

УДК 621.45.04

ББК 35.51

С-92

*Схалияхов Анзаур Адамович, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры технологий, машин и оборудования пищевых производств, декан технологического факультета Майкопского государственного технологического университета, 385000, Республика Адыгея, г. Майкоп, ул. Первомайская, 191, тел.: (8772) 570412.*

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРАВЛИКИ МЕМБРАННОГО РЕАКТОРА В ЛИНИИ ПРОИЗВОДСТВА БИОДИЗЕЛЯ

(рецензирована)

*Мембранный реактор с полволоконными или трубчатыми мембранами для разделения жидких смесей состоит из пучка (связки) мембран в виде полых волокон-капилляров или труб, расположенных параллельно друг другу и заключенных в кожухе. Пространство между мембранами ограничено кожухом модуля и рассматривается как внешнее пространство мембран. На кожухе с обеих противоположных сторон для подачи и отвода потока имеются патрубки, соединенные с внешним пространством мембран, и коллекторы, соединенные с внутренним пространством мембран.*

*Ключевые слова: мембранный реактор, мембрана, переэтерификация, математическая модель, биодизель.*

*Skhalyakhov Anzaur Adamovich, Cand. of technical sciences, senior lecturer, professor of the chair of technology, machinery and equipment for food production, dean of the technological faculty of Maikop State Technological University, 385000, Republic of Adyghea, Maikop, 191 Pervomaiskaya St., tel.: (8772) 570412.*

### MATHEMATICAL MODEL OF HYDRAULIC MEMBRANE REACTOR IN BIODIESEL PRODUCTION LINES

*Membrane reactor with a hollow fiber or tubular membranes for separation of liquid mixtures is composed of a bundle of membranes in the form of hollow fibers, capillaries or tubes, arranged parallel to each other and enclosed in a housing. The space between the membranes is limited by a casing module and is regarded as outer space membranes. In the encasement with the two opposite sides for the filing and withdrawal of the flow tubes are connected to the exterior membranes, and collectors connected to the inner space of the membranes.*

*Keywords: membrane reactor, membrane, mathematical model, re-etherification, biodiesel.*

Существуют различные подходы к моделированию гидравлики модулей с мембранами [1-7]. Ряд моделей [1-3] базировался на условии, что поток, связанный с каждой мембраной, идентичен, так что отдельная мембрана вместе со средой, окружающей его кольцом, называют цилиндром Крома [4]. Радиус цилиндра Крома  $R_s$ , соответствует внешнему радиусу кольца среды. При этом доля объема такого внешнего кольцевого объема в общем объеме цилиндра является такой же, как пористость целого пучка. Принято считать, что обмен происходит только между внешним кольцевым объемом и внутренним объемом мембраны без обмена между смежными цилиндрами Крома.

Мембранный реактор позволяет реализовать процесс переэтерификации растительных масел в процессе перемещения реакционной смеси во внутреннем объеме трубчатых мембран и при этом масло остается в капельном виде и не проходит через поры мембран, а продукты реакции отделяются, что позволяет вести процесс рециркуляцией масла в области максимальной скорости реакции [8]. Мембранный реактор представляет собой контактор с пучком трубчатых мембран и для его моделирования надо получить с учетом уравнений Дарси зависимости для определения давлений во всех четырех патрубках

На рисунке 1 представлена схема контроля давлений на моделируемой фильтрационной установке для производства биодизеля.

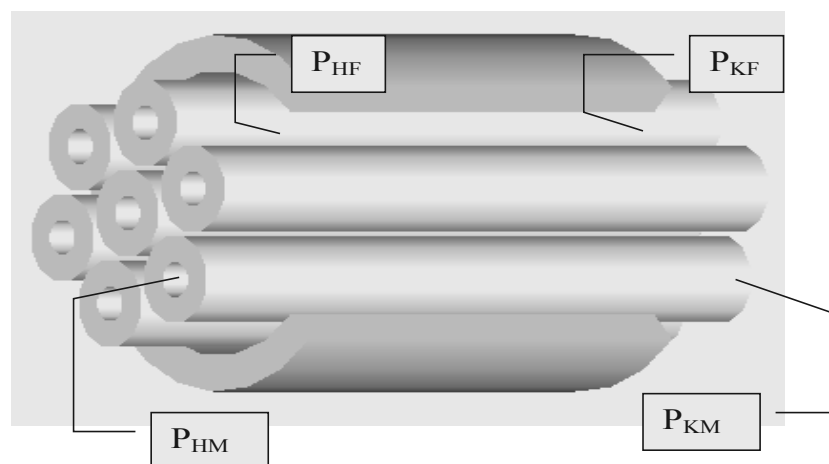


Рис. 1. Схема давлений на картридже

В качестве исходных уравнений выбрана система дифференциальных уравнений в простых производных, позволяющая получить функциональную зависимость изменения давлений по оси картриджа, как в керамической мембране, так и в межтрубном пространстве (картридже).

