

*Шевцов Александр Анатольевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой технологии хранения и переработки зерна технологического факультета ФГБОУВПО «Воронежская государственная технологическая академия»;*

*Лыткина Лариса Игоревна, доктор технических наук, профессор кафедры технологии хранения и переработки зерна технологического факультета ФГБОУВПО «Воронежская государственная технологическая академия»;*

*Хорхордин Дмитрий Сергеевич, аспирант кафедры технологии хранения и переработки зерна технологического факультета ФГБОУВПО «Воронежская государственная технологическая академия», т.: (473) 255-65-11.*

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ ОДНОРОДНОСТИ СМЕШИВАНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ В СМЕСИТЕЛЕ-ГРАНУЛЯТОРЕ

(рецензирована)

*Разработана математическая модель процесса смешивания компонентов в двухвальном лопастном смесителе, в основу которой положена статистическая обработка экспериментальных данных. Предложена конструкция смесителя-гранулятора, позволяющая оптимизировать процесс смешивания различных по гранулометрическому составу и физико-механическим свойствам сыпучих и жидких компонентов перед гранулированием.*

*Ключевые слова: смешивание, математическая модель, дисперсия, идентификация, адекватность, однородность, смеситель-гранулятор.*

*Shvetsov Alexander Anatoljevich, Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Department of Technology of Grain Storage and Processing of the Technological Faculty FSBEU HPO "Voronezh State Technological Academy";*

*Lytkina Larissa Igorevna, Doctor of Technical Sciences, professor of the Department of Technology of Grain Storage and Processing of the Technological Faculty FSBEU HPO "Voronezh State Technological Academy";*

*Khorkhordin Dmitry Sergeevich, post graduate of the Department of Technology of Grain Storage and Processing of the Technological Faculty FSBEU HPO "Voronezh State Technological Academy"; tel.: (473) 255-65-11.*

## A PROBABILISTIC APPROACH TO QUANTITATIVE ASSESSMENT OF HOMOGENEITY OF MIXING MULTICOMPONENT MIXTURES IN A MIXER-GRANULATOR

(reviewed)

*A mathematical model of the process of mixing in the twin-shaft paddle mixer based on the statistical analysis of experimental data has been developed. The design of the mixer-granulator optimizing the process of mixing of bulk and liquid components of different granulometric composition and physico-mechanical properties of before granulation has been offered.*

*Key words: mixing, a mathematical model, the variance, identification, adequacy, uniformity, mixer-granulator.*

Процесс смешивания сыпучих материалов – сложный механический процесс, зависящий, главным образом, от конструкции смесителя и заключающийся в выравнивании концентраций каждого из компонентов смеси по всему объему смесительной камеры с образованием в конечном итоге однородной смеси. В связи со сложностью явлений, происходящих в смесителе, в зависимости от его конструктивных особенностей, а также физико-механических и технологических свойств компонентов, возникает трудность в математически точном выражении картины распределения их в смеси [1]. Поэтому при разработке математической модели процесса смешивания был использован неформальный метод, основанный на модификации математического описания процесса смешивания в смесителе лопастного типа [2, 3].

Математическая модель процесса смешивания бинарной композиции в лопастном смесителе представлена дифференциальными уравнениями вида:

$$\frac{d(c_A - m_A)}{dt} = -k(c_A - m_A)^2 + kD_A; \quad (1)$$

$$\frac{d(c_B - m_B)}{dt} = -k(c_B - m_B)^2 + kD_B, \quad (2)$$

где  $k = \mu \cdot (N_A a' + N_B b') / b'$  – коэффициент;  $c_A, c_B$  – относительные концентрации компонентов  $A$  и  $B$ ;  $m_A, m_B$  – математические ожидания концентраций компонентов  $A$  и  $B$ , соответствующие рецептурному значению

концентрации компонента в смеси;  $\mu$  – коэффициент пропорциональности;  $N_A$ ,  $N_B$  – число объединений частиц  $A$  и  $B$ ;  $a' = a\gamma_A V_A$ ;  $b' = b\gamma_B V_B$ ;  $a$  и  $b$  – число частиц, входящих в объединения  $A$  и  $B$ ;  $V_A$  и  $V_B$  – объемы частиц сорта  $A$  и  $B$ ;  $\gamma_A$  и  $\gamma_B$  – плотности материалов частиц  $A$  и  $B$ ;  $D_A$  и  $D_B$  – дисперсии, характеризующие незавершенность процесса смешивания.

