ISBN 978-5-88941-045-4 Рецензируемый, реферируемый научный журнал «Новые технологии». Выпуск 5, 2008

УДК 004.81
ББК 65.050.9(2)
Н -49

Беданоков М.К., Коблева Р.Б.,
Мирзова О.Д., Мирзова С.Д., **МГТУ, г. Майкоп**

НЕЛИНЕЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ГОР ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ В РАЙОНЕ КИСЛОВОДСКА

Посредством языка программирования «MATLAB» разработан пакет программ, позволяющий исследовать обтекание воздушным потоком рельефа произвольной формы. Рассматривается нелинейная трехслойная гидродинамическая аналитическая модель обтекания. Решение строится для открытой области, т.е. предполагается, что энергия внутренних гравитационных волн свободно уходит вверх.

В данной работе представлены результаты различных расчетов орографической функции и линий тока.

Динамика взаимодействия движущейся атмосферы с неровностями земли многими исследователями изучается средствами гидродинамики. Рассмотрим систему уравнений движения, адиабатичности и неразрывности:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vec{V} = \dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}\, p - \vec{g}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{dt} + \left(\vec{\nabla}\,\vec{V}\right) = \dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\rho\,\vec{V}\right)\right] = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\Theta = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}\vec{\nabla}\right),\ \vec{V} = (u, v, w),\ \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{1.1}$$

$\vec{V}$ - вектор скорости, ρ и p - плотность и давление, $\vec{g}$ - вектор силы тяжести, Θ - потенциальная температура, выражаемая через температуру T и давление по формуле:

$$\Theta = \mathrm{T}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{2}$$

В последней формуле k - отношение удельных теплоемкостей, p_0 - эталонное давление (давление в основном состоянии на земле). Силы Кориолиса при этом не учитываются в силу среднемасштабности движений, а силы вязкости опускаются, так как они существенно меньше сил Архимеда в свободной атмосфере, на которую и обращается основное внимание. Возмущения при этом определяются как отклонение атмосферы от ее основного состояния.

Основным состоянием атмосферы считают состояние атмосферы на бесконечном расстоянии перед обтекаемыми горами, в той части пространства, где всюду поверхность земли имеет вид бесконечной плоскости. Это состояние называют натекающим потоком.

Данную проблему начали с рассмотрения стационарных задач и со временем стало ясно, что в рамках стационарного приближения проблема остается сложной и перспективной для исследований. И нет необходимости переходить к нестационарным задачам. При этом основной акцент делается на учет действия неровностей на движущуюся упругую атмосферу. Упругость определяется вертикальной стратификацией среды. Возникающие возмущения изучаются на основе гидродинамики стратифицированной жидкости, а неровности играют роль вынуждающих сил. Тогда можно сказать, что взаимодействие атмосферы и неровностей имеет волновой характер, причем в возникающих возмущениях частота Брента-Вяйсяля N и собственный масштаб λ_c всегда должны так или иначе проявляться. Возникающие волны представляют пример внутренних гравитационных волн. Сами возмущения порождаются горами, поэтому их можно классифицировать как внутренние гравитационные волны орографической природы.

В нашей работе будем исходить из того, что в системе уравнений (1) в полной производной по времени опускается частная производная, т.е.

$$\frac{d}{dt} = \left(\vec{V}\vec{\nabla}\right) \tag{3}$$

Натекающий поток предполагается не зависящим от времени и полностью определяется вертикальными профилями скорости и одной из термодинамических величин. Если положить, что неровности земли локализованы в ограниченной окрестности начала координат, натекающий поток можно определить соотношениями:

$$\vec{V} \to U(z), \quad \mathrm{T} \to \overline{\mathrm{T}}(z) \quad \text{при } x \to \infty, \tag{4}$$

где U - скорость натекающего потока, а температура и остальные его термодинамические характеристики выделяются чертой сверху.

