УДК 661.1.016.4
ББК 31.31
С – 92

Схаляхов Анзаур Адамович*, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры технологий, машин и оборудования пищевых производств, декан технологического факультета Майкопского государственного технологического университета, 385000, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 191, тел. (8772) 570412*

ПОСТАНОВКА СОПРЯЖЕННОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ЧЕРЕЗ ТРУБЧАТУЮ МЕМБРАНУ ОТ ПРОТЕКАЮЩЕГО В НЕЙ ПОТОКА

(рецензирована)

В данной статье рассмотрена постановка задачи теплопереноса от ламинарного потока жидкости внутри трубы к наружным стенкам трубы, интенсивно охлаждаемым внешней средой для случая, когда размеры потока текущей жидкости сопоставимы с размерами трубы, а конвективный перенос тепла внутри потока сопоставим с тепловым сопротивлением стенок трубы

Ключевые слова: мембрана, теплообмен, жидкость, стенка, сопряженная задача переноса

Skhalyakhov Anzaur Adamovich*, Candidate of Technical Sciences, associate professor, professor of the chair of technology, machinery and equipment for food production, dean of the technological faculty of Maikop State Technological University, 385000, Republic of Adyghea, Maikop,191 Pervomaiskaya St., tel.: (8772) 570412.*

FORMULATION OF THE CONJUGATE PROBLEM OF HEAT TRANSFER THROUGH THE TUBULAR MEMBRANE FROM THE IN-FLOWING STREAM

This article discusses the formulation of the problem of heat transfer from the laminar flow of fluid inside the pipe to the outer wall of the tube rapidly cooled by the external environment for the case when the size of the current flow of the liquid is comparable to the size of the pipe and the convective heat transfer within the flow is comparable with the thermal resistance of the pipe walls.

Keywords: membrane, heat transfer, fluid, wall, dual problem transfer.

Теплообменники с использованием непроницаемых полипропиленовых половолоконных мембран [1] могут эффективно использоваться в некоторых областях применения. Однако низкая теплопроводность мембран оказывает существенное влияние на теплообмен.

В данной статье рассмотрена постановка задачи переноса тепла от ламинарного потока жидкости внутри трубы к наружным стенкам трубы, интенсивно охлаждаемым внешней средой для случая, когда размеры потока текущей жидкости сопоставимы с размерами трубы, а конвективный перенос тепла внутри потока сопоставим с тепловым сопротивлением стенок трубы.

В данном случае рассматривается задача описания теплопереноса в потоке и стенке трубы как сопряженная. В этом случае перенос тепла в жидкости описывается следующим дифференциальным уравнением конвективного переноса [2]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_{ж}(r,x,\tau)}{\partial \tau}+w_{ж}(r)\cdot\frac{\partial T_{ж}(r,x,\tau)}{\partial x}= \\
=a_{ж}\cdot\left[\frac{\partial^2 T_{ж}(r,x,\tau)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{ж}(r,x,\tau)}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_{ж}(r,x,\tau)}{\partial x^2}\right]
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $w_ж(r)$ – скорость потока жидкости в трубе в направлении *x* движения жидкости. В случае установившегося ламинарного гидродинамического режима эта величина определяется уравнением:

$$
w_{ж}=\frac{P_{нач}-P_{кон}}{4\cdot\mu_{ж}\cdot L_{тр}}\cdot\left(R_{тр}^2-r^2\right),
\tag{2}
$$

где $P_{нач}$ и $P_{кон}$ – давления соответственно в начальном и конечном сечениях; $\mu_ж$ – динамическая вязкость жидкости; $L_{тр}$ – длина трубы.

Переменные *r* и *x* меняются в пределах области существования решения по *x* ($0 \le x \le L_{тр}$) и по *r* ($0 \le r \le R_{тр}$).

Дифференциальное уравнение теплопроводности для полого цилиндра имеет вид [3]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_{тр}(r,x,\tau)}{\partial \tau}= \\
=a_{тр}\cdot\left[\frac{\partial^2 T_{тр}(r,x,\tau)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{тр}(r,x,\tau)}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_{тр}(r,x,\tau)}{\partial x^2}\right]
\end{gathered}
\tag{3}
$$

В отличие от уравнения (1) в нем отсутствует конвективная составляющая, и область существования решения по радиусу r ограничена стенками трубы ($R_{тр} \le r \le R_{ст}$).

