УДК 517.23
ББК 22.14
К-89

Куижева Саида Казбековна, *кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики и системного анализа Майкопского государственного технологического университета, доцент тел.: (8772)572151.*

НЕКОТОРЫЕ СТАНДАРТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АЛЛЕРА

(рецензирована)

В данной статье рассмотрены постановка и решение стандартных краевых задач для одного уравнения гиперболического типа третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение с частными производными, уравнение Аллера, метод разделения переменных.

Kuizheva Saida Kazbekovna*, Cand. of Physics and Mathematics, head of the chair of higher mathematics and systems analysis of Maikop State Technological University, senior lecturer, tel.: (8772) 572151.*

SOME STANDARD BOUNDARY PROBLEMS FOR ALLER'S EQUATION

This article discusses the formulation and solution of the standard boundary value problems for a hyperbolic equation of third order with constant coefficients.

Keywords: boundary value problem, partial differential equation, the equation of Allaier, the method of separation of variables.

Рассмотрим уравнение Аллера [1]

$$u_t = (au_x + bu_{xt})_x, \tag{1}$$

где $a = a(x,t)$, $b = b(x,t)$ заданные непрерывные действительные функции в области $\Omega = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$.

Уравнение (1) встречается в математическом моделировании явления переноса в живых системах при условии, что учитывается скорость диффузионного процесса [1, 2].

Изучение уравнений с частными производными целесообразно начинать с уравнений с постоянными коэффициентами, в виду того, что такие уравнения могут иметь некорректные решения [3].

По аналогии с уравнением теплопроводности, имеющим некорректные решения, приведем пример некорректного решения для уравнения Аллера.

Для удобства положим в уравнении (1) $a = 1, b = \frac{1}{n^2}$. Рассмотрим последовательность решений $u_n(x,t) = e^{-n}e^{-\frac{n^2}{2}t}\sin nx,\quad t < 0, 0 \le x \le \pi$, удовлетворяющих условиям $u_n(0,t) = e^{-n}\sin nx$. Легко проверить, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(0,t) = 0$, в то же время $u_n(x,t)$ при $t < 0$ неограниченны.

Рассмотрим несколько стандартных краевых задач для уравнения (1), при условии, что *a* и *b* постоянные.

Задача 1. *Найти решение уравнения (1) в области* $\Omega = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ *при граничных условиях:*

$$u\big|_{x=0} = 0,\ u\big|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

и начальном условии

$$u\big|_{t=0} = \psi(x), \tag{3}$$

где $\psi(x)$ *- некоторая достаточно гладкая функция на* $0 \le x \le l$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Решение. Решение уравнения (1) будем искать в виде:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1), имеем $XT' = aX''T + bX''T'$ или $\frac{T'}{T}(a + b\frac{T'}{T})^{-1} = \frac{X''}{X} = -\lambda$,
где λ – константа разделения переменных, получаем два уравнения:

$$T'(t) + \frac{\lambda a}{1 + \lambda b}T(t) = 0, \quad (5)$$

$$X''(x) + \lambda X = 0. \quad (6)$$

Найдем решение уравнения (6) при условии, что $X(0) = X(l) = 0$.

Рассмотрим отдельно три случая: $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda > 0$.

1. При $\lambda < 0$ общее решение уравнения (6) имеет вид: $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, где C_1, C_2 – произвольные числа. Подставляя граничные условия, получаем: $C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0$, откуда следует, что $C_1 = 0,\ C_2 = 0$, и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

2. При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (6) имеет вид: $X(x) = C_1 + C_2 x$.

Подставляя граничные условия, получаем: $C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 + C_2 l = 0$, откуда следует, что $C_1 = 0,\ C_2 = 0$, и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (6) имеет вид: $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$. Подставляя граничные условия, получаем:

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \quad C_1 \cos\sqrt{\lambda}\,l + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\,l = 0,$$

откуда следует, что $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$, то есть, $\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}$, где $k \in Z$.

Таким образом, нетривиальные решения задачи 1 возможны лишь при значениях $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k \in Z$. Этим значениям λ_k соответствуют собственные функции $X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}$.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (5) имеет вид: $T_k(t) = a_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2 + (k\pi)^2 b}\right)$, где a_k – некоторые постоянные.

Таким образом, функция $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = a_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2 + (k\pi)^2 b}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$ удовлетворяет уравнению (1) при любом значении a_k.

Составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2 + (k\pi)^2 b}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad (8)$$

требуя выполнение начального условия (3), получим

$$u(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \quad (9)$$

Ряд (9) представляет собой разложение функции $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам в промежутке $(0, l)$. Коэффициенты a_k определяются по известной формуле

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \quad 10)$$

В силу сделанных предположений ряд (9) равномерно и абсолютно сходится к $\psi(x)$, поэтому функция $u(x,t)$, определяемая рядом (8), непрерывна в области $0 \le x \le l, \quad t > 0$, удовлетворяет начальному и граничным условиям и тем самым является решением задачи 1.

Задача 2. *Найти решение уравнения (1) в области* $\Omega = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ *при граничных условиях:*

$$u\big|_{x=0} = \psi_1(t),\ u\big|_{x=l} = \psi_2(t) \tag{11}$$

и начальном условии

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{12}$$

где $\varphi(x)$ *- некоторая достаточно гладкая функция на* $0 \le x \le l$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Решение. Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{13}$$

где

$$T_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{14}$$

Интегрируя два раза по частям (14), получаем

$$T_k(t) = \frac{2}{k\pi}(u(0,t) - (-1)^k u(l,t)) - \frac{2l}{k^2\pi^2}\int_0^l u_{xx}\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{15}$$

Дифференцируя (15) по t, получаем

$$\frac{dT_k(t)}{dt} = \frac{2}{k\pi}(\psi_1'(t) - (-1)^k\psi_2'(t)) - \frac{2l}{k^2\pi^2}\int_0^l u_{xxt}\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{16}$$

Умножив равенства (15) и (16) соответственно на a и b, затем сложив полученные равенства почленно, получим:

$$b\frac{dT_k(t)}{dt} + aT_k(t) = b\frac{2l}{k\pi}(\psi_1'(t) - (-1)^k\psi_2'(t)) + a\frac{2l}{k\pi}(\psi_1(t) - (-1)^k\psi_2(t)) -$$
$$- \frac{2l}{k^2\pi^2}\int_0^l (au_{xx} + bu_{xxt})\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{17}$$

Дифференцируя равенство (14) по t, получаем:

$$\frac{dT_k(t)}{dt} = \frac{2}{l}\int_0^l u_t\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{18}$$

Исключая интеграл из равенств (17) и (18), учитывая (1), получим уравнение:

$$\left(\frac{2b}{l} + \frac{2l}{k^2\pi^2}\right)\frac{dT_k(t)}{dt} + \frac{2a}{l}T_k(t) = = \frac{4}{k\pi}(b(\psi_1'(t) - (-1)^k\psi_2'(t)) + a(\psi_1(t) - (-1)^k\psi_2(t))). \tag{19}$$

Введем обозначение:

$$\psi(t) = \frac{4}{k\pi}(b(\psi_1'(t) - (-1)^k\psi_2'(t)) + a(\psi_1(t) - (-1)^k\psi_2(t))),$$

тогда общее решение уравнения (19) примет вид:

$$T_k(t) = e^{-\frac{\pi^2k^2a}{b\pi^2k^2+l^2}t}\left(C_k + \frac{b\pi^2k^2 + l^2}{\pi^2k^2a}\int_0^t e^{\frac{\pi^2k^2a}{b\pi^2k^2+l^2}t}\psi(\tau)d\tau\right), \tag{20}$$

где $C_k = T_k(0)$.

Равенство $u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l}$ обеспечивает выполнение начального условия (12). Следовательно,

$$T_k(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \tag{21}$$

Таким образом, решением задачи 2 будет ряд (13), где $T_k(t)$ определяются равенствами (20) и (21).

Задача 3. *Найти решение уравнения (1) в области* $\Omega = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ *при граничных условиях:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} - hu\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + hu\Big|_{x=l} = 0 \tag{22}$$

и начальном условии

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{23}$$

где $\varphi(x)$ *- некоторая достаточно гладкая функция на* $0 \le x \le l$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Решение. Решение уравнения (1) будем искать в виде (4). После подстановки (4) в (1) получаем уравнения

$$T'(t) + \frac{\lambda^2 a}{1+\lambda^2 b} T(t) = 0, \tag{24}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X = 0, \tag{25}$$

где λ^2 – константа разделения переменных.