Наличие гидростатически устойчивого распределения температуры в натекающем потоке определяет упругие свойства атмосферы по отношению к быстрым вертикальным смещениям ее частиц. Мерой этой упругости в атмосфере служит частота Брента- Вяйсяля N, которая определяется формулой:

$$N^2 = \frac{g}{\overline{\Theta}}\frac{d\overline{\Theta}}{dz} = g\frac{\gamma_a - \gamma}{\mathrm{T}_1}, \qquad \gamma = -\frac{d\overline{\mathrm{T}}}{dz}, \tag{5}$$

где γ_a - сухоадиабатический градиент температуры, T_1 - характерная (средняя) температура рассматриваемого слоя атмосферы. Предполагая натекающий поток невозмущенным придем к тому, что необходимо ограничиться случаем

$$\gamma \le \gamma_a.$$

Вместе скорость и частота Брента- Вяйсяля N определяют некоторый масштаб b, который пропорционален собственному волновому масштабу λ_c, впервые введенному Лира [10]:

$$b = \frac{U}{N}, \quad \lambda_c = 2\pi b = 2\pi\frac{U}{N}. \tag{6}$$

В таких исследованиях, обычно, используется предположение о том, что натекающий поток не возмущен и не зависит от времени. Однако скорость натекающего потока сохраняется постоянной, а статистическая устойчивость скачком меняется от слоя к слою.

Для построения конкретной гидродинамической модели, в системе уравнений (1) необходимо линеаризовать нелинейные слагаемые. В атмосфере в широком диапазоне явлений термодинамические величины меняются относительно мало. Это позволяет часть слагаемых в написанных выше уравнениях линеаризовать. Упрощения производятся по Буссинеску[2,11]. После подобных преобразований уравнений неразрывности примет вид[1,2,12]:

$$\vec{\nabla}\vec{V} = \sigma w, \quad \sigma = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{d\overline{\rho}}{dz} = \frac{1}{\overline{\mathrm{T}}}\left(\frac{k}{k-1}\gamma_a - \gamma\right). \tag{7}$$

Так как величина σ в атмосфере достаточно мала, то в качестве уравнения неразрывности использовать уравнение несжимаемости. После указанных преобразований получим следующую систему уравнений движения, адиабатичности и несжимаемости [2,3,6,8,] для двумерного случая:

$$\begin{cases} \left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\vec{V} = -R\mathrm{T}_1\vec{\nabla}\dfrac{\rho'}{\rho} + \dfrac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}_1}\vec{g}, \\ \left(\vec{V}\vec{\nabla}\right)\mathrm{T}' = -\left(\gamma_a - \gamma\right)w, \\ \left(\vec{V}\vec{\nabla}\right) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где штрихами справа вверху отмечаются возмущения соответствующих величин, также используются обозначения (1) для двумерного случая. Условие несжимаемости позволяет ввести функцию тока с помощью формул

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{9}$$

Изолинии функции тока совпадают с траекториями движения, т.к. является стационарной величиной. В силу малости в (7) величины σ в системе уравнений (8) динамические, кинематические и термодинамические факторы учитываются с одинаковой точностью. Изменения T' вдоль траекторий пропорциональны $(\gamma - \gamma_a)w$.Градиент давления и сила тяжести в системе уравнений (8) также учитываются с приемлемой точностью.