Для уравнения (1) имеет место граничное условие симметрии:

$$
\frac{\partial T_{ж}(0,x,\tau)}{\partial r}=0
\tag{4}
$$

Уравнение (4) показывает, что имеет место осевая симметрия теплового поля относительно оси *x*, направление которой совпадает с направлением потока жидкости в трубе. Начальное условие для жидкости следующее:

$$
T_{ж}(r,x,0)=T_{нач}
\tag{5}
$$

Уравнение (5) показывает, что в начальный момент времени жидкость в трубе нагрета до температуры среды ($T_{нач}$). Начальные условия для трубы соответствуют граничным условиям для жидкости внутри этой трубы:

$$
T_{тр}(r,x,0)=T_{нач}
\tag{6}
$$

Из уравнения (6) следует, что стенки трубы в начальный момент времени имеют ту же температуру, что и жидкость внутри трубы. Это соответствует случаю, когда по трубе достаточно долго течет нагретая жидкость и температурное поле в жидкости и стенках трубы выравнивается.

Граничными условиями для трубы являются условия первого рода:

$$
T_{тр}(R_{ст},x,\tau)=T_{кон}
\tag{7}
$$

Уравнение (7) показывает, что в начале переходного процесса поверхность трубы мгновенно охлаждается до температуры ($T_{кон}$). Условием сопряжения тепловых полей жидкости и стенки трубы считаем условие идеального теплового контакта, определяемое уравнениями равенства температур на границе:

$$
T_{тр}(R_{тр},x,\tau)=T_{ж}(R_{тр},x,\tau)
\tag{8}
$$

Тепловые потоки на внутренней поверхности трубы между трубой и жидкостью определяются уравнением:

$$\lambda_{жс}\cdot\frac{\partial T_{жс}\left(R_{тр},x,\tau\right)}{\partial r}=\lambda_{тр}\cdot\frac{\partial T_{тр}\left(R_{тр},x,\tau\right)}{\partial r} \tag{9}$$

где $\lambda_ж$ – коэффициент теплопроводности жидкости; $\lambda_{тр}$ – коэффициент теплопроводности трубы.

Для решения задачи (1)…(9) методом конечных разностей [4], который основан на замене производных их приближенным значением, выраженным через разности значений функций в отдельных дискретных точках – узлах сетки.

Вначале рассмотрим стационарное температурное поле, которое является предельным случаем задачи (1)…(9) при времени переходного процесса $\tau\to\infty$. В этом случае производные по времени обращаются в ноль. Для потока жидкости в трубе это соответствует следующему соотношению:

$$\begin{aligned} w_{жс}(r)\cdot\frac{\partial T_{жс}(r,x)}{\partial x}&= \\ &=a_{жс}\cdot\left[\frac{\partial^2 T_{жс}(r,x)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{жс}(r,x)}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_{жс}(r,x)}{\partial x^2}\right]\end{aligned} \tag{10}$$

Уравнение (10) получено из уравнения (1) и для его решения используются следующие граничные условия:

$$\frac{\partial T_{жс}(0,x)}{\partial r}=0 \tag{11}$$

Уравнение (11) – условие симметрии.

$$T_{жс}(r,0)=T_{нач} \tag{12}$$

Уравнение (12) – поршневое течение жидкости на входе в трубу.

