сплайны $VR(\lg Re)$ и $VR(Ca)$ получены по результатам ортогонального численного моделирования и не содержат экспериментальных погрешностей, используем их для определения бинарной зависимости по формуле линейной интерполяции:

$$Z_{VR2i}(Re, Ca, i_{re}) = \{VR_{re}[\log(Re)] \cdot VR_{ca}(Ca)\} / VR_{re}[\log(i_{re})],$$

где i_{re} – параметр сопряжения формулы линейной интерполяции.

Аналогичная зависимость может быть получена с параметром сопряжения j_{ca} , который используется в формуле:

$$Z_{VR2j}(Re, Ca, j_{ca}) = \{VR_{re}[\log(Re)] \cdot VR_{ca}(Ca)\} / VR_{ca}(j_{ca}).$$

Учитывая ортогональность исходных одномерных сплайнов, используем аддитивную свертку этих функций с равными весовыми коэффициентами:

$$Z_{VR2}(Re, Ca, i_{re}, j_{ca}) = \frac{1}{2} \cdot Z_{VR2i}(Re, Ca, i_{re}) + \frac{1}{2} \cdot Z_{VR2j}(Re, Ca, j_{ca}),$$

где i_{re} , j_{ca} – параметры усреднения, определяемые из условия близости экстраполированных параметров модельным представлениям. Мету этой близости можно определить, потребовав равенства между бинарной зависимостью $Z_{VR2}(Re, Ca, i_{re}, j_{ca})$ и её одномерными аналогами:

$$Z_{VR2}(Re, j_{ca}, i_{re}, j_{ca}) = VR_{re}[\log(Re)] \text{ и } Z_{VR2}(i_{re}, Ca, i_{re}, j_{ca}) = VR_{ca}(Ca)$$

Так как данные тождества должны выполняться на всем интервале определения бинарной зависимости, проинтегрируем их левые и правые части по соответствующим континуумам Re и Ca :

$$\int_{Re_{min}}^{Re_{max}} Z_{VR2}(Re, j_{ca}, i_{re}, j_{ca}) dRe = \int_{Re_{min}}^{Re_{max}} VR_{re}[\log(Re)] dRe$$

$$\int_{Ca_{min}}^{Ca_{max}} Z_{VR2}(i_{re}, Ca, i_{re}, j_{ca}) dCa = \int_{Ca_{min}}^{Ca_{max}} VR_{ca}(Ca) dCa$$

Представленная нормализованная система уравнений позволяет определить неизвестные параметры (i_{re}, j_{ca}) позволяющие минимизировать отклонение двумерного сплайна относительно его ортогональных проекций. Таким образом, имея одномерные ортогональные сплайны можно получить модель линейной двумерной зависимости от исследуемых критериев процесса.

Как пример приведем бинарную зависимость V/R^3 , как функции Re и Ca (рисунок 3).

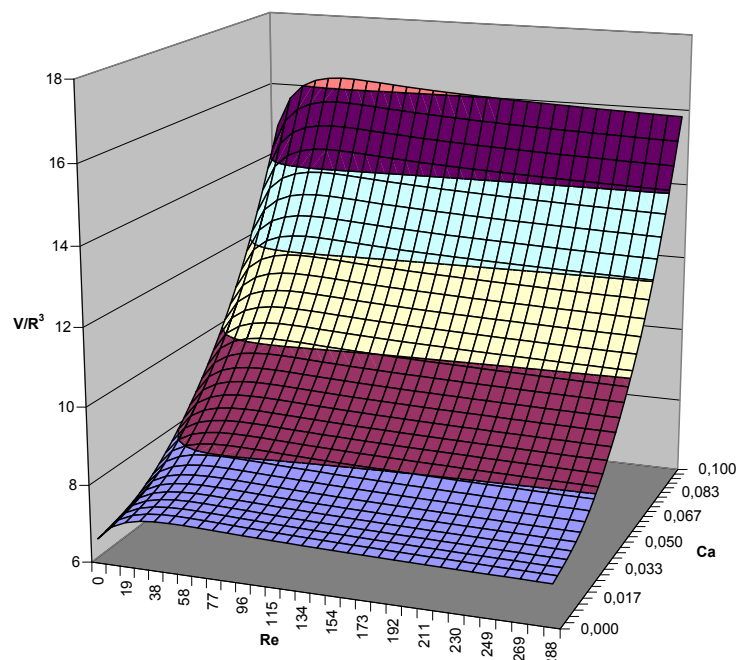


Рис. 3. Сплайн аппроксимация изменения безразмерного объема капли отрыва (V/R^3), как функции Re и Ca

На этой основе получены бинарные и более высокого уровня многомерные зависимости.

Литература:

1. Заславец А.А., Косачев В.С., Кошевой Е.П. Постановка задачи гидродинамики формирования капли с использованием нестационарных уравнений Навье-Стокса // Материалы V Междунар. конф. «Научный потенциал XXI века». Ставрополь: СевКавГТУ, 2011. Т. 2. С. 78-82.
2. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена: пер. с англ. М.: Мир, 1988. 544 с.

References:

1. Zaslavets A.A., Kosachev V.S., Koshevoi E.P. Formulation of the problem of drop formation hydrodynamics using time-dependent Navier-Stokes equations // Proceedings of the V International Conference "The scientific potential of the XXI Century". Stavropol: NCSTU, 2011. Vol. 2. P.78-82.
2. Shi D. Numerical methods in heat transfer: trans. from English. M.: Mir, 1988. 544 p.