

УДК 621.1.016.4  
ББК 31.31  
С-92

*Схаляхов Анзаур Адамович, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры технологий, машин и оборудования пищевых производств, декан технологического факультета Майкопского государственного технологического университета, 385000, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 191, тел. (8772) 570412*

## **ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ЧЕРЕЗ ТРУБЧАТУЮ МЕМБРАНУ** (рецензирована)

*Решение задачи переноса тепла от потока жидкости внутри трубчатой мембраны к наружным стенкам, интенсивно охлаждаемым внешней средой для случая, когда размеры потока текущей жидкости сопоставимы с размерами трубы, а конвективный перенос тепла внутри потока сопоставим с тепловым сопротивлением стенок трубы, решается на основе численной аппроксимации неявной схемы решения*

*Ключевые слова: трубчатая мембрана, жидкость, теплообмен, численное моделирование, стенка*

*Skhalyakhov Anzaur Adamovich, Candidate of Technical Sciences, associate professor, professor of the chair of technology, machinery and equipment for food production, dean of the technological faculty of Maikop State Technological University, 385000, Republic of Adyghea, Maikop, 191 Pervomaiskaya St., tel.: (8772) 570412.*

## **NUMERICAL SOLUTION OF THE CONJUGATE PROBLEM OF HEAT TRANSFER THROUGH THE TUBULAR MEMBRANE**

*The problem of heat transfer from the flow of fluid inside the tubular membrane to the outer walls intensely cooled by the external environment for the case when the size of the current flow of the liquid is comparable to the size of the pipe and the convective heat transfer within the flow is comparable with the thermal resistance of the pipe walls is solved by numerical approximation of an implicit circuit solutions.*

*Key words: tubular membrane, liquid, heat transfer, numerical modeling, wall.*

Решение задачи переноса тепла от потока жидкости внутри трубчатой мембраны к наружным стенкам, интенсивно охлаждаемым внешней средой для случая, когда размеры потока текущей жидкости сопоставимы с размерами трубы, а конвективный перенос тепла внутри потока сопоставим с тепловым сопротивлением стенок трубы, осуществляется на основе численной аппроксимации неявной схемы решения в конечных разностях [1]. Такая постановка задачи позволяет повысить устойчивость численного решения. Дополнительно для повышения устойчивости численной аппроксимации выбирается равномерная сетка, как по радиусу, так и по оси потока.

Сетка определяется в пространстве решений по номерам узлов определяемым матрицей  $(t_{ij})$ , где  $i=0,1,\dots,Max X$ ;  $j=0,1,\dots,jR$ . Для внутренних узлов в ламинарном потоке жидкости внутри трубы разностная схема приобретает вид [1]:

$$\left[ 1 - \left( \frac{\Delta h \cdot j}{R_{\text{тр}}} \right)^2 \right] \cdot \frac{t_{i,j} - t_{i-1,j}}{\Delta x} = \frac{a_{\text{ж}}}{\frac{P_{\text{нач}} - P_{\text{кон}}}{4 \cdot \mu_{\text{ж}} \cdot L_{\text{тр}}} \cdot R_{\text{тр}}^2} \cdot \left( \frac{t_{i,j+1} - 2 \cdot t_{i,j} + t_{i,j-1}}{\Delta h^2} \dots \right) + \frac{1}{\Delta h \cdot j} \cdot \frac{t_{i,j+1} - t_{i,j-1}}{2 \cdot \Delta h} \quad (1)$$

где  $\Delta h$  – шаг по радиусу;  $R_{тр}$  – внутренний радиус трубы (потока жидкости);  $\Delta x$  – шаг по длине;  $a_{ж}$  – температуропроводность потока жидкости;  $P_{нач}$  – начальное давление в трубе (потоке жидкости);  $P_{кон}$  – конечное давление в трубе (потоке жидкости);  $\mu_{ж}$  – динамическая вязкость жидкости;  $L_{тр}$  – длина трубы.