Для стенок трубы уравнение (3) преобразуется в виду:

$$\frac{\partial^2 T_{тр}(r,x)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_{тр}(r,x)}{\partial r}+\frac{\partial^2 T_{тр}(r,x)}{\partial x^2}=0 \tag{13}$$

Граничным условием для этого уравнения является условие на внешней поверхности трубы:

$$T_{тр}\left(R_{ст},x\right)=T_{кон} \tag{14}$$

На внутренней стенке трубы имеет место условие сопряжения, определяемое уравнениями, полученными из (8) и (9):

$$T_{\text{òð}}\left(R_{\text{òð}},x\right)=T_{\text{æ}}\left(R_{\text{òð}},x\right) \tag{15}$$

Уравнение (15) условие сопряжения тепловых полей

$$\lambda_{жс}\cdot\frac{\partial T_{жс}\left(R_{тр},x\right)}{\partial r}=\lambda_{тр}\cdot\frac{\partial T_{тр}\left(R_{тр},x\right)}{\partial r} \tag{16}$$

Уравнение (16) условие сопряжения тепловых потоков на внутренней стенке трубы.

Таким образом, система уравнений (10)…(16) определяет стационарное температурное поле установившегося теплового режима сопряженной задачи теплопереноса между движущейся жидкостью и трубой, наружная стенка которой интенсивно охлаждается до конечной температуры внешней среды. С практической точки зрения задача (10)…(16) интересна для расчета длины трубы, которая позволяет получить требуемую температуру охлаждения жидкости на выходе их аппарата. В этом случае определяем одномерную сетку по текущему радиусу (r). Для упрощения последующих выкладок узлы сетки определяем с равномерным шагом (Δh), значение которого определяется из условий сходимости и устойчивости явной схемы решения задачи. Дополнительными условиями выбора шага сетки являются положение одного из узлов сетки точно на границе жидкости и внутренней сетки трубы, а также последнего узла сетки на внешней поверхности трубы.

Рассмотрим пример численного решения задачи (10)…(16) для случая, когда число узлов сетки по оси течения потока изменяется от 0 до *Max X* ($0 \geq I \geq Max\ X$) с шагом (Δx), где *Max X* – варьируемый параметр числа шагов, обеспечивающий требуемый нагрев жидкости. Число шагов по текущему радиусу изменяется от 0 до *Max R* ($0 \geq j \geq Max\ R$), где *Max R* – варьируемый параметр числа шагов перпендикулярно оси потока от центра (0) к внешней стенке трубы (*Max R*). Положение внутренней стенки трубы определяется точкой (*jR*), для которой выполняются неравенства ($3 \geq jR > Max\ R$). Минимальное число точек внутри потока жидкости равно трем, для корректного учета условий симметрии и сопряжения рассматриваемой задачи. Рассмотрим разностные схемы этой стационарной задачи в области потока жидкости и стенки трубы.

В данном случае сетка определяется в пространстве решений по номерам узлов определяемым матрицей ($t_{i,j}$), где $i = 0,1,\dots,Max\ X$; $j = 0,1,\dots,jR$. Для внутренних узлов сетки разностный аналог уравнения (10) имеет вид:

$$w_{ж}(\Delta h \cdot j) \cdot \frac{t_{i+1,\,j} - t_{i-1,\,j}}{2 \cdot \Delta x} - a_{ж} \cdot \frac{t_{i+1,\,j} - 2 \cdot t_{i,\,j} + t_{i-1,\,j}}{\Delta x^2} = = a_{ж} \cdot \left[\frac{t_{i,\,j+1} - 2 \cdot t_{i,\,j} + t_{i,\,j-1}}{\Delta h^2} + \frac{1}{\Delta h \cdot j} \cdot \frac{t_{i,\,j+1} - t_{i,\,j-1}}{2 \cdot \Delta h} \right] \qquad (17)$$

с учетом (2), разностная схема (17) приобретает вид:

$$\frac{P_{нач} - P_{кон}}{4 \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}} \left[R_{тр}^2 - (\Delta h \cdot j)^2 \right] \cdot \frac{t_{i+1,\,j} - t_{i-1,\,j}}{2 \cdot \Delta x} - a_{ж} \cdot \frac{t_{i+1,\,j} - 2 \cdot t_{i,\,j} + t_{i-1,\,j}}{\Delta x^2} = = a_{ж} \cdot \left[\frac{t_{i,\,j+1} - 2 \cdot t_{i,\,j} + t_{i,\,j-1}}{\Delta h^2} + \frac{1}{\Delta h \cdot j} \cdot \frac{t_{i,\,j+1} - t_{i,\,j-1}}{2 \cdot \Delta h} \right] \qquad (18)$$