Уравнения (1) и (2) характеризуют изменение концентраций компонентов  $A$  и  $B$  в рабочем объеме смесителя. Однако на практике в условиях производства оценка состояния смеси проводится по выборке из определенного числа проб. Поэтому уравнение (1) для выборки из  $nl$  проб, взятых в  $n$  произвольно выбранных точках в объеме смесителя при  $l$  параллельных испытаниях в каждой точке, запишем как систему уравнений:

$$\frac{d(c_{ij} - m)}{dt} = -k(c_{ij} - m)^2 + kD_{c_{ij}} \quad i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, l. \quad (3)$$

От концентраций перейдем к выборочной дисперсии, через которую оцениваем качество смеси. Систему уравнений (3) просуммируем по  $n$  точкам и  $l$  испытаниям и полученное уравнение разделим на  $nl$ , тогда

$$\frac{1}{nl} \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (c_{ij} - m) = -\frac{k}{nl} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (c_{ij} - m)^2 + \frac{k}{nl} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l D_{c_{ij}} \quad (4)$$

В правой части уравнения (4) величина  $\frac{1}{nl} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (c_{ij} - m)^2$  представляет собой осредненную по  $n$  и  $l$  испытаниям дисперсию концентрации компонента  $A$  в смеси. Преобразуем в левой части уравнения величину  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (c_{ij} - m)$ , для чего возведем ее в квадрат. При этом вследствие независимости наблюдаемых отклонений  $c_{ij} - m$  в  $n$  точках при  $l$  испытаниях двойные суммы парных произведений центрированных случайных величин, являющиеся корреляционными моментами, будут равны нулю. Тогда

$$\left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (c_{ij} - m) \right]^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l (c_{ij} - m)^2 = nl\sigma^2, \quad (5)$$

где  $\sigma^2$  – выборочная дисперсия концентрации компонента в смеси.

Выражение  $\frac{1}{nl} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l D_{c_{ij}}$  представляет собой осредненную дисперсию, характеризующую степень незавершенности процесса смешивания, которая имеет смысл дисперсии сегрегации  $\sigma_c^2$ . После преобразований уравнение (4) примет вид

$$\frac{\sqrt{nl} d \sqrt{\sigma^2}}{nldt} = -k(\sigma^2 - \sigma_c^2),$$

где  $k$  – коэффициент, определяющий константу скорости смешивания.

На рис. 1 приведена кинетическая кривая процесса смешивания, характеризующая изменение дисперсии концентрации  $\sigma^2$  во времени. При достаточно больших значениях времени  $t$  достигается предельное качество смеси  $\sigma_p^2$ . В таком состоянии число образующихся и распадающихся компонентов смеси  $AB$  уравнивается и наступает динамическое равновесие.

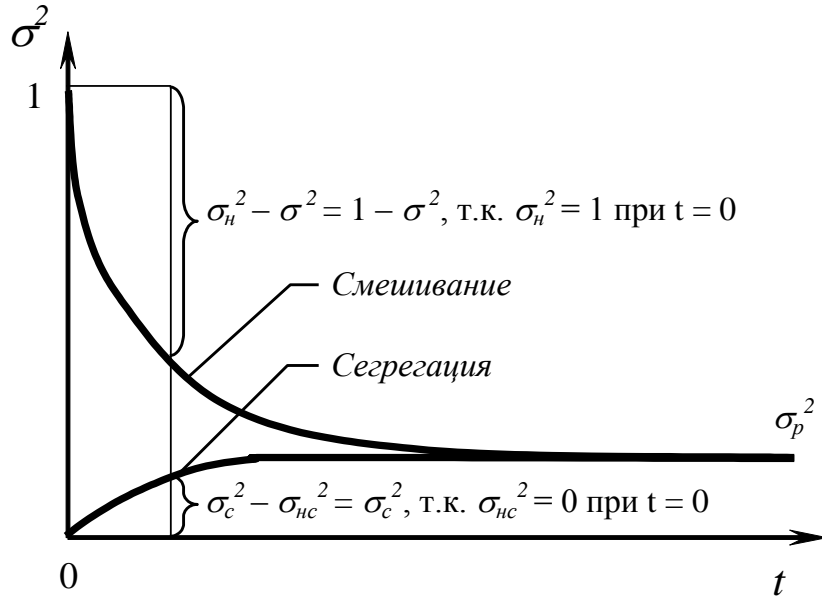


Рис. 1. Кинетические кривые для процессов смешивания и сегрегации

Полагаем, что процессу смешивания соответствует другая кривая и что между дисперсией процесса распределения и сегрегации имеется линейная связь, определяемая соотношением

$$\sigma_n^2 - \sigma^2 = \lambda(\sigma_c^2 - \sigma_{nc}^2), \quad (6)$$

где  $\sigma_n^2$  – начальная дисперсия концентрации компонента при  $t = 0$ ;  $\lambda$  – коэффициент пропорциональности;  $\sigma_{nc}^2$  – начальная дисперсия сегрегации.