В отличие решения полученного в [2], численное решение позволяет, не вводить предположение о линейности температурного поля жидкости. В этом случае уравнение (1) решается относительно  $(t_{i,j})$ , что характерно для решения на основе неявной схемы:

$$t_{i-1,j} = \frac{\Delta x \cdot \left[ \frac{\left( \frac{j^2 \cdot \Delta h^2}{R_{тр}^2} - 1 \right) \cdot t_{i,j}}{\Delta x} + \frac{4 \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot \left( \frac{t_{i,j-1} - 2 \cdot t_{i,j} + t_{i,j+1}}{\Delta h^2} - \frac{t_{i,j-1} - t_{i,j+1}}{2 \cdot j \cdot \Delta h^2} \right)}{R_{тр}^2 \cdot (P_{нач} - P_{кон})} \right]}{\frac{j^2 \cdot \Delta h^2}{R_{тр}^2} - 1} \quad (2)$$

Разлагая уравнение (2) на множители относительно узлов сетки  $(t_{i,j-1}, t_{i,j}, t_{i,j+1})$ , получаем трехточечную схему решения:

$$t_{i-1,j} = \frac{4 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot \left( \frac{1}{\Delta h^2} + \frac{1}{2 \cdot j \cdot \Delta h^2} \right)}{R_{тр}^2 \cdot \left( \frac{j^2 \cdot \Delta h^2}{R_{тр}^2} - 1 \right) \cdot (P_{нач} - P_{кон})} \cdot t_{i,j+1} \dots$$

$$+ \frac{\Delta x \cdot \left[ \frac{\frac{j^2 \cdot \Delta h^2}{R_{тр}^2} - 1}{\Delta x} - \frac{8 \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}}{\Delta h^2 \cdot R_{тр}^2 \cdot (P_{нач} - P_{кон})} \right] \cdot t_{i,j}}{\frac{j^2 \cdot \Delta h^2}{R_{тр}^2} - 1} \dots$$

$$+ \frac{4 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot \left( \frac{1}{\Delta h^2} - \frac{1}{2 \cdot j \cdot \Delta h^2} \right) \cdot t_{i,j-1}}{R_{тр}^2 \cdot \left( \frac{j^2 \cdot \Delta h^2}{R_{тр}^2} - 1 \right) \cdot (P_{нач} - P_{кон})}$$

После приведения подобных в каждом из слагаемых правой части трехточечной схемы (3), получаем окончательное выражение для расчета внутренних узлов в ламинарном потоке жидкости внутри трубы:

$$t_{i-1,j} = \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (1 - 2 \cdot j)}{j \cdot \Delta h^2 \cdot (R_{тр}^2 - j^2 \cdot \Delta h^2) \cdot (P_{нач} - P_{кон})} \right] \cdot t_{i,j-1} \dots$$

$$+ \left[ \frac{j^2 \cdot \Delta h^4 \cdot P_{кон} - j^2 \cdot \Delta h^4 \cdot P_{нач} + \Delta h^2 \cdot R_{тр}^2 \cdot P_{нач} - \Delta h^2 \cdot R_{тр}^2 \cdot P_{кон} + 8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}}{\Delta h^2 \cdot (R_{тр}^2 - j^2 \cdot \Delta h^2) \cdot (P_{нач} - P_{кон})} \right] \cdot t_{i,j} \dots \quad (4)$$

$$+ \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot j + 1)}{j \cdot \Delta h^2 \cdot (R_{тр}^2 - j^2 \cdot \Delta h^2) \cdot (P_{кон} - P_{нач})} \right] \cdot t_{i,j+1}$$

Для осевого узла сетки ( $j=0$ ) неявная разностная схема (1), с учетом условия симметрии на оси потока жидкости (сингулярный член стремится к нулю), примет вид:

$$\frac{t_{i,0} - t_{i-1,0}}{\Delta x} = \frac{a_{\text{ж}}}{\frac{P_{\text{нач}} - P_{\text{кон}}}{4 \cdot \mu_{\text{ж}} \cdot L_{\text{тр}}} \cdot R_{\text{тр}}^2} \cdot \frac{t_{i,1} - 2 \cdot t_{i,0} + t_{i-1,1}}{\Delta h^2} \quad (5)$$

Разрешая уравнение (5) относительно  $(t_{i-1,0})$  и группируя относительно  $(t_{i,0}, t_{i,1})$  получаем разностную схему:

$$t_{i-1,0} = \left[ \frac{8 \cdot \Delta x \cdot a_{\text{ж}} \cdot \mu_{\text{ж}} \cdot L_{\text{тр}}}{\Delta h^2 \cdot R_{\text{тр}}^2 \cdot (P_{\text{нач}} - P_{\text{кон}})} + 1 \right] \cdot t_{i,0} + \left[ \frac{8 \cdot \Delta x \cdot a_{\text{ж}} \cdot \mu_{\text{ж}} \cdot L_{\text{тр}}}{\Delta h^2 \cdot R_{\text{тр}}^2 \cdot (P_{\text{кон}} - P_{\text{нач}})} \right] \cdot t_{i,1} \quad (6)$$

Из двухточечного характера полученного разностного уравнения следует, что получено условие замыкания слева для уравнений неявной схемы решения.