Разностная схема (18) определяет изменение температурного поля для внутренних узлов сетки потока жидкости. В то же время для точек на оси потока необходимо учесть условие симметрии (11). В этом случае в уравнении (10) слагаемое:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_{ж}(r, x)}{\partial r} = 0 \qquad (19)$$

Следовательно, с учетом (19) расчетная схема (18) для оси потока приобретает вид:

$$\frac{P_{нач} - P_{кон}}{4 \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}} \left[R_{тр}^2 - (\Delta h \cdot j)^2 \right] \cdot \frac{t_{i+1,\,j} - t_{i-1,\,j}}{2 \cdot \Delta x} - a_{ж} \cdot \frac{t_{i+1,\,j} - 2 \cdot t_{i,\,j} + t_{i-1,\,j}}{\Delta x^2} = = a_{ж} \cdot \left[\frac{t_{i,\,j+1} - 2 \cdot t_{i,\,j} + t_{i,\,j-1}}{\Delta h^2} \right] \qquad (20)$$

Для получения расчетной схемы с учетом условия симметрии (20) подставим в него индекс ($j=0$):

$$\frac{P_{нач} - P_{кон}}{4 \cdot \mu_{ж} \cdot L_{тр}} \cdot R_{тр}{}^2 \cdot \frac{t_{i+1,0} - t_{i-1,0}}{2 \cdot \Delta x} - a_{ж} \cdot \frac{t_{i+1,0} - 2 \cdot t_{i,0} + t_{i-1,0}}{\Delta x^2} = a_{ж} \cdot \left(\frac{2 \cdot t_{i,1} - 2 \cdot t_{i,0}}{\Delta h^2} \right) \qquad (21)$$

На стенке трубы скорость потока жидкости равна нулю (условие «прилипания»), следовательно, в уравнении (18) при ($j=jR$) конвективный член отсутствует:

$$-\frac{t_{i+1,jR} - 2 \cdot t_{i,jR} + t_{i-1,jR}}{\Delta x^2} = \left(\frac{t_{i,jR+1} - 2 \cdot t_{i,jR} + t_{i,jR-1}}{\Delta h^2} + \frac{1}{\Delta h \cdot jR} \cdot \frac{t_{i,jR+1} - t_{i,jR-1}}{2 \cdot \Delta h} \right) \qquad (22)$$

В уравнение (22) входят значения температурного поля границы ($t_{i,\,jR}$) и стенки трубы ($t_{i,\,jR+1}$). Эти величины должны учитывать условия сопряжения тепловых потоков (16). Для учета условия сопряжения используем разностную схему этого уравнения:

$$\lambda_{ж}\cdot\frac{t_{i,jR}-t_{i,jR-1}}{\Delta h}=\lambda_{тр}\cdot\frac{t_{i,jR+1}-t_{i,jR}}{\Delta h} \qquad (23)$$

Выражая из уравнения (23) температуру в точке ($t_{i,\,jR+1}$):

$$t_{i,jR+1}=\frac{\lambda_{ж}\cdot t_{i,jR}+\lambda_{тр}\cdot t_{i,jR}-\lambda_{ж}\cdot t_{i,jR-1}}{\lambda_{тр}} \qquad (24)$$

получаем расчетную схему для температурного поля в точке сопряжения:

$$-\frac{t_{i-1,jR}-2\cdot t_{i,jR}+t_{i+1,jR}}{\Delta x^{2}}=\frac{\left(t_{i,jR}-t_{i,jR-1}\right)\cdot\left(\lambda_{ж}+\lambda_{тр}+2\cdot jR\cdot\lambda_{ж}-2\cdot jR\cdot\lambda_{тр}\right)}{2\cdot jR\cdot\Delta h^{2}\cdot\lambda_{тр}} \qquad (25)$$

Таким образом, уравнения (18), (21), и (25) образуют систему разностных уравнений для расчета температурного поля потока жидкости внутри трубы.

