УДК. 678.057.3
ББК 35.51
М-52

Меретуков Заур Айдамирович, *кандидат технических наук, доцент кафедры машин и аппаратов пищевых производств технологического факультета Майкопского государственного технологического университета,* zamer@radnet.ru.

Кошевой Евгений Пантелеевич, *доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой машин и аппаратов пищевых производств Кубанского государственного технологического университета,* Koshevoi@kubstu.ru.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ РАСТИТЕЛЬНОГО МАТЕРИАЛА НА ВЫХОДЕ ИЗ МАТРИЦЫ ЭКСТРУДЕРА

Деформирование материалов на выходе экструдера предлагается описать на основе теории упругости, приняв параметры как эффективные. Рассматривается перемещение осевое и радиальное, описываемое системой дифференциальных уравнений в осесимметричной цилиндрической системе координат. Преобразование системы с учетом выражений для констант Ляме и модуля объемного сжатия показали, что из всех параметров, характеризующих свойства материала, оказывают влияние коэффициенты Пуассона и линейного расширения.

Предложено осуществить решение, приняв допущение, что зависимость расширения в осевом и радиальном направлении представляется как функция соответственно радиальной и осевой координаты.

Установлены значения коэффициента линейного расширения при экструзии крупки желтой кукурузы, которые можно считать независящими от направления деформирования. Величина коэффициента Пуассона оказывает незначительное влияние на деформирование гранул.

Ключевые слова: растительный материал, экструзия, сжатие, деформирование, теория упругости, расширение.

Meretukov Zaur Aidamirovich, *Cand.Tech.Sci., assistant professor of machinery and food industry devices department at the technological faculty, Maikop State Technological University, zamer@radnet.ru.*

Koshevoj Evgenie Panteleevich, *Dr.Sci.Tech.,Professor, the head of machinery and food industry devices department at the Kuban State Technological University,* Koshevoi@kubstu.ru.

MODELLING OF DEFORMATION OF PLANT MATERIAL ON THE WAY OUT FROM MATRIX OF EXTRUDING MACHINE

Deformation of materials on the exit of extruding machine is described on the basis of the elasticity theory, having accepted effective parameters. Axial and radial transferring, is described by system of differential equations in axisymmetrical and cylindrical system of co-ordinates. Transformation of system with Lyame's constants and module of dilation have shown that Puasson's coefficient and line expansion have the greatest influence of all parameters.

It is offered to carry out the decision, that the expansion in an axial and radial direction is represented as a function of radial and axial co-ordinate.

The values of coefficient of line expansion are established at grit extrusion of yellow corn, which are independent from deformation direction. The value of Puasson's coefficient makes insignificant impact on granules deformation.

Keywords: plant material, extrusion, compression, deformation, elasticity theory, expansion.

В процессе экструзии в рабочем канале шнека изменяется давление на обрабатываемый материал, и наибольшее давление в материале создается при прохождении отверстия матрицы [1]. Непосредственно на выходе из отверстия матрицы материал испытывает резкий сброс давления. Все эти изменения давления вызывают деформирование материала, свойства которого в итоге зависят от этого процесса, особенно от протекания последней стадии на выходе из отверстия матрицы [2].

Рассматривая деформации материала в отверстии матрицы и допуская применимость теории упругости (т.е. рассматривая параметры процесса как эффективные), можно представить осесимметричную задачу в цилиндрических координатах как линейную, т.е. при независимости механических свойств деформируемого материала от координат

$$\mu\nabla^2 u + 3(\lambda+\mu)\frac{\partial \varepsilon_{cp}}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2}u - 3K\frac{\partial \varepsilon_{в}}{\partial r} = 0 \tag{1}$$

$$\mu\nabla^2 w + 3(\lambda+\mu)\frac{\partial \varepsilon_{cp}}{\partial z} - 3K\frac{\partial \varepsilon_{в}}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

где
$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right); \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3}$$

Здесь λ и μ – константы Ляме и K – модуль объемного сжатия

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{4}$$

выраженные через E – модуль упругости или модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона, а также G – модуль сдвига.