На внутренней стенке трубы  $(\Delta h \cdot jR = R_{\text{тр}})$  используем условие «прилипания»:

$$\frac{a_{\text{ж}}}{\frac{P_{\text{нач}} - P_{\text{кон}}}{4 \cdot \mu_{\text{ж}} \cdot L_{\text{тр}}} \cdot R_{\text{тр}}^2} \cdot \left( \frac{t_{i,jR+1} - 2 \cdot t_{i,jR} + t_{i,jR-1}}{\Delta h^2} + \frac{1}{R_{\text{тр}}} \cdot \frac{t_{i,jR+1} - t_{i,jR-1}}{2 \cdot \Delta h} \right) = 0 \quad (7)$$

В этом случае уравнение переноса энергии [2] имеет вид:

$$\left[ \left( \frac{t_{i,jR+1} - 2 \cdot t_{i,jR} + t_{i,jR-1}}{\Delta h^2} + \frac{1}{R_{\text{тр}}} \cdot \frac{t_{i,jR+1} - t_{i,jR-1}}{2 \cdot \Delta h} \right) = 0 \right] + \frac{t_{i+1,jR} - 2 \cdot t_{i,jR} + t_{i-1,jR}}{\Delta x^2} = 0 \quad (8)$$

Используя закон сохранения энергии, запишем количество энергии переходящей от жидкости в пограничном слое к стенке трубы. Площадь нормали поверхности, через которую проходит тепло от жидкости к стенке равна выражению  $(2 \cdot \pi \cdot R_{\text{тр}} \cdot \Delta x)$ , тогда количество тепла переходящее от жидкости к стенке можно получить из следующего выражения:

$$\lambda_{\text{ж}} \cdot \frac{t_{i,jR} + t_{i-1,jR}}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{тр}} \cdot \Delta x - \lambda_{\text{ж}} \cdot \frac{t_{i,jR-1} + t_{i-1,jR-1}}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (R_{\text{тр}} - \Delta h) \cdot \Delta x \quad (9)$$

Это количество тепла (9) переходящее от пограничного слоя жидкости к трубе должно быть равно количеству тепла, переходящему от внутренней поверхности трубы к наружной стенке:

$$\lambda_{\text{тр}} \cdot \frac{t_{i,jR} + t_{i-1,jR}}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{тр}} \cdot \Delta x - \lambda_{\text{тр}} \cdot \frac{t_{i,jR+1} + t_{i-1,jR+1}}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (R_{\text{тр}} + \Delta h) \cdot \Delta x \quad (10)$$

При этом температурный напор в этих слоях (9), (10) должен соответствовать условию сопряжения, определяемому следующим уравнением:

$$\lambda_{\text{ж}} \cdot \frac{t_{i,jR} - t_{i,jR-1}}{\Delta h} = \lambda_{\text{тр}} \cdot \frac{t_{i,jR+1} - t_{i,jR}}{\Delta h} \quad (11)$$

С учетом баланса тепла (9), (10) и условия сопряжения на стенке трубы (11) имеем систему уравнений:

$$t_{i-1,jR-1} = \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 3)}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1)} \right] \cdot t_{i,jR-2} \dots$$

$$+ \left[ \frac{\Delta h^4 \cdot P_{кон} - \Delta h^4 \cdot P_{нач} + 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{нач} - 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{кон} + 8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}}{(P_{кон} - P_{нач}) \cdot \Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр})} \right] \cdot t_{i,jR-1} \dots \quad (12)$$

$$+ \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 1)}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1)} \right] \cdot t_{i,jR}$$

$$\lambda_{ж} \cdot \frac{t_{i,jR} + t_{i-1,jR}}{2} \cdot R_{тр} - \lambda_{ж} \cdot \frac{t_{i,jR-1} + t_{i-1,jR-1}}{2} \cdot (R_{тр} - \Delta h) = \lambda_{тр} \cdot \frac{t_{i,jR} + t_{i-1,jR}}{2} \cdot R_{тр} - \lambda_{тр} \cdot \frac{t_{i,jR+1} + t_{i-1,jR+1}}{2} \cdot (R_{тр} + \Delta h) \quad (13)$$