В практике исследования процессов смешивания обычно используют дисперсии, масштабированные через  $\sigma_n^2$ , которые в соответствии с [2] в случае бинарной смеси рассчитываются по соотношению

$$\sigma_n^2 = c \cdot (1 - c),$$

где  $c$  – концентрация компонента. В этом случае при  $t \rightarrow 0 \sigma_n^2 = 1$ ,  $\sigma_{nc}^2 = 0$ , а при  $t \rightarrow \infty \sigma^2 = \sigma_c^2 = \sigma_p^2$ . Тогда из (6) найдем при  $t = 0$

$$\sigma_c^2 = (1 - \sigma_c^2) / \lambda, \quad (7)$$

а при  $t \rightarrow \infty$

$$\lambda = (1 - \sigma_p^2) / \sigma_p^2, \quad (8)$$

С учетом (6) уравнение (5) приводится к виду

$$\frac{1}{\sqrt{nl}} \frac{d\sqrt{\sigma^2}}{dt} = k \left[ \frac{1 - (\lambda + 1) \cdot \sigma^2}{\lambda} \right].$$

После разделения переменных имеем

$$\frac{d\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2} [1 - (\lambda + 1) \cdot \sigma^2]} = \frac{2k\sqrt{nl}}{\lambda} dt. \quad (9)$$

Интегрируя (9) получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda + 1}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\lambda + 1} \sqrt{\sigma^2}}{1 - \sqrt{\lambda + 1} \sqrt{\sigma^2}} \right] = \frac{2k\sqrt{nl}}{\lambda} + \ln C. \quad (10)$$

Определим постоянную интегрирования  $C$  из начального условия  $t = 0$ ,  $\sigma^2 = 0$ :

$$\ln C = \frac{1}{\sqrt{\lambda + 1}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\lambda + 1}}{1 - \sqrt{\lambda + 1}} \right]. \quad (11)$$

С учетом (11) уравнение (10) запишется в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda + 1}} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{\lambda + 1} \sqrt{\sigma^2}}{1 - \sqrt{\lambda + 1} \sqrt{\sigma^2}} \right] - \frac{1}{\sqrt{\lambda + 1}} \ln \frac{1 + \sqrt{\lambda + 1}}{1 - \sqrt{\lambda + 1}} = \frac{2k\sqrt{nl}}{\lambda} t$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda + 1}} \ln \frac{1 - \sqrt{\lambda + 1} \sqrt{\sigma^2}}{1 + \sqrt{\lambda + 1} \sqrt{\sigma^2}} \frac{1 + \sqrt{\lambda + 1}}{1 - \sqrt{\lambda + 1}} = - \frac{2k\sqrt{nl}}{\lambda} t. \quad (12)$$

После подстановки выражения (7) в (12) получим

$$\ln \left[ \frac{\sqrt{\sigma_p^2 - \sigma^2} \sqrt{\sigma_p^2 + 1}}{\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma^2} \sqrt{\sigma_p^2 - 1}} \right] = - \frac{2k\sqrt{nl}\sqrt{\sigma_p^2}}{1 - \sqrt{\sigma_p^2}} t$$

или

$$\exp \left[ - \frac{2k\sqrt{nl}\sqrt{\sigma_p^2}}{1 - \sqrt{\sigma_p^2}} t \right] = \frac{\sqrt{\sigma_p^2 - \sigma^2} \sqrt{\sigma_p^2 + 1}}{\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma^2} \sqrt{\sigma_p^2 - 1}}. \quad (13)$$