Интегрируя уравнение (25), получаем: $X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$. Из условий (22) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} hC_1 - hC_2 = 0, \\ (h\cos\lambda l - \lambda \sin\lambda l)C_1 + (h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda)C_1 = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Для того чтобы система (26) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно потребовать, чтобы определитель системы был равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} h & -\lambda \\ h\cos\lambda l - \lambda\sin\lambda l & h\sin\lambda l + \lambda\cos\lambda l \end{vmatrix} = 0.$$

После упрощения получаем:

$$2ctg\mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu}, \tag{27}$$

где $\mu = \lambda l$, $p = hl > 0$. Обозначив через μ_k – положительные корни уравнения (27), получим: $X_k(x) = \cos\frac{\mu_k x}{l} + \frac{p}{\mu_k}\sin\frac{\mu_k x}{l}$. При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (24) имеет вид $T_k(t) = a_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2 + (k\pi)^2 b}\right)$, где a_k – некоторые постоянные. Таким образом, находим решение уравнения (1) в виде:

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = a_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2+(k\pi)^2 b}\right)(\cos\frac{\mu_k x}{l} + \frac{p}{\mu_k}\sin\frac{\mu_k x}{l}).$$

Составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2+(k\pi)^2 b}\right)(\cos\frac{\mu_k x}{l} + \frac{p}{\mu_k}\sin\frac{\mu_k x}{l}). \tag{28}$$

Подставляя начальное условие (23), получаем:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2+(k\pi)^2 b}\right)(\cos\frac{\mu_k x}{l} + \frac{p}{\mu_k}\sin\frac{\mu_k x}{l}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_k(x). \tag{29}$$

Полагая, что ряд (29) сходится равномерно, найдем по известной формуле коэффициенты a_k и подставив их в ряд (28), получим решение задачи 3:

$$u(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2+(k\pi)^2 b}\right)\frac{\mu_k\cos\frac{\mu_k x}{l} + p\sin\frac{\mu_k x}{l}}{p(p+2)+\mu_k^2}) \times$$

$$\times \int_0^l \varphi(x)(\mu_k \cos\frac{\mu_k x}{l} + p\sin\frac{\mu_k x}{l})dx.$$

Задача 4. *Найти решение уравнения (1) в области* $\Omega = \{(x,t): 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ *при граничных условиях:*

$$u(0,t) = u(l,t),\ u_x(0,t) = u_x(l,t) \tag{30}$$

и начальном условии

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{31}$$

где $\varphi(x)$ *- некоторая достаточно гладкая функция на* $0 \le x \le l$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Решение. Решение уравнения (1) будем искать в виде (4). После подстановки (4) в (1) получаем уравнения (24) и (25). Интегрируя уравнение (25), получаем: $X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$, где $C_1,\ C_2$ – произвольные числа. Вычислим производную $X'(x)$: $X'(x) = -\lambda C_1 \sin\lambda x + \lambda C_2\cos\lambda x$. С учетом условий (30) составим систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1(\cos\lambda l - 1) + C_2\sin\lambda l = 0, \\ -\lambda C_1\sin\lambda l + \lambda C_2(\cos\lambda l - 1) = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Для того чтобы система (32) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно потребовать, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda l - 1 & \sin\lambda l \\ -\lambda\sin\lambda l & \lambda(\cos\lambda l - 1) \end{vmatrix} = 0.$$

После упрощения получаем:

$$2\lambda(1 - \cos\lambda l) = 0, \tag{33}$$

откуда следует, что $\lambda = 0, \lambda = \dfrac{2\pi k}{l}, k \in Z$.

Обозначив через λ_k – положительные корни уравнения (33), получим, что система (32) имеет решение. Следовательно, $X_k(x) = C_k\cos\dfrac{2\pi kx}{l} + D_k\sin\dfrac{2\pi kx}{l}$, где $C_k,\ D_k$ – произвольные постоянные. При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (24) имеет вид: $T_k(t) = a_k\exp\left(-\dfrac{(k\pi)^2 at}{l^2 + (k\pi)^2 b}\right)$, где a_k – некоторые постоянные. Таким образом, решение уравнения (1) принимает вид

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = a_k\exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2 + (k\pi)^2 b}\right)(C_k\cos\frac{2\pi kx}{l} + D_k\sin\frac{2\pi kx}{l}).$$

Составим ряд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2 + (k\pi)^2 b}\right)(C_k\cos\frac{2\pi kx}{l} + D_k\sin\frac{2\pi kx}{l}). \tag{34}$$

Подставляя начальное условие (31), получаем:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\exp\left(-\frac{(k\pi)^2 at}{l^2 + (k\pi)^2 b}\right)(C_k\cos\frac{2\pi kx}{l} + D_k\sin\frac{2\pi kx}{l}). \tag{35}$$

Полагая, что ряд (35) сходится равномерно, найдем по известной формуле коэффициенты a_k и подставим их в ряд (34), тем самым получим решение задачи 4.