Для решения полученной системы уравнений (12), (13) выразим из условия сопряжения на стенке трубы (11) точки в слое внутри стенки, прилегающие к внутренней поверхности трубы:

$$t_{i-1,jR+1} = \frac{\lambda_{ж} \cdot t_{i-1,jR} - \lambda_{ж} \cdot t_{i-1,jR-1} + \lambda_{тр} \cdot t_{i-1,jR}}{\lambda_{тр}} \quad (14)$$

$$t_{i,jR+1} = \frac{\lambda_{тр} \cdot t_{i,jR} + \lambda_{ж} \cdot (t_{i,jR} - t_{i,jR-1})}{\lambda_{тр}} \quad (15)$$

Из уравнения баланса тепла найдем значение температуры перед стенкой:

$$t_{i-1,jR-1} = - \frac{2 \cdot \left[ \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot \left( \frac{t_{i,jR}}{2} + \frac{t_{i-1,jR}}{2} \right) - R_{тр} \cdot \lambda_{тр} \cdot \left( \frac{t_{i,jR}}{2} + \frac{t_{i-1,jR}}{2} \right) \dots \right.}{\lambda_{ж} \cdot (\Delta h - R_{тр})} \left. + \frac{\lambda_{ж} \cdot (\Delta h - R_{тр}) \cdot t_{i,jR-1}}{2} + \lambda_{тр} \cdot \left( \frac{t_{i-1,jR+1}}{2} + \frac{t_{i,jR+1}}{2} \right) \cdot (\Delta h + R_{тр}) \right] \quad (16)$$

И подставим в уравнение (16) полученные выражения для температур внутри стенки (14), (15), на прилегающем к внутренней поверхности трубы слое:

$$\Delta h \cdot \lambda_{ж} \cdot t_{i-1,jR} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} \cdot t_{i-1,jR} - 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i,jR-1} \dots$$

$$+ 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i-1,jR} - \Delta h \cdot \lambda_{ж} \cdot t_{i-1,jR-1} - \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i-1,jR-1} \dots$$

$$+ \Delta h \cdot \lambda_{ж} \cdot t_{i,jR} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} \cdot t_{i,jR} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i,jR}$$

$$t_{i-1,jR-1} = - \frac{\dots}{\Delta h \cdot \lambda_{ж} - \lambda_{ж} \cdot R_{тр}} \quad (17)$$

Условие сопряжения на внутренней стенке трубы кроме уравнения (11) дает равенство температур на этой стенке, поэтому приравняем полученное значение температуры (17) перед стенкой конвективному уравнению в пограничном слое:

$$\begin{aligned}
& \Delta h \cdot \lambda_{ж} \cdot t_{i-1,jR} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} \cdot t_{i-1,jR} - 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i,jR-1} \dots \\
& + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i-1,jR} - \Delta h \cdot \lambda_{ж} \cdot t_{i-1,jR-1} - \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i-1,jR-1} \dots \\
& + \Delta h \cdot \lambda_{ж} \cdot t_{i,jR} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} \cdot t_{i,jR} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i,jR} \\
& \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 3)}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1)} \right] \cdot t_{i,jR-2} \dots = \frac{\Delta h \cdot \lambda_{ж} - \lambda_{ж} \cdot R_{тр}}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1)} \\
& \Delta h^4 \cdot P_{кон} - \Delta h^4 \cdot P_{нач} \dots \\
& + 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{нач} - 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{кон} \dots \\
& + 8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \\
& + \frac{(P_{кон} - P_{нач}) \cdot \Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр})}{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 1)} \cdot t_{i,jR-1} \dots \\
& + \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 1)}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1)} \right] \cdot t_{i,jR}
\end{aligned} \tag{18}$$