Разрешаем уравнение (13) относительно  $\sigma^2$  и получаем математическую модель процесса смешивания в лопастном смесителе в виде

$$\sigma^2 = \sigma_p^2 \cdot \frac{\left( \left( \sqrt{\sigma_p^2 + 1} - \left( \sqrt{\sigma_p^2 - 1} \right) \cdot \exp \left( - \frac{2k\sqrt{nl} \cdot \sqrt{\sigma_p^2}}{1 - \sigma_p^2} \cdot t \right) \right) \right)^2}{\left( \left( \sqrt{\sigma_p^2 + 1} + \left( \sqrt{\sigma_p^2 - 1} \right) \cdot \exp \left( - \frac{2k\sqrt{nl} \cdot \sqrt{\sigma_p^2}}{1 - \sigma_p^2} \cdot t \right) \right) \right)^2} \quad (14)$$

с начальными условиями  $t = 0$ ;  $\sigma^2 = 1$ ;  $t = \infty$ ;  $\sigma^2 = \sigma_p^2$ ,

где  $\sigma^2$  – выборочная дисперсия;  $\sigma_p^2$  – равновесная дисперсия, при которой достигается предельное качество смеси;  $n$  – число точек отбора проб;  $l$  – количество проб в каждой из  $n$  точек;  $t$  – время смешивания;  $k$  – константа скорости смешивания.

Из полученной математической модели (14) следует, что процесс смешивания бинарной композиции в лопастном смесителе определяется двумя параметрами: константой скорости смешивания  $k$  и предельной (равновесной) дисперсией концентрации компонентов смеси (предельным качеством смеси)  $\sigma_p^2$ .

Параметры математической модели  $k$  и  $\sigma_p^2$  зависят от режима работы и конструктивных особенностей смесителя и определяются экспериментально на этапе идентификации параметров и проверки адекватности математической модели.

Для идентификации параметров модели (14) по экспериментальным данным и ее проверки на адекватность была поставлена серия параллельных опытов по смешиванию бинарных смесей в лопастном смесителе. В качестве компонентов использовались следующие сыпучие материалы: основной компонент (наполнитель) – ячмень измельченный, индикаторный компонент – металломагнитная примесь.

Идентификация параметров математической модели (14) сводится к определению по экспериментальным данным наилучших оценок константы скорости смешивания  $k$  и значения равновесной (предельной) дисперсии концентрации компонента  $\sigma_p^2$ .

Результаты моделирования для рассматриваемых модельных смесей представлены на рис.2.