После введения функции тока перекрестным дифференцированием первых уравнений из системы (8) легко исключить давление, далее используя якобиан представить ее в виде[6,8]:

$$\frac{\partial\left(\psi, \nabla^2\psi\right)}{\partial(x,z)} = \frac{g}{\mathrm{T}_1}-, \quad \frac{\partial\left(\psi, \mathrm{T}'\right)}{\partial(x,z)} = \left(\gamma_a - \gamma\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{10}$$

где

$$\frac{\partial(A,B)}{\partial(x,z)} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial x}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{11}$$

В натекающем потоке все возмущения отсутствуют, значит,

$$\mathrm{T}' \to 0, \ \ \frac{\partial\psi}{\partial x} \to 0, \ \ \psi \to \psi_0(z), \ \ \nabla^2 \to \frac{d^2}{dz^2} \ \text{ при } x \to -\infty. \tag{12}$$

Здесь ψ_0 - функция тока в натекающем потоке. Таким образом, решение задачи свели к решению двух уравнений (10) для двух искомых функций. (12) – одно из граничных условий. Полученные уравнения нелинейные. Переходя к рассмотрению некоторых частных случаев, можно получить линейные уравнения. Но сначала учтем, что уравнения (10) имеют первые интегралы. Они имеют вид:

$$\mathrm{T}' = f(\psi) - \int_0^z (\gamma_0 - \gamma)dz, \tag{13}$$

$$\nabla^2\psi = f_1(\psi) + \frac{g}{\mathrm{T}_1}\frac{\partial f}{\partial\psi}. \tag{14}$$

Вид произвольных функций f и f_1 проще всего определять в натекающем потоке, так как его свойства известны. Для определенных профилей скорости и устойчивости в натекающем потоке эти функции имеют такой вид, что уравнение задачи становится линейным. Согласно анализу [6,7,8], наиболее интересным для атмосферы вариантом является случай, когда

$$U = const, \ \gamma = const. \tag{15}$$

В этом случае решение проблемы сводится к решению уравнения Гельмгольца для возмущений функции тока в каждом слое:

$$\nabla^2\psi' + K^2\psi' = 0, \ \ \psi' = \psi - \psi_0, \ \ \psi_0 = -Uz, \tag{16}$$

$$K = \frac{N}{U} = b^{-1} = 2\pi\lambda_c^{-1}. \tag{17}$$

При этом возмущения температуры определяются через возмущения функции тока по формуле:

$$T' = -(\gamma_a - \gamma)\frac{\psi'}{U}, \tag{18}$$

Далее представим конкретную модель обтекания, опирающуюся на соотношения (15)-(18).Следует учесть, что на поверхности земли, заданной в виде

$$z = z_* + h(x), \tag{19}$$

граничное условие скольжения будет использоваться в виде:

$$\psi = -Uz_*, \quad \psi'(x,z) = Uh(x) \text{ при } z = z_* + h(x). \tag{20}$$

Здесь предполагается, что невозмущенный уровень земли в натекающем потоке равен z_*, а орографическое смещение относительно этого уровня есть $h(x)$, причем в окрестности точки $x = 0$ последнее отлично от нуля.

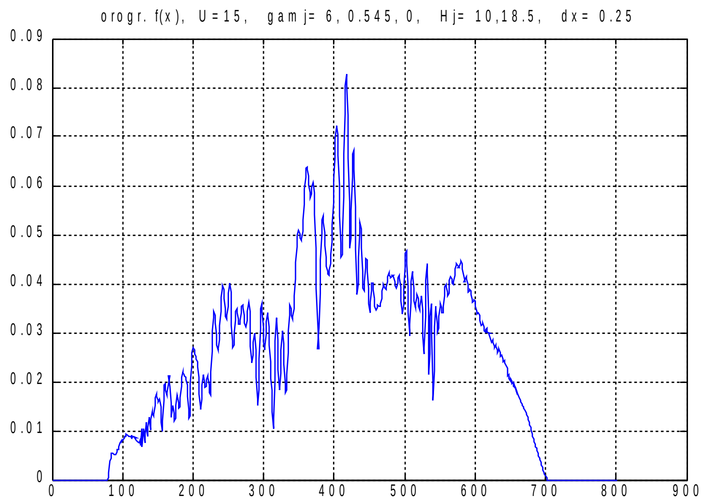
В результате приходим к решению интегрального уравнения Фредгольма I рода. При решении возникает необходимость определения орографической функции f,которая определяется на основе условия скольжения на поверхности земли.