Из (18) найдем значение температуры на стенке:

$$\begin{aligned}
& (\Delta h \cdot \lambda_{ж} - \lambda_{ж} \cdot R_{тр}) \left[ \frac{2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i,jR-1} + \Delta h \cdot \lambda_{ж} \cdot t_{i-1,jR-1} + \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i-1,jR-1} - \Delta h \cdot \lambda_{ж} \cdot t_{i,jR} - \Delta h \cdot \lambda_{тр} \cdot t_{i,jR} - 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot t_{i,jR}}{\Delta h \cdot \lambda_{ж} - \lambda_{ж} \cdot R_{тр}} \dots \right. \\
& \left. + \frac{t_{i,jR-1} \cdot (\Delta h^4 \cdot P_{кон} - \Delta h^4 \cdot P_{нач} + 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{нач} - 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{кон} + 8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр})}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон})} \dots \right. \\
& \left. + \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 3) \cdot t_{i,jR-2}}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{кон} - P_{нач}) \cdot (jR - 1)} + \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 1) \cdot t_{i,jR}}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{кон} - P_{нач}) \cdot (jR - 1)} \right] \\
t_{i-1,jR} = & \frac{\dots}{\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}}
\end{aligned} \tag{19}$$

Группируя выражение (19) относительно узлов сетки разностную схему на стенке трубы по радиусу потока жидкости ( $j = jR$ ) на основе условия сопряжения:

$$\begin{aligned}
& 4 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \lambda_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot R_{тр} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 3) \\
t_{i-1,jR} = & \frac{\dots \cdot t_{i,jR-2}}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1) \cdot (\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр})} \\
& + \frac{2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot \left[ \frac{\Delta h^4 \cdot P_{кон} - \Delta h^4 \cdot P_{нач} + 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{нач} - 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{кон} + 8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{кон} - P_{нач})} - 1 \right] \cdot t_{i,jR-1}}{\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}} \\
& + \frac{2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 1)}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1)} - \frac{\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}}{2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}} \right] \cdot t_{i,jR}}{\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}}
\end{aligned} \tag{20}$$

Из полученного разностного уравнения следует, что получено условие замыкания справа для системы разностных уравнений неявной схемы решения сопряженной задачи. Для расчета температурного поля ламинарного потока жидкости использовалась итерационное матричное уравнение следующего вида:

$$\begin{vmatrix} m_{0,0} & m_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\ m_{1,0} & m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & m_{i-1,j} & m_{i,j} & m_{i+1,j} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & m_{jR-2,jR-1} & m_{jR-1,jR-1} & m_{jR,jR+1} \\ 0 & 0 & m_{jR-2,jR} & m_{jR-1,jR} & m_{jR,jR} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_{i,0} \\ t_{i,1} \\ \dots \\ t_{i,j} \\ \dots \\ t_{i,jR-1} \\ t_{i,jR} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{i-1,0} \\ t_{i-1,1} \\ \dots \\ t_{i-1,j} \\ \dots \\ t_{i-1,jR-1} \\ t_{i-1,jR} \end{vmatrix} \tag{21}$$

Где коэффициенты матрицы  $m_{i,j}$  определяются уравнениями (6), (4) и (20). Для повышения асимптотической устойчивости получаемого решения при значительном

числе шагов по оси потока жидкости использовали алгоритмическую схему Кранка–Николсона. Матричное уравнение (21), содержащее разряженную ленточную матрицу решалось методом декомпозиции с использованием пакета MathCAD. Расчетный блок, реализующий расчетную схему (21), представлен ниже:

$$t := \left| \begin{array}{l} ms^{(0)} \leftarrow \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..jR \\ mss_i \leftarrow 1 \\ mss \end{array} \\ \text{for } k \in 1..ceil(MaxX) \\ ms^{(k)} \leftarrow \text{Isolve}(M1, ms^{(k-1)}) \\ \text{for } k \in 1, 3..ceil(MaxX) \\ mn \frac{\langle k-1 \rangle}{2} \leftarrow \frac{ms^{(k)} + ms^{(k-1)}}{2} \\ mn \end{array} \right. \quad (22)$$

Матрица M1, используемая в расчетном блоке (22), представлена в модуле формирования коэффициентов этой матрицы, который имеет следующий вид:

$$M1 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..jR \\ \text{for } j \in 0..jR \\ m1_{i,j} \leftarrow 0 \\ m1_{0,0} \leftarrow \left[ \frac{8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}}{\Delta h^2 \cdot R_{тр}^2 \cdot (P_{нач} - P_{кон})} + 1 \right] \\ m1_{0,1} \leftarrow \left[ \frac{8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}}{\Delta h^2 \cdot R_{тр}^2 \cdot (P_{кон} - P_{нач})} \right] \\ \text{for } j \in 1..jR - 1 \\ m1_{j,j-1} \leftarrow \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (1 - 2 \cdot j)}{j \cdot \Delta h^2 \cdot (R_{тр}^2 - j^2 \cdot \Delta h^2) \cdot (P_{нач} - P_{кон})} \right] \\ m1_{j,j} \leftarrow \left[ \frac{j^2 \cdot \Delta h^4 \cdot P_{кон} - j^2 \cdot \Delta h^4 \cdot P_{нач} + \Delta h^2 \cdot R_{тр}^2 \cdot P_{нач} - \Delta h^2 \cdot R_{тр}^2 \cdot P_{кон} + 8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}}{\Delta h^2 \cdot (R_{тр}^2 - j^2 \cdot \Delta h^2) \cdot (P_{нач} - P_{кон})} \right] \\ m1_{j,j+1} \leftarrow \left[ \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot j + 1)}{j \cdot \Delta h^2 \cdot (R_{тр}^2 - j^2 \cdot \Delta h^2) \cdot (P_{кон} - P_{нач})} \right] \\ m1_{jR,jR-2} \leftarrow \frac{4 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \lambda_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot R_{тр} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 3)}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1) \cdot (\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр})} \\ m1_{jR,jR-1} \leftarrow \left[ \frac{2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot \left[ \frac{\Delta h^4 \cdot P_{кон} - \Delta h^4 \cdot P_{нач} + 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{нач} - 2 \cdot \Delta h^3 \cdot R_{тр} \cdot P_{кон} + 8 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон})} - 1 \right]}{\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}} \right] \\ m1_{jR,jR} \leftarrow \left[ \frac{2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр} \cdot \left[ \frac{\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}}{2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}} - \frac{2 \cdot \Delta x \cdot a_{ж} \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр} \cdot (2 \cdot jR - 1)}{\Delta h^3 \cdot (\Delta h - 2 \cdot R_{тр}) \cdot (P_{нач} - P_{кон}) \cdot (jR - 1)} \right]}{\Delta h \cdot \lambda_{ж} + \Delta h \cdot \lambda_{тр} + 2 \cdot \lambda_{ж} \cdot R_{тр}} \right] \\ m1 \end{array} \right. \quad (23)$$

Для получения температурного поля в стенке трубы использовались значения температуры на границах контура стенки. Этот контур ограничивается следующими параметрами:

- температурным полем ламинарного потока жидкости на внутренней стенке трубы;

- граничным условием первого рода на наружной стенке трубы;
- начальным условием сопряженной задачи теплопроводности на входе в трубу;
- значением производной для температуры внутри стенки, на прилегающем к внутренней поверхности трубы слое.

Таким образом, имеем замкнутую систему ограничений для корректного решения задачи Пуассона, определяющего стационарное температурное поле в стенке трубы. Для решения этой задачи использовали утилиту *relax* пакета *MathCAD*, возвращающую матрицу температурного поля, получаемую на основании решения задачи Пуассона модифицированным методом Гаусса – Зейделя. Утилита использует подгоночный параметр – спектральный радиус итераций Якоби ( $r_{Jac}$ ), значение которого рассчитывалось из выражения:

$$r_{Jac} = 1 - \frac{2 \cdot \pi}{\max R}, \quad (24)$$

где  $\max R$  – число узлов сетки по радиусу.

Была проведена серия расчетов для полипропиленовых половолоконных мембран фирмы *EIDOS* (Чехия), для ламинарного режима работы полипропиленовых теплообменников.

Расчеты проводились при следующих условиях: внутренний радиус трубы (потока жидкости)  $R_{тр}=0,1$  мм; число шагов по радиусу трубы (потока жидкости)  $jR=12$ ; внешний радиус трубы (стенки)  $R_{ст}=0,15$  мм; шаг по радиусу  $\Delta h = \frac{R_{\delta\delta}}{jR} = 8,333 \cdot 10^{-3}$  мм;

общее число шагов по радиусу трубы  $MaxR = \frac{R_{\delta\delta}}{\Delta h} = 18$ ; шаг по длине  $\Delta x = \Delta h$ ; длина

трубы (потока жидкости)  $L_{тр}=0,74$  мм; число шагов по длине трубы  $MaxX = \frac{L_{\delta\delta}}{\Delta x} = 89$ ;

начальное давление в трубе (потоке жидкости)  $P_{нач}=2,0$  атм; конечное давление в трубе (потоке жидкости)  $P_{кон}= 1,0$  атм; динамическая вязкость потока жидкости  $\mu_{жс} = 1,0$  пуаз;