$$\frac{d^2 P_L}{d\sigma^2} = \frac{16K}{R_L^3} (P_L - P_S) \quad (1)$$

И

$$\frac{d^2 P_S}{d\sigma^2} = \mp \frac{16K}{R_L^3} \frac{1}{\gamma} (P_L - P_S) \quad (2)$$

Здесь знак «-» берется, когда перенос идет из внутреннего объема мембран во внешний объем модуля, а знак «+» - когда перенос идет из внешнего объема модуля во внутренний объем мембран.

$$\gamma = \left[ 4R_S^4 \ln(R_S / R_M) + 4R_S^2 R_M^2 - 3R_S^4 - R_M^4 \right] / R_L^4 = k_{x,S} / k_{x,L};$$

$$\sigma = \frac{xL_m}{L}; \quad A_v = \frac{2nR_L L_m}{R_S^2 L},$$

где  $K$  - проницаемость мембран;  $A_v$  - удельная поверхность мембран в объеме модуля;  $R_L$  - внутренний радиус мембран;  $R_M$  - внешний радиус волокна;  $R_S$  - радиус модуля;  $n$  - количество мембран в модуле;  $P_L$  и  $P_S$  - гидростатические давления внутри мембран и во внешнем объеме, соответственно;  $k_{x,L}$  и  $k_{x,S}$  - компоненты тензора проницаемости Дарси для обоих пространств (во внутреннем и внешнем объеме между мембранами) в осевом направлении (приняты постоянными);  $L_m$  - полная длина мембраны;  $L$  - длина рабочего объема модуля (если пренебречь различием между  $L_m$  и  $L$ , то в дальнейшем можно использовать вместо  $\sigma$  координату  $x$ ).

Значения  $k_{x,L}$  и  $k_{x,S}$  определяются выражением для осевой проницаемости во внутреннем объеме и внешнем объеме мембран по соотношениям:

$$k_{x,L} = \frac{nR_L^4 \sqrt{\tau}}{8R^2} \quad (3)$$

$$k_{x,S} = \frac{R_M^2 \tau}{4\phi} \left( -\ln \phi - \frac{3}{2} + 2\phi - \frac{1}{2}\phi^2 \right), \quad (4)$$

где  $\phi = 1 - \varepsilon_S$  - доля объема, занятого мембранами;  $\varepsilon_S = 1 - \frac{nR_M^2}{R^2}$  - пористость внешняя мембран модуля;  $\tau$  - извилистость пор.

Граничные условия уравнений (1) и (2) зависят от схемы потоков. Для разделения смесей возможны две схемы, когда перенос идет из внутреннего объема мембран во внешний объем модуля.

Для открытых входных или выходных патрубков принимается известное значение давления; если патрубок закрыт, то для него принимается нулевая производная давления, то есть накладывается условие отсутствия потока.

Рассмотрим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) и (2) с применением функционального преобразование Лапласа:

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{d^2 P_L(x)}{dx^2} \cdot e^{-s \cdot x} \right] dx = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{16 \cdot K}{R_L^3} \cdot [P_L(x) - P_S(x)] \cdot e^{-s \cdot x} \right\} dx \quad (5)$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{d^2 P_S(x)}{dx^2} \cdot e^{-s \cdot x} \right] dx = \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{16 \cdot K}{R_L^3} \cdot \frac{1}{\gamma} [P_L(x) - P_S(x)] \cdot e^{-s \cdot x} \right\} dx \quad (6)$$

В результате получаем систему алгебраических уравнений относительно изображений исходной системы дифференциальных уравнений:

$$s^2 \cdot Lp_L(s) - s \cdot B_1 - B_2 = \frac{16 \cdot K}{R_L^3} \cdot [Lp_L(s) - Lp_S(s)] \quad (7)$$

$$s^2 \cdot Lp_S(s) - s \cdot B_3 - B_4 = -\frac{16 \cdot K}{R_L^3} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot [Lp_L(s) - Lp_S(s)] \quad (8)$$

Полученная система алгебраических уравнений решается относительно изображений функций, причем  $s$  рассматривается как число:

$$Lp_L(s) = \left( \frac{16 \cdot \gamma \cdot K \cdot s}{a} \right) \cdot B_1 + \left( \frac{16 \cdot K - \gamma \cdot R_L^3 \cdot s^2}{a} \right) \cdot B_2 + \left( \frac{16 \cdot \gamma \cdot K \cdot s}{a} \right) \cdot B_3 + \left( \frac{16 \cdot \gamma \cdot K}{a} \right) \cdot B_4 \quad (9)$$

$$Lp_S(s) = \left( \frac{16 \cdot K \cdot s}{a} \right) \cdot B_1 + \left( \frac{16 \cdot K}{a} \right) \cdot B_2 + \left( \frac{\gamma \cdot R_L^3 \cdot s^3 - 16 \cdot \gamma \cdot K \cdot s}{a} \right) \cdot B_3 + \left( \frac{16 \cdot \gamma \cdot K - \gamma \cdot R_L^3 \cdot s^2}{a} \right) \cdot B_4, \quad (10)$$

где  $a = 16 \cdot K \cdot s^2 + 16 \cdot \gamma \cdot K \cdot s^2 - \gamma \cdot R_L^3 \cdot s^4$