Такими моделями можно пользоваться до достаточно больших высот, так как в окончательное уравнение входит не температура, а ее градиент и, кроме того, основная масса атмосферы сосредоточена в тропосфере, а для нее предположение $\gamma = const$ вполне оправдано.

Построенное решение нами применено к моделированию обтекания гор Кисловодска. Рассмотрены несколько вариантов.

<u>Случай 1.</u>

а)



б)

ISBN 978-5-88941-045-4 Рецензируемый, реферируемый научный журнал «Новые технологии». Выпуск 5, 2008

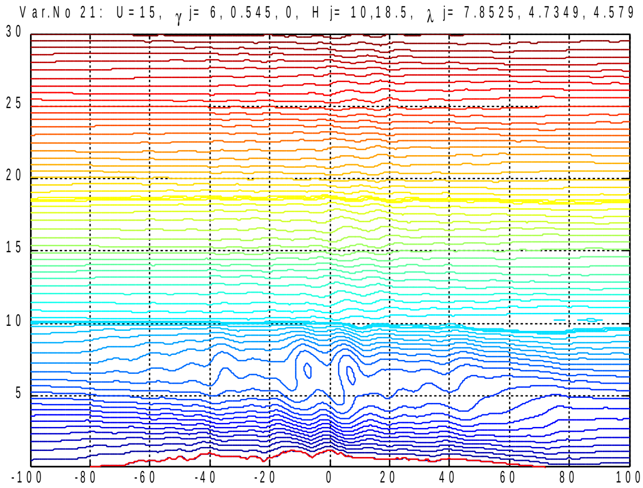
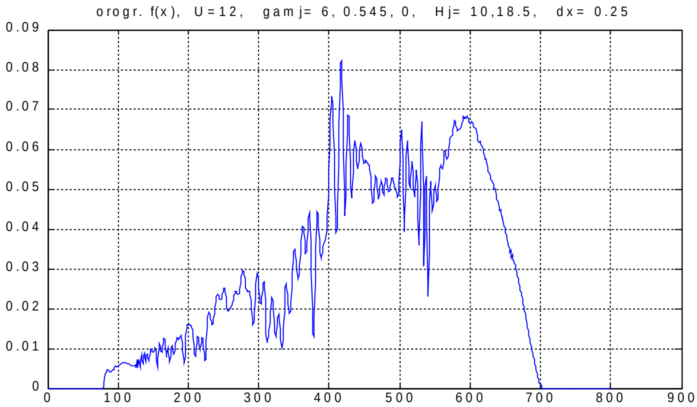


Рис.1. а) Орографическая функция, б) Результаты расчета линий тока

Рисунки показывают, что над гребнями хребтов возмущения наиболее интенсивны и имеют роторный характер в смысле определения Лонга [9]. В области ниже гребней появляются замкнутые роторы при учете слоя с повышенной устойчивостью. Располагаются они под высокими гребнями, в так называемой роторной зоне. По данным расчета, функция тока здесь достигает максимального значения. Иной характер возмущения имеют ниже по потоку роторной зоны. Здесь линии тока более скромные вертикальные смещения, что говорит о наличии периодических волновых движений воздушных частиц. Эту область можно назвать подветренно- волновой.

<u>Случай 2.</u>

а)



б)