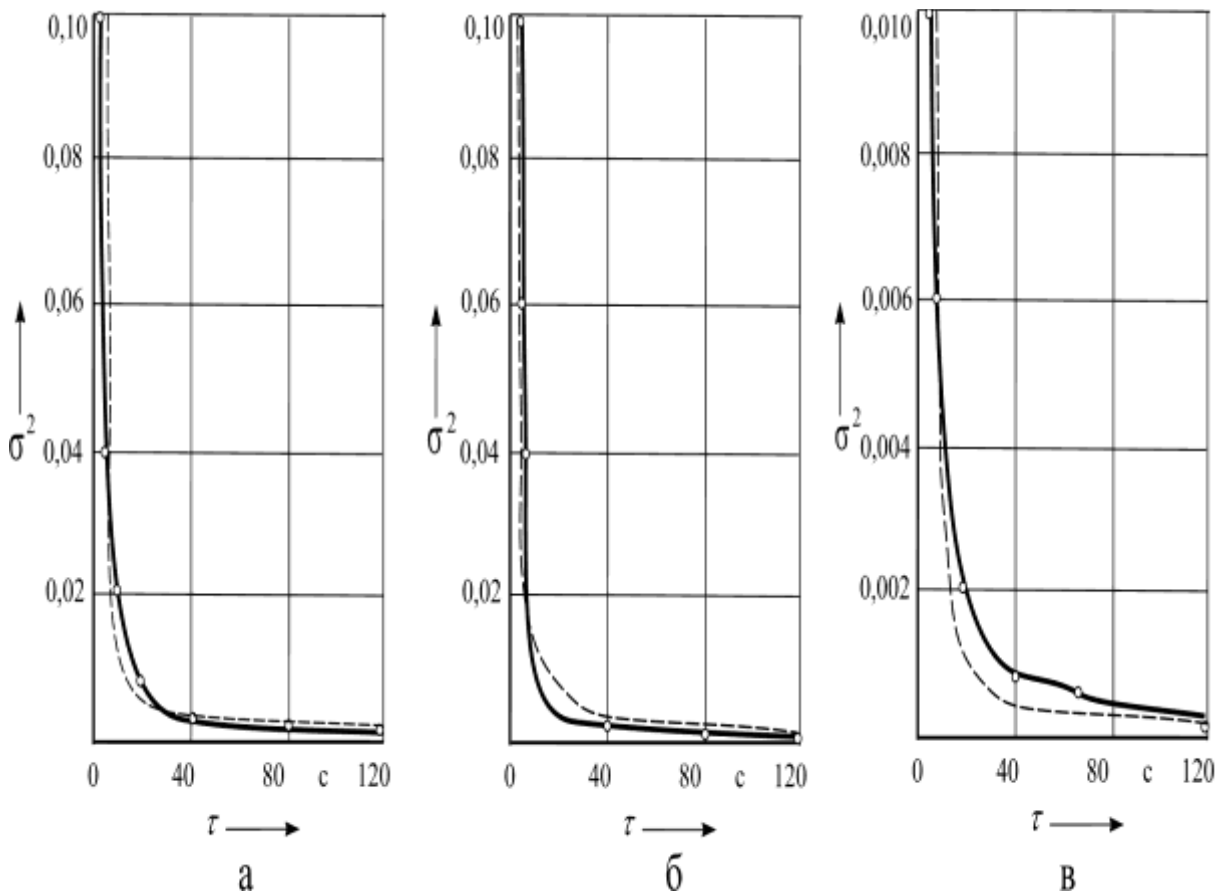


Рис. 2. Экспериментальные (—•) и расчетные (---) кинетические кривые для бинарных модельных смесей: а – ячмень измельченный + металломагнитная примесь; б – ячмень измельченный + соль поваренная; в – ячмень измельченный + жир животный кормовой

По результатам экспериментальных и теоретических исследований предложена конструкция смесителя-гранулятора [4], позволяющая обеспечить эффективное смешивание различных по гранулометрическому составу и физико-механическим свойствам сыпучих и жидких компонентов перед гранулированием (рис. 3).

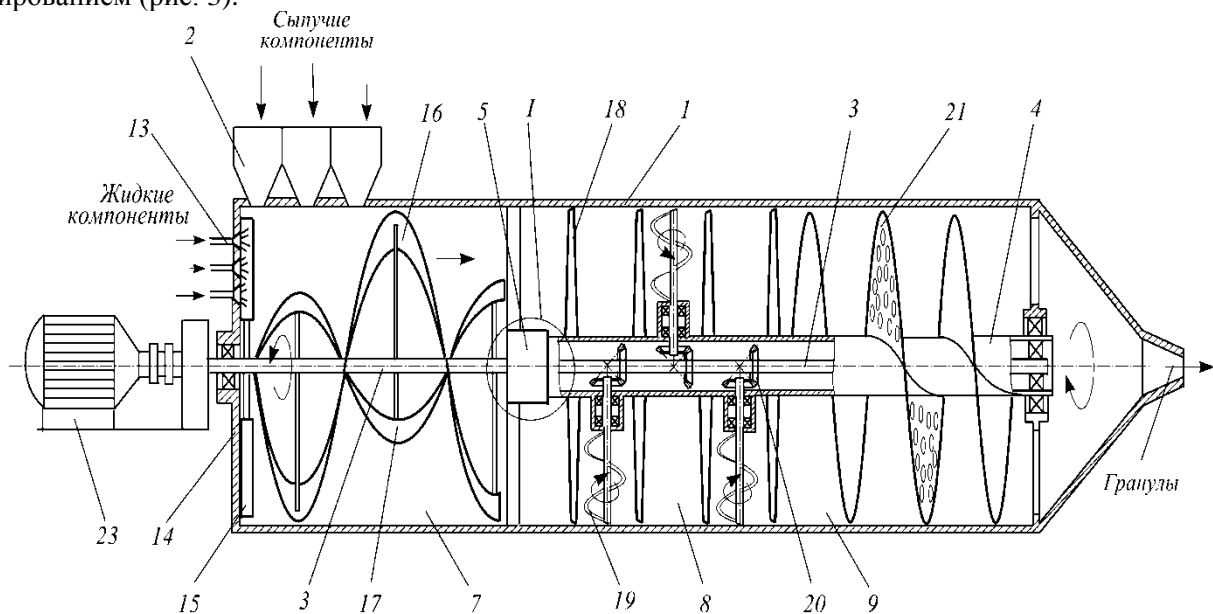
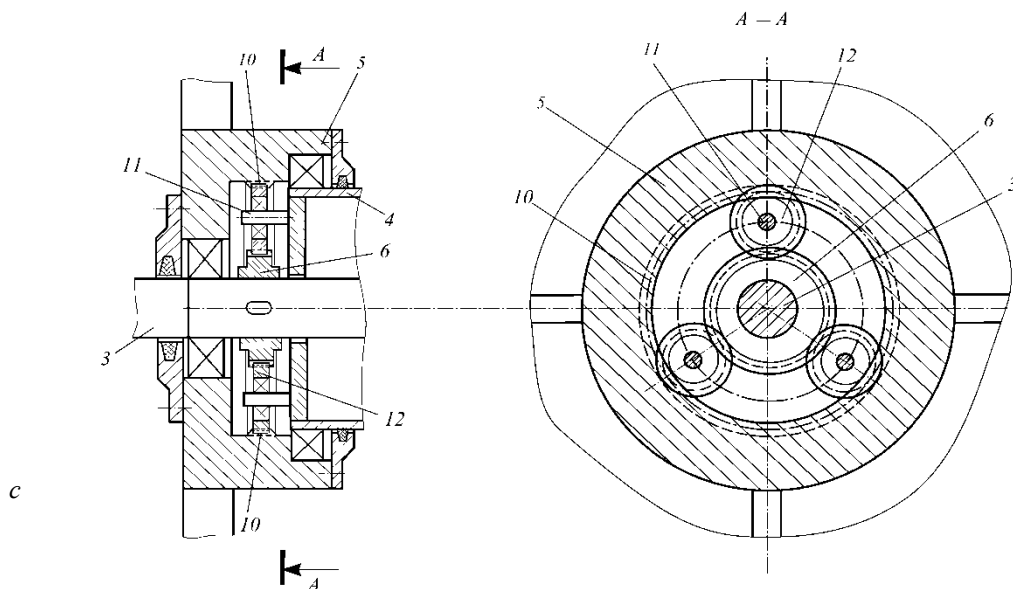