плотность потока жидкости  $\rho_{жс} = 700 \frac{\hat{e}\tilde{a}}{\hat{i}^3}$ ; теплопроводность жидкости  $\lambda_{жс} = 0,2 \frac{W}{\hat{i}^2 \hat{E}}$ ;

теплопроводность стенки трубы  $\lambda_{\delta\delta} = 0,1 \frac{W}{\hat{i}^2 \hat{E}}$ ; температуропроводность потока жидкости

$a_{жс}=2,198 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ ; число Рейнольдса на оси потока жидкости

$$Re_{\max} = \frac{\left( \frac{P_{\hat{a}\hat{z}} - D_{\hat{e}\hat{i}\hat{i}}}{4\mu_{жс} L_{\delta\delta}} R_{\delta\delta}^2 \right) (2R_{\delta\delta})}{\frac{\mu_{жс}}{\rho_{жс}}} = 5,914 \cdot 10^{-3}.$$

Для представленных выше условий было получено температурное поле сопряженной задачи теплопроводности, представленное на рисунке 1.

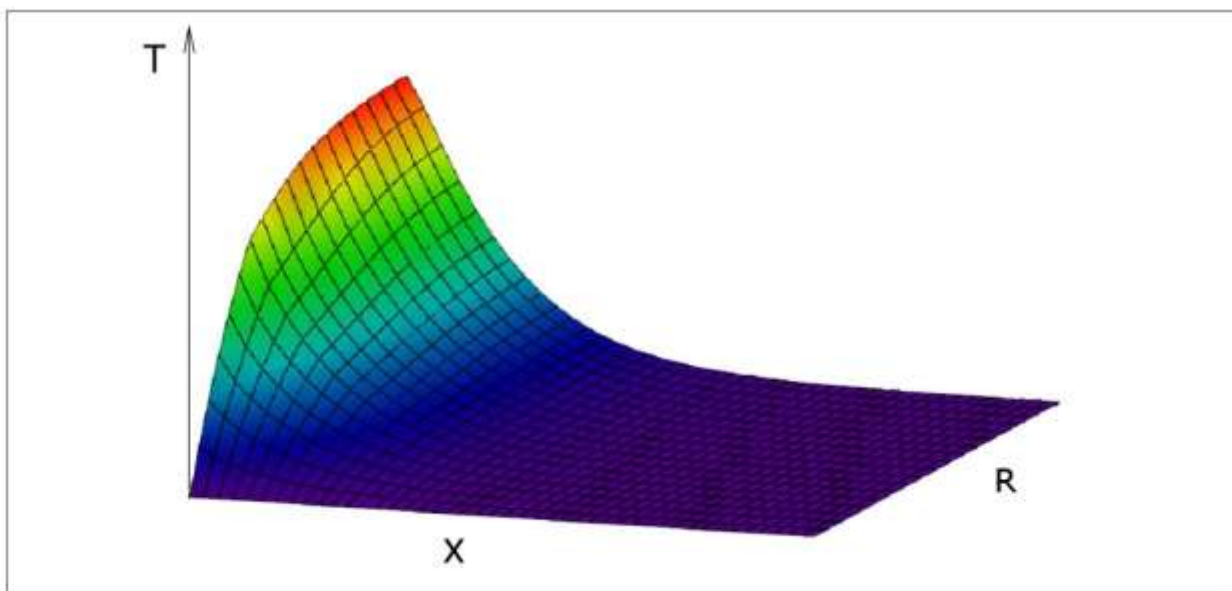


Рисунок 1 - Температурное поле сопряженной задачи теплопроводности

Как видно из представленных данных температурное поле быстро выравнивается по оси потока и практически равно нулю (меньше 0,001) при числе шагов по координате  $X = 45$ .

#### ВЫВОД

В результате численного моделирования для полипропиленовых полволоконных мембран установлено, что теплообмен протекает интенсивно. Следовательно, габариты разрабатываемого теплообменного оборудования, использующего эти мембраны, могут быть значительно уменьшены.

#### Литература:

1. Схаляхов А.А. Постановка сопряженной задачи переноса тепла через трубчатую мембрану от протекающего в ней потока // Новые технологии. 2009. Вып. 4.
2. Протодьяконов И.О., Марцулевич Н.А., Марков А.В. Явления переноса в процессах химической технологии. Л.: Химия, 1981. 264 с.