При помощи известных соотношений между изображением искомой функции и оригиналом, используя формулы для преобразования на основе теории тригонометрических функций комплексной переменной, находим решение для оригиналов функций:

$$P_L(x) = \left[ \frac{1 + \gamma \cdot ch\left(\frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\gamma + 1} \right] \cdot B_1 + \left[ \frac{\lambda \cdot x + \gamma \cdot \sqrt{\gamma} \cdot sh\left(\frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\lambda \cdot (\gamma + 1)} \right] \cdot B_2 + \left[ \frac{\gamma - \gamma \cdot ch\left(\frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\gamma + 1} \right] \cdot B_3 - \left[ \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot x - \gamma \cdot \sqrt{\gamma} \cdot sh\left(\frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\lambda \cdot (\gamma + 1)} \right] \cdot B_4 \quad (11)$$

$$P_S(x) = \left[ \frac{1 - ch\left(\frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\gamma + 1} \right] \cdot B_1 + \left[ \frac{\lambda \cdot x - \sqrt{\gamma} \cdot sh\left(\frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\lambda \cdot (\gamma + 1)} \right] \cdot B_2 + \left[ \frac{\gamma + ch\left(\frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\gamma + 1} \right] \cdot B_3 + \left[ \frac{\gamma \cdot \lambda \cdot x + \sqrt{\gamma} \cdot sh\left(\frac{\lambda \cdot x}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\lambda \cdot (\gamma + 1)} \right] \cdot B_4, \quad (12)$$

где  $\lambda = \sqrt{\frac{16 \cdot K \cdot (\gamma + 1)}{R_L^3}}$ .

Эти уравнения, содержат четыре постоянных интегрирования, что совпадает с числом точек контроля давлений на схеме (рисунок 1) и позволяет определить постоянные интегрирования. Значение этих постоянных определяется системой алгебраических уравнений, получаемых при подстановке координат точек контроля давлений в уравнения давлений. Решение этих уравнений позволяет получить значения этих величин:

$$B_1 = P_{HM} \quad (13)$$

$$B_2 = 4 \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + 1}} \cdot \sqrt{\frac{r_p}{R_L^3}} \cdot \frac{\{(P_{KM} - P_{KF}) - (P_{HM} - P_{HF}) \cdot ch[\psi]\}}{sh[\psi]}} \quad (14)$$

$$B_3 = P_{HF} \quad (15)$$

$$B_4 = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma(\gamma + 1)}} \cdot \sqrt{\frac{r_p}{R_L^3}} \cdot \frac{\{(P_{HM} - P_{HF}) \cdot ch[\psi]\} - (P_{KF} - P_{KM})}{sh[\psi]}} \quad (16)$$

$$\text{где } \psi = 4 \cdot L_m \cdot \sqrt{\frac{r_p}{R_L^3}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma}}$$

Используя представленные формулы, была получена модель давлений, на основании которой определялись расходы в точках контроля давлений (рисунок 1):

$$Q_L = - \frac{n \cdot \pi \cdot R_L^4}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{dP_{xL}}{dx} \quad (17)$$

$$Q_S = - \frac{n \cdot \pi \cdot R_L^4}{8 \cdot \mu} \cdot \frac{dP_{xS}}{dx} \quad (18)$$

### ВЫВОД

Полученные зависимости представляют блок гидравлики в общей математической модели мембранного реактора.

### Литература:

1. Apelblat, A., Katzir-Katchalsky, A., Silberberg, A. A mathematical analysis of capillary-tissue fluid exchange. *Biorheology* 1974, 11, 1-49.
2. Bruining, W. J. A general description of flows and pressures in hollow fiber membrane modules. *Chem. Engng Sci.* 1989, 44, 1441-1447.
3. Kelsey, L. J., Pillarella, M. R., Zydney, A. L. Theoretical analysis of convective flow profiles in a hollow-fiber membrane bioreactor. *Chem. Engng Sci.* 1990, 45, 3211-3220.
4. Krogh, A. The number and distribution of capillaries in muscles with calculations of the oxygen pressure head necessary for supplying the tissue. *J. Physiol.* 1919, 52, 409-415.
5. Labecki M., Piret J.M., Bowen B.D. Two-dimensional analysis of fluid flow in hollow-fibre modules. *Chemical Engineering Science*, 1995, Vol. 50, No. 21, 3369 - 3384,
6. Labecki, M., Bowen, B.D., Piret, J.M., Two-dimensional analysis of protein transport in the extracapillary space of hollow-fibre bioreactors. *Chemical Engineering Science*, 1996, 51 (17), 4197-4213.
7. An analysis of laminar fluid flow in porous tube and shell systems. *Chem. Engng Sci.* 1991, 46, 2847-2855.
8. Схаляхов А.А., Блягоз Х.Р., Кошевой Е.П. Производство биотоплива из масел и жиров: монография / Федер. агентство по образованию, ГОУ ВПО «МГТУ». Майкоп: МГТУ, 2008. 132 с. Библиогр.: с. 110-131 (331 назв.).