После преобразований с учетом (3) уравнения (1) и (2) примут вид

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\mu}{r^2}u - 3K\frac{\partial \varepsilon_{в}}{\partial r} = 0 \tag{5}$$

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + (\lambda+\mu)\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda+\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 3K\frac{\partial \varepsilon_{в}}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

Вынужденная деформация $\varepsilon_в$ возникает под действием релаксируемого градиента давления, например, давления паров воды.

С учетом малых размеров гранул распределение давления можно представить в виде линейных зависимостей.

Для осевого направления $$P_z = P_0\left(1 - z / w(L)\right) \tag{7}$$

где *w(L)* – осевое перемещение гранулы на выходе из канала длиной *L*, которое связано с осевым расширением $\varepsilon_z = \dfrac{w(L) - L}{L}$.

Для радиального направления $$P_r = P_0\left(1 - r / u(r_0)\right) \tag{8}$$

где $u(r_0)$ – радиальное перемещение гранулы на выходе из канала диаметром r_0, которое связано с радиальным расширением (отношение площадей расширенной гранулы к площади отверстия канала) $\varepsilon_r = \dfrac{u^2(r_0)}{r_0^2}$.

Вынужденную деформацию $\varepsilon_в$, возникающую под действием развиваемого давления, предлагается [2,3] представить, например, для осевого перемещения следующей зависимостью

$$\varepsilon_в = \int_{P_z}^{0} \alpha_P \, dP \tag{9}$$

где α_P – коэффициент линейного расширения.

Определенный интеграл (9) с учетом (7) имеет вид

$$\varepsilon_в = -\alpha_P P_z = \alpha_P P_0 \frac{z}{W_L} - \alpha_P P_0 \tag{10}$$

Производная вынужденной осевой деформации (10) имеет вид

$$\frac{d\varepsilon_в}{dz} = \alpha_P \frac{P_0}{W_L} \tag{11}$$

Вынужденную деформацию $\varepsilon_в$, возникающую под действием развиваемого давления для радиального перемещения можно представить следующей зависимостью

$$\varepsilon_в = \int_{P_r}^{0} \alpha_P \, dP \tag{12}$$

Определенный интеграл (12) с учетом (8) имеет вид

$$\varepsilon_{в} = -\alpha_P P_r = \alpha_P P_0 \frac{r}{u(r_0)} - \alpha_P P_0 \qquad (13)$$

Производная вынужденной радиальной деформации (13) имеет вид

$$\frac{d\varepsilon_{в}}{dr} = \alpha_P \frac{P_0}{u(r_0)} \qquad (14)$$

Уравнения (5) и (6) после преобразований с учетом полученных выражений для производных соответствующих вынужденных деформаций перемещения (11) и (14) принимают вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)}\frac{u}{r^2} - \frac{3K}{(\lambda+2\mu)}\frac{\alpha_P P_0}{u(r_0)} = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(\lambda+\mu)}{\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{3K}{\mu}\frac{\alpha_P P_0}{W_L} = 0 \qquad (16)$$

Множители в уравнениях (15) и (16), содержащие константы Ляме и модуль объемного сжатия (4), принимают вид

$$\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)};\quad \frac{(\lambda+\mu)}{(\lambda+2\mu)} = \frac{1}{2(1-\nu)};\quad \frac{3K}{(\lambda+2\mu)} = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)};$$

$$\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu};\quad \frac{(\lambda+\mu)}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu};\quad \frac{3K}{\mu} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}. \qquad (17)$$

Таким образом, только коэффициент Пуассона и коэффициент линейного расширения представляют свойства материала в уравнениях (15) и (16), которые принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{u}{r^2} - \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\alpha_P P_0}{u(r_0)} = 0 \qquad (18)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{(1-2\nu)}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{(1-2\nu)}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\frac{\alpha_P P_0}{W_L} = 0 \qquad (19)$$

Если принять что перемещение в радиальном и осевом направлении зависит соответственно от радиальной и осевой координаты уравнения (18) и (19) могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\frac{u}{r^2} - \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\alpha_P P_0}{u(r_0)} = 0 \qquad (20)$$

$$\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}\frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\frac{\alpha_P P_0}{W_L} = 0 \qquad (21)$$