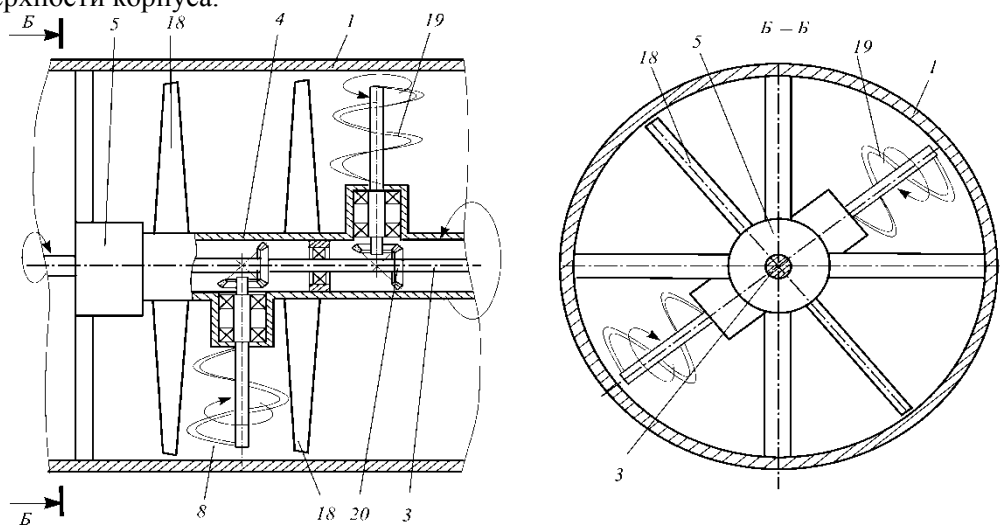
Рис. 3. Общий вид смесителя – гранулятора: 1 – корпус; 2 – загрузочный патрубков; 3 – быстроходный вал; 4 – тихоходный вал; 5 – опора; 6 – зубчатое колесо; 7,8,9 – камера; 10 – неподвижное колесо; 11 – водило; 12 – сателлит; 13 – форсунка; 14 – торцевая крышка; 15 – очищающая лопасть; 16, 17 – винтовые спирали; 18 – конусообразная лопасть; 19 – ленточная спираль; 20 – коническое зубчатое колесо; 21 – шнек; 22 – матрица; 23 – регулируемый привод.