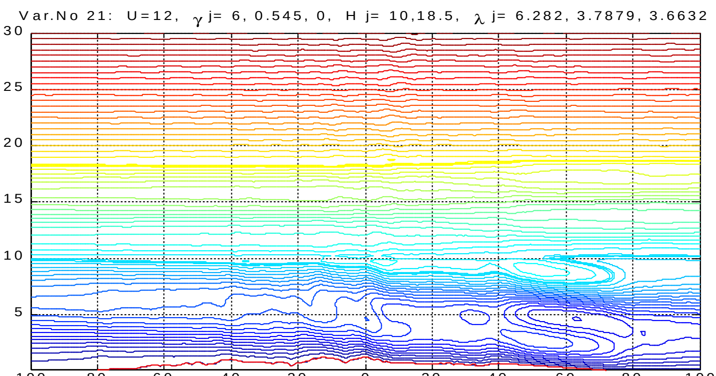
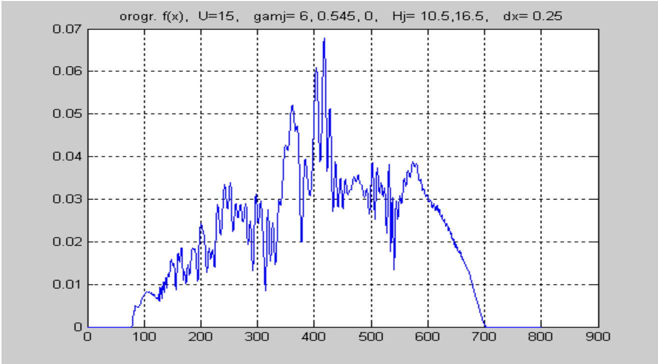


Рис.2. а) Орографическая функция, б) Результаты расчета линий тока

Сравнивая этот вариант с предыдущим, обращаем внимание, что уменьшение скорости натекающего потока до 12 м/с сопровождается резкой трансформацией характера роторной зоны. Она заметно приподнялась и увеличила свою вертикальную протяженность почти в 1,5 раза. В области ниже гребней и над ними появляются замкнутые роторы при учете слоя с повышенной устойчивостью. По потоку роторной зоны характер возмущений практически сохраняется. Подветренные волны выражены более заметно. В следующих расчетах оставляя скорость натекающего потока равной 15 м/с меняем толщину слоев. При этом следует учесть, что толщина среднего слоя не должна превышать толщину нижнего слоя.

Случай 3.

а)



б)

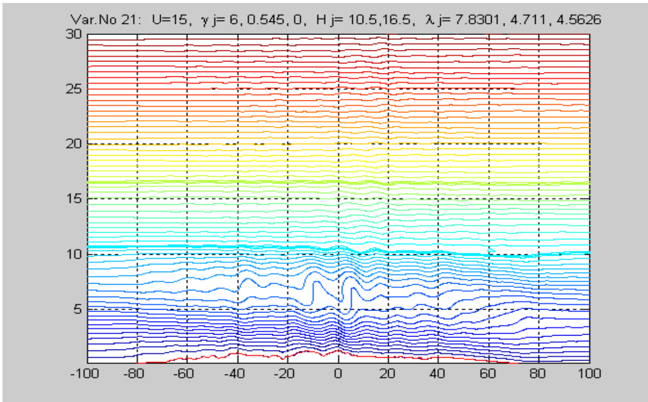
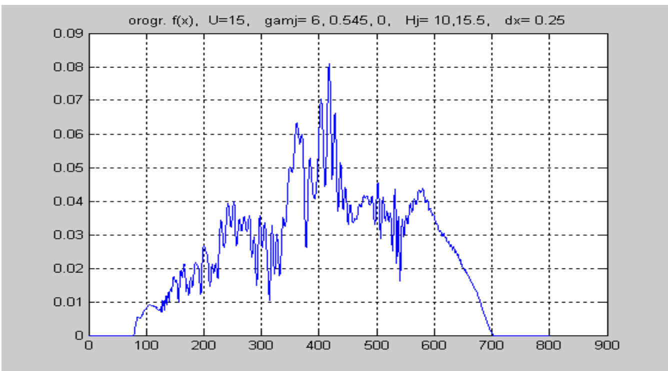


Рис.3. а) Орографическая функции, б) Результаты расчета линий тока.