Уравнение (20) является неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка и его решение, описывающее радиальное расширение, имеет вид

$$u(r, C_1, C_2) = \left(C_1 r^{\sqrt{b}} + C_2 r^{-\sqrt{b}}\right) + \frac{D}{b-4} r^2 \qquad (22)$$

Где $D = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\alpha_p P_0}{u(r_0)}$ и $b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$

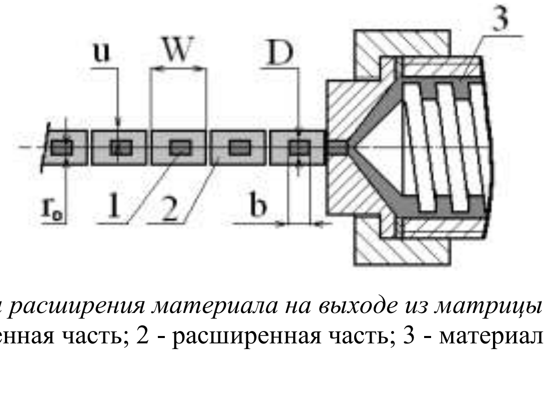

Рис.1. Схема расширения материала на выходе из матрицы экструдера
1 - не расширенная часть; 2 - расширенная часть; 3 - материал в экструдере.

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 находили с учетом граничных условий. Во-первых, на краю отверстия матрицы процесс расширения гранулы только начинается и перемещение еще отсутствует $u(r_0, C_1, C_2) = 0$, и, во-вторых, на радиусе, соответствующему полному перемещению процесс заканчивается и можно принять $du(u(r_0), C_1, C_2)/dr = 0$.

Для идентификации параметра α_p использовали экспериментальные данные [2]. Коэффициент Пуассона ν принимался равным 0,3, что соответствует свойствам дисперсных растительных материалов [4]. Расчеты выполнялись и с ν = 0,4 [4]. При этом получены близкие результаты.

Уравнение (21) является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка с разделяющимися переменными и его решение, описывающее осевое расширение, имеет вид

$$w(z, C_1, C_2, \alpha_p) = -\frac{1}{2} A z^2 + C_1 z + C_2 \tag{23}$$

где $A = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\alpha_p P_0}{W_L}$

Значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 находили с учетом граничных условий. Во-первых, на выходе из отверстия матрицы процесс расширения гранулы только начинается и перемещение еще отсутствует $w(z = 0, C_1, C_2) = 0$, и, во-вторых, на расстоянии z, соответствующем полному перемещению процесс заканчивается и можно принять $dw(z = W_L, C_1, C_2)/dz = 0$.

Для идентификации параметра α_p использовали экспериментальные данные [2]. Коэффициент Пуассона ν принимался равным 0,3 [4].

Статистическая обработка подтверждает, что значение коэффициента Пуассона практически несущественно. Значение коэффициента линейного расширения для различных режимов экструзии остается постоянным при ν = 0,3 среднее значение α_p = 2,87±0,42, а при ν = 0,4 среднее значение α_p = 2,61±0,43.

На основании представленного, можно сделать следующий *вывод*: деформирование материала на выходе из экструдера можно описать на основе теории упругости, рассматривая параметры процесса (коэффициенты Пуассона и линейного расширения) как эффективные.

Литература:

1. Кошевой Е.П., Меретуков З.А., Меретуков М.А. Экструдеры (теория, конструирование и расчет). Майкоп: МГТИ, 2003. 95 с. Деп. в ВИНИТИ 30.10.03, №1893.

2. Меретуков З.А. Совершенствование подготовки растительного сырья к экстракции способом экструдирования: автореф. дис. канд. техн. наук : 05.18.12. Майкоп, 2004. 20 с.

3. Sokhey A.S., Ali Y., Hanna M.A. Effects of die dimensions on extruder performance. Journal of Food Engineering, 1997, 31, 251-261.

4. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров: пер. с англ. / под. ред. В.Е. Гуля. М.: Иностранная литература, 1963. 535 с.