Продолжение рис. 3.  
Продольный разрез опоры  
планетарным зубчатым  
механизмом

Особенность конструкции смесителя-гранулятора состоит в том, что в первой камере на быстроходном валу после лопастей расположены две ленточные спирали разного диаметра с противоположной навивкой, обеспечивающие направление движения потоков смеси навстречу друг другу в виде перекрестного противотока.

Во второй камере смесителя-гранулятора смесь захватывается вращающимися конусообразными лопастями, расположенными на тихоходном валу, который посредством планетарной передачи вращается в противоположном направлении, а с помощью конических зубчатых колес от быстроходного вала приводятся во вращение ленточные спирали, которые обеспечивают радиальное перемещение смеси от оси вращения к внутренней поверхности корпуса.



Продолжение рис. 3. Продольный разрез рабочей камеры смесителя-гранулятора

В третьей камере смесителя-гранулятора при помощи шнека с переменным шагом витков происходит уплотнение и сжатие полученной смеси и формирование однородной, гомогенной смеси за счет возрастания давления вследствие резкого уменьшения размеров винтового канала.

В разработанном смесителе-грануляторе имеют место различные сочетания основных типов течения. При этом возможно регулирование интенсивности перемещения материала в смесителе посредством изменения угла поворота конусообразных лопастей в плоскости, перпендикулярной оси вала, и частоты вращения валов.

Как показывает анализ, смешивание условно состоит из следующих процессов:

- конвективное смешивание – это перемещение групп частиц из одного объема смеси в другой внедрением и скольжением слоев;
- диффузионное смешивание – это постепенное перемещение частиц различных компонентов через вновь образованные границы их раздела;
- сегрегация – это сосредоточение близких по форме, массе и размерам частиц в разных местах смесителя-гранулятора.

При разделении процесса смешивания по времени на три интервала, в первом преобладает конвективное смешивание, во втором – диффузионное, в третьем – сегрегация. Два первых процесса способствуют равномерному распределению частиц в смеси, третий этому препятствует. В этой связи целесообразно заканчивать процесс в конце второго интервала смешивания.

Таким образом, использование смесителя-гранулятора позволит:

- сократить продолжительность технологического цикла смешивания, а, следовательно, снизить удельные энергозатраты на смешивание при достижении высокой однородности получаемой смеси;
- оптимизировать процесс смешивания исходных компонентов, различных по гранулометрическому составу и физико-механическим свойствам, за счет поддержания рационального характера движения смеси в каждой из трех рабочих камер в зависимости от функционального назначения каждой;
- расширить область применения смесителя за счет достигнутой универсализации механизма перемешивания с учетом особенностей физико-механических свойств исходных компонентов.

#### **Литература:**

1. Техника и технология тепловых и механических процессов в задачах энергосбережения на комбикормовых заводах: монография / Л.И. Лыткина [и др.]. Воронеж: ВГТА, 2011. 304 с.
2. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994. 544 с.
3. Шевцов А.А., Лыткина Л.И., Чайкин И.Б. Моделирование процесса смешивания бинарной композиции в лопастном смесителе // Вестник ВГТА. 2008. №1. С. 86-92.
4. Смеситель-гранулятор: пат. 2422194 Рос. Федерация: МПК<sup>7</sup> В 01 F / Шевцов А.А., Остриков А.Н., Лыткина Л.И., Бритиков Д.А., Чайкин И.Б.; заявитель и патентообладатель Воронеж. гос. технол. акад. №2009100236/05; заявл. 11.01.09; опубл. 27.06.11, Бюл. №18.

#### **References:**

1. *Technique and technology of thermal and mechanical processes in the problems of energy saving in feed mills: monograph / L.I. Lytkina [ and oth.]. Voronezh: VSTA. 2011. 304 p.*
2. *Amosov A.A., Y.A. Dubinsky, N.V. Kopchenova. Calculation Methods for Engineers. M.: Higher School. 1994. 544 p.*
3. *Shevtsov A. A., L.I. Lytkina, I.B. Chaikin. Modeling of mixing process of binary compositions in the paddle mixer /. Journal of VSTA. 2008. № 1. P. 86 - 92.*
4. *The mixer-granulator: Pat. 2422194 of the RF IPC 7 B 01 F. / Shevtsov A. A., Ostrikov A.N., Lytkina L. I., Britikov D.A., Chaikin I.B., pat. Of VSTA № 2009100236/05; appl. 01/11/2009, publ. 27.06.2011, Bull. № 18.*