В данном случае, меняем толщину нижнего и среднего слоев. Произошла опять трансформация характера роторной зоны. Замкнутые вихри исчезают, нет области чисто вертикального и тем более возвратного движения. Формально, по классификации Лонга в работе [9], роторная зона просто исчезла. Амплитуда подветренных волн уменьшилась. Снижается заметно орографическое усиление ветра.

Случай 4.

а)



б)

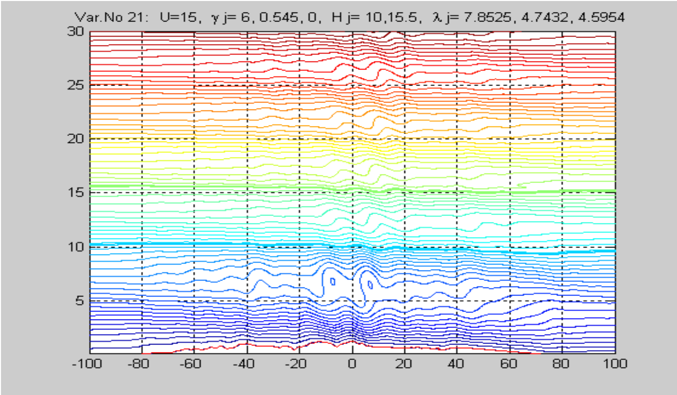


Рис.4. а) Орографическая функция, б) Результаты расчета линий тока

В данном случае уменьшили толщину нижнего слоя с 8,5 км до 5,5 км. Сравнивая с предыдущим случаем, когда мы меняли толщину и нижнего , и среднего слоев, видим, что над гребнями хребтов возмущения наиболее интенсивны и имеют роторный характер в смысле определения Лонга [9]. При учете слоя с повышенной устойчивостью в области ниже гребней появляются замкнутые роторы ,которые располагаются под высокими гребнями в роторной зоне. По потоку роторной зоны линии тока более скромные вертикальные смещения. Это говорит о наличии периодических волновых движений воздушных частиц.

Указанные расчеты показывают, что *«MATLAB»* реализует задачи классического обтекания гор произвольного рельефа, когда основной поток невозмущен и отдельные возмущения распространяются в некоторой области.

Литература

1. Гутман Л.Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Гидрометеоиздат, Ленинград, 1969.

2. Кибель И.А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехиздат, Москва,1957.

3. Кибель И.А. Применение метода длинных волн в сжимаемой жидкости. ПММ, 8, 1944.

4. Кожевников В.Н., Беданоков М.К. Нелинейная многослойная модель обтекания произвольного профиля. Изв. РАН, ФАО, т.29, № 6, 1993.

5. Кожевников В.Н. Возмущение атмосферы при обтекании гор. М.: «Научный мир», 1999.

6. Кожевников В.Н. К одной нелинейной задаче об орографическом возмущении стратифицированного воздушного потока. Изв. АН СССР, сер. Геофиз. № 7, 1963.

7. Кожевников В.Н. Орографические возмущения в двумерной стационарной задаче. Изв. АН СССР, т.4, № 1, 1968.

8. Кожевников В.Н. Орографические возмущения воздушного потока. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. МГУ, физический факультет, 1965.

9. Long R.R. Some aspects of the flow of stratified fluids. 3. Continuous density gradients. Tellus, v. 7, № 3, 1955.

10. Lyra G. Theorie der stationaren Leewellenstromung in freien Atmosphare. Z. angew. Math. Und Mech., 23, H. 1, 1943.

11. Oberbeck A. Uber die Warmeleitung der Flussigkeiten bei Berucksichtigung der Stromungen infolge von Temperaturdifferenzen. Ann. Phys.Chem., Neue Folge, 8, № 6, 1879.

12. Queney P., Corby G., Gerbier N., Koschmieder H., Zieper J. The airflow over mountains. World Meteorol. organiz., Technical note, № 43, 1960 (Ed. M.A. Alaka).