Для разностной схемы температурного поля стенок трубы сетка определяется в пространстве решений по номерам узлов определяемым матрицей ($t_{i,j}$), где i=0,1,…,*Max X*; j=*jR*, *jR*+1,…,*Max R*. Для внутренних узлов сетки разностный аналог уравнения (13) имеет вид:

$$\frac{t_{i,j+1}-2\cdot t_{i,j}+t_{i,j-1}}{\Delta h^{2}}+\frac{1}{\Delta h\cdot j}\cdot\frac{t_{i,j+1}-t_{i,j-1}}{2\cdot\Delta h}+\frac{t_{i+1,j}-2\cdot t_{i,j}+t_{i-1,j}}{\Delta x^{2}}=0 \qquad (26)$$

Используем уравнение (26) для слоя на внутренней поверхности трубы (j=*jR*):

$$\frac{t_{i,jR+1}-2\cdot t_{i,jR}+t_{i,jR-1}}{\Delta h^{2}}+\frac{1}{\Delta h\cdot jR}\cdot\frac{t_{i,jR+1}-t_{i,jR-1}}{2\cdot\Delta h}+\frac{t_{i+1,jR}-2\cdot t_{i,jR}+t_{i-1,jR}}{\Delta x^{2}}=0 \qquad (27)$$

В уравнении (27) присутствует температура точки, находящейся в потоке жидкости ($t_{i,\,jR-1}$). Для ее аппроксимации используем уравнение (23), из которого выразим ($t_{i,\,jR-1}$):

$$\frac{t_{i-1,jR}-2\cdot t_{i,jR}+t_{i+1,jR}}{\Delta x^{2}}-\frac{\left(t_{i,jR}-t_{i,jR+1}\right)\cdot\left(\lambda_{ж}-\lambda_{тр}\right)}{\Delta h^{2}\cdot\lambda_{ж}}-\frac{\left(t_{i,jR}-t_{i,jR+1}\right)\cdot\left(\lambda_{ж}+\lambda_{тр}\right)}{2\cdot j\cdot\Delta h^{2}\cdot\lambda_{ж}}=0 \qquad (28)$$

Для упрощения дальнейших алгебраических преобразований без потери общности решаемой задачи нормируем температурные поля на отрезке (0…1). В этом случае $t_{0,\,j}$=1 для j=0,1,2,3,…, *Max R*-1 и $t_{0,\,MaxR}$ =0 и уравнение (26) для внешней границы трубы (j=*Max R*-1) приобретет вид:

$$\frac{t_{i,MaxR}-2\cdot t_{i,MaxR-1}+t_{i,MaxR-2}}{\Delta h^{2}}-\frac{t_{i,MaxR}-t_{i,MaxR-2}}{2\cdot\Delta h^{2}-2\cdot MaxR\cdot\Delta h^{2}}+\frac{t_{i-1,MaxR-1}+t_{i+1,MaxR-1}-2\cdot t_{i,MaxR-1}}{\Delta x^{2}}=0 \qquad (29)$$

Учитывая значение нормированного температурного поля на внешней границе трубы, имеем из (29) следующую расчетную схему:

$$\frac{0-2\cdot t_{i,MaxR-1}+t_{i,MaxR-2}}{\Delta h^{2}}-\frac{0-t_{i,MaxR-2}}{2\cdot\Delta h^{2}-2\cdot MaxR\cdot\Delta h^{2}}+\frac{t_{i-1,MaxR-1}+t_{i+1,MaxR-1}-2\cdot t_{i,MaxR-1}}{\Delta x^{2}}=0 \qquad (30)$$

Таким образом, уравнения (26), (28), и (30) образуют систему разностных уравнений для расчета температурного поля стенки трубы.

ВЫВОД

В конечных разностях сформулирована задача сопряженного теплопереноса потока в трубчатой мембране.

Литература:

1. Теплообмен в теплообменниках с полимерными половолоконными мембранами / А.А. Схаляхов [и др.] // Известия ВУЗов. Пищевая технология. 2009. №2-3. С. 79-81.

2. Протодьяконов И.О., Марцулевич Н.А., Марков А.В. Явления переноса в процессах химической технологии. Л.: Химия, 1981. 264 с.

3